УДК 517.937

В.А. РУСАНОВ, А.В. ДАНЕЕВ, Ю.Э. ЛИНКЕ

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ОСНОВАМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ[1]

Аннотация. В контексте качественной теории реализации бесконечномерных динамических систем приведены результаты исследований геометрических свойств семейств непрерывных управляемых динамических процессов (отображений «вход-выход») в задаче разрешимости дифференциальной реализации этого семейства в классе линейных обыкновенных нестационарных дифференциальных уравнений в сепарабельном гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: дифференциальная реализация, нестационарная $(A, B, B^{\#})_2$-модель, ОЛД/РЛД-совместимость.

ВВЕДЕНИЕ

Предположим, что на интервале времени T заданы функциональные пространства $L(T)$, $D(T)$ и $\mathcal{F}$ — некоторый класс операторов $F: L(T) \to D(T)$, а также фиксировано некоторое подмножество Q из $L(T)$ (ограничений на $\operatorname{Card} Q$ не накладываем). Требуется определить, существует ли оператор $F \in \mathcal{F}$, для которого функциональное подмножество Q является решением уравнения $F(q) = 0 \;\; \forall\, q \in Q \subset L(T)$.

Имея в виду практические применения данной постановки в апостериорном моделировании уравнений динамики систем, в качестве класса операторов $\mathcal{F}$ далее рассматриваем линейные дифференциальные уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве и пучок Q пар «траектория, управление». Таким образом, приведенная задача относится к качественной теории обратных задач системного анализа [1–4] бесконечномерных динамических систем [5–8]. Один из методов решения этой задачи заключается в построении оператора Релея–Ритца [3, 8], поведение которого на пучке Q обусловливает наличие дифференциального уравнения F.

В настоящей работе для решения указанной проблемы используется геометрический аппарат алгебраической топологии. Вводится и исследуется геометрическое свойство конечного характера в анализе качественной разрешимости задачи дифференциальной реализации не ограниченного по мощности (конечного/счетного/континуального) семейства непрерывных управляемых процессов «вход-выход». Предлагаемое свойство позволяет на базе леммы Тейхмюллера–Тьюки ослаблять условия существования непрерывной бихевиористической системы Я. Виллемса (определение 1 [2, с. 10]), имеющей дифференциальную реализацию [8–12] в вещественном сепарабельном гильбертовом пространстве. Показано, что, перекидывая аналитический мост между проективной геометрией и дифференциальной реализацией конечных пучков моделируемых динамических процессов, теоретико-множественную конструкцию оператора Релея–Ритца и геометрический анализ условий его непрерывности методологически удобно формулировать на языке компактных n-многообразий в терминах конечных CW-комплексов Уайтхеда [13].

---

[1]Исследование выполнено при финансировании Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-8081.2016.9), а также гранта РФФИ (16-07-00201).

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМИНОЛОГИЯ

Везде далее $(X,||\cdot||_X)$, $(Y,||\cdot||_Y)$, $(Z,||\cdot||_Z)$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства (предгильбертовость определяют нормы $||\cdot||_X$, $||\cdot||_Y$, $||\cdot||_Z$); $L(Y,X)$ — банахово пространство (с операторной нормой) всех линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Y в X (аналогично вводятся пространства $L(X,X)$, $L(X,Z)$, $L(Z,X)$); T — отрезок числовой прямой R с мерой Лебега μ; $AC(T,X)$ — линейное множество всех абсолютно непрерывных на T (относительно меры μ) функций со значениями в пространстве X. Как обычно, для некоторого банахова пространства $(\mathcal{B},||\cdot||)$ обозначим $\mathrm{L}_2(T,\mu,\mathcal{B})$ фактор-пространство всех интегрируемых по Бохнеру [14, с. 137] отображений $f:T\to\mathcal{B}$ с нормой $\left(\int_T ||f(\tau)||^2\mu(d\tau)\right)^{1/2}$. Кроме того, для удобства условимся, что $\Pi:=AC(T,X)\times\mathrm{L}_2(T,\mu,Y)\times\mathrm{L}_2(T,\mu,Z)$.

Далее, пусть $\mathrm{L}(T,\mu,R)$ — фактор-пространство классов μ-эквивалентности всех вещественных μ-измеримых на интервале T функций и $\le_{\mathrm{L}}$ — такое квазиупорядочение в $\mathrm{L}(T,\mu,R)$, что $\phi_1\le_{\mathrm{L}}\phi_2$ (для $\phi_1,\phi_2\in\mathrm{L}(T,\mu,R)$) имеет место тогда и только тогда, когда $\phi_1(t)\le\phi_2(t)$ μ-почти всюду в T; для $W\subset\mathrm{L}(T,\mu,R)$ обозначим $\sup_{\mathrm{L}} W$ наименьшую верхнюю грань (если она существует) подмножества W в структуре квазиупорядочения $\le_{\mathrm{L}}$. Вне зависимости от Card W связь между конструкцией $\sup_{\mathrm{L}}$ и обычной конструкцией sup на прямой R такова: если в пространстве $(\mathrm{L}(T,\mu,R),\le_{\mathrm{L}})$ лежит грань $\sup_{\mathrm{L}} W$, то имеется (теорема 17 [16, с. 68]) счетное подмножество $W_-\subset W$ такое, что μ-измеримую функцию $\phi:=\sup_{\mathrm{L}}W$ осуществляет sup-конструкция следующего вида: $t\mapsto\phi(t)=\sup\{v(t)\in R: v\in W_-\}$.

Примем, что $\Psi:\Pi\to\mathrm{L}(T,\mu,R)$ — функциональный оператор Релея–Ритца [3, 8, 10]:

$$\Psi(g(t),w(t),q(t)):=\begin{cases}||dg(t)/dt||_X/||(g(t),w(t),q(t))||_U, \\ \qquad \text{если } (g(t),w(t),q(t))\ne 0\in U; \\ 0\in R, \text{ если } (g(t),w(t),q(t))=0\in U,\end{cases} \tag{1}$$

где $||(x,y,z)||_U:=(||x||_X^2+||y||_Y^2+||z||_Z^2)^{1/2}$ — норма в декартовом произведении $U:=X\times Y\times Z$ (согласно (1) в [15, с. 47] $(U,||\cdot||_U)$ — гильбертово пространство); при построении Ψ учтены леммы 1 и 3 из [7], позволяющие утверждать, что для всех вектор-функций $(g,w,q)\in\Pi$ будет справедливо

$$\{t\in T: ||(g(t),w(t),q(t))||_U=0\}\subset\{t\in T: ||dg(t)/dt||_X=0\}\ (\mathrm{mod}\ \mu);$$

данное вложение констатирует функциональную корректность конструкции (1). Отметим, что этимология названия оператора (1) приведена в [3].

Оператор (1) удовлетворяет простым (но важным) отношениям:

$$0\le_{\mathrm{L}}\Psi(\phi),\ 0\in\mathrm{L}(T,\mu,R),\ \phi\in\Pi,\ \Psi(r\phi)=\Psi(\phi),\ 0\ne r\in R. \tag{1'}$$

Геометрический смысл соотношения равенства из (1') раскрывает комментарий в сноске 2, сопоставляющий оператор (1) с методами проективных представлений [15, с. 238] на *CW*-комплексах [13, с. 232].

Использовав базовую терминологию, выделим еще одно (эксклюзивное) свойство оператора Релея–Ритца.

Определение 1 [3]**.** Будем говорить, что оператор (1) полуаддитивен с весом $p\in R$ на семействе динамических процессов $E\subset\Pi$, если для любой пары $(\omega_1,\omega_2)\in E\times E$ выполнимо условие $\Psi(\omega_1+\omega_2)\le_{\mathrm{L}} p\Psi(\omega_1)+p\Psi(\omega_2)$.

Рассмотрим (на временном интервале T) дифференциальные модели класса

$$dx(t)/dt + A(t)x(t) + B(t)u(t) + B^{\#}(t)u^{\#}(x(t)) = 0, \tag{2}$$

где $x \in AC(T, X)$ — решение Каратеодори (K-решение), $u \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Y)$ — программное управление, $u^{\#} \in L(X, Z)$ — оператор позиционного управления, при этом

$$(A, B, B^{\#}) \in \mathrm{L}_2(T, \mu, L(X, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Y, X)) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, L(Z, X)).$$

Как и в [7, 10], вектор-функцию $(x, u, u^{\#}(x))$ назовем K-решением, а тройку оператор-функций $(A, B, B^{\#})$ — нестационарной $(A, B, B^{\#})_2$-моделью уравнения (2).

Везде далее $u^{\#} \in L(X, Z)$ — заданный оператор позиционного управления, N — фиксированное семейство (пучок) управляемых динамических процессов вида

$$N \subset \Pi_{u^{\#}} := \{(g, w, u^{\#}(g)) \in \Pi : g \in AC(T, X), w \in \mathrm{L}_2(T, \mu, Y)\}, \tag{3}$$

причем Card $N \le \infty$, где ∞ — некоторый (фиксированный) бесконечный кардинал.

В контексте определения 1 [см. 2, с. 10] семейство динамических процессов (3) задает некоторую непрерывную управляемую бихевиористическую динамическую систему N (возможно, сформированную a posteriori). Введем для системы N два потенциальных структурных свойства.

Определение 2 [4]**.** Пучок вектор-функций $P \subset N$ имеет:

— обыкновенную линейно дифференциальную совместимость (ОЛД-совместимость), если либо $P = \varnothing$, либо существует такая дифференциальная система (2), что пучок P принадлежит классу допустимых K-решений этой системы;

— распределенную линейно дифференциальную совместимость (РЛД-совместимость) ступени k (фиксированное натуральное число), когда либо $P = \varnothing$, либо любое $P' \subset \operatorname{abs\,co}(P)$, Card $P' = k$, образует ОЛД-совместимое множество.

Замечание 1. Не будем исследовать РЛД-совместимость в широком смысле слова, т.е. когда k — кардинальное число, так как это может привести к нежелательным теоретико-множественным усложнениям (см. далее сноску 3). Следует обратить внимание на такие факты:

1) требование (условие) наличия в структуре РЛД-совместимости конструкции абсолютной выпуклости множества P существенно, поскольку возможно положение, когда любое подмножество $P' \subset \operatorname{co}(P)$, Card $P' = k$, образует ОЛД-совместимое множество, в то время как множество P не имеет свойства РЛД-совместимости ступени k (см. далее пример 1);

2) ОЛД-совместимость множества P не обеспечивает единственности $(A, B, B^{\#})_2$-модели, которая через дифференциальное уравнение (2) реализует семейство процессов P;

3) РЛД-совместимость произвольной ступени k (в том числе при Card $P' = \aleph_0$ — алеф нуль) не эквивалентна ОЛД-совместимости.

Исследуем связь и различие в структурах ОЛД- и РЛД-совместимости.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ОЛД/РЛД-СОВМЕСТИМОСТИ

Ясно, что ОЛД/РЛД-совместимость инвариантна по отношению к идемпотентному действию оператора Span, что позволяет ввести следующие конструкции.

Определение 3. Если $P^* \subset N$ (аналогично $P^{\#} \subset N$) образует максимальное множество со свойством ОЛД-совместимости (аналогично РЛД-совместимости ступени k), то Span P^* (соответственно Span $P^{\#}$) назовем обыкновенным пластом над N (распределенным пластом ступени k над N) и, если $N \subset$ Span P^* ($N \subset$ Span $P^{\#}$), такой пласт будем называть однородным.

Замечание 2. Может оказаться, что над семейством динамических прочесов N существуют обыкновенные пласты, распределенный однородный пласт (при этом они все не совпадают (см. далее пример 1)) или распределенный однородный пласт произвольной ступени k, но не имеется какого бы то ни было обыкновенного пласта.

На первый взгляд теоретико-системное понятие РЛД-совместимости кажется весьма замысловатым, однако далее показано, насколько оно на самом деле аналитически продуктивно. Так, следующее утверждение констатирует: РЛД-совместимость есть свойство конечного характера [17, с. 28] и, следовательно, для каждого непустого РЛД-совместимого подмножества процессов $P \subset N$ существует максимальное РЛД-совместимое подмножество $P^{\#}$ такое, что $P \subset P^{\#} \subset N$. Можно только сожалеть, что в общем случае это свойство динамической системы N не имеет места в отношении признака ОЛД-совместимости.

Лемма 1. Для пучка динамических процессов $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ признак РЛД-совместимости ступени k есть свойство конечного характера.

Доказательство. Пусть $D \subset N$ — некоторое непустое РЛД-совместимое множество динамических процессов ступени k и D' — произвольное конечное подмножество множества D. Поскольку имеем $\mathrm{abs\,co}\,(D') \subset \mathrm{abs\,co}\,(D)$, каждый набор k элементов из $\mathrm{abs\,co}\,(D')$ представляет ОЛД-совместимое множество, следовательно, D' является РЛД-совместимым ступени k. Обратно, пусть $D \subset N$ и Q_k — некоторый набор k элементов из $\mathrm{abs\,co}\,(D)$. В D найдется [16, с. 81] конечное множество D^* такое, что $Q_k \subset \mathrm{abs\,co}\,(D^*)$, и так как D^* конечно, то оно является РЛД-совместимым ступени k, поэтому любые k элементов из $\mathrm{abs\,co}\,(D^*)$ образуют ОЛД-совместимое множество, в частности, таковым будет Q_k, откуда заключаем, что множество D является РЛД-совместимым ступени k. ■

Как уже отмечалось, лемма 1 устанавливает принципиальный факт: каждое непустое семейство процессов $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ в соответствии с леммой Тейхмюллера–Тьюки [17, с. 28] либо не содержит ни одного непустого подмножества со свойством РЛД-совместимости (а значит, и ОЛД-совместимости), либо над данным пучком динамических процессов N непременно найдется некоторый распределенный пласт (возможно, неединственный); фактически с этой целью и вводилось свойство РЛД-совместимости. Отметим, что лемма Тейхмюллера–Тьюки является альтернативной формой аксиомы выбора и, следовательно, не зависит от континуум-гипотезы (см. комментарий сноски 3).

Наделим пространство $H_2 := \mathrm{L}_2(T, \mu, X) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Y) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, Z)$ топологией при норме

$$||(g, w, q)||_H := \left(\int_T (||g(\tau)||_X^2 + ||w(\tau)||_Y^2 + ||q(\tau)||_Z^2)\mu(d\tau) \right)^{1/2}, \quad (g, w, q) \in H_2;$$

заметим, что H_2 — гильбертово пространство в силу конструкции $||\cdot||_H$ (см. [15, с. 47]).

Лемма 2. Пусть динамический пучок $N \subset \Pi_{u^{\#}}$ образует ОЛД-совместимое множество, тогда:

(i) существует такой обыкновенный пласт E над $\Pi_{u^{\#}}$, замкнутый в пространстве H_2, что реализуемо включение $N \subset E$;

(ii) E — распределенный пласт ступени k над семейством процессов $\Pi_{u^{\#}}$ (k — любое натуральное число).

Доказательство. Пусть $E \subset \Pi_{u^{\#}}$ — семейство всех K-решений системы (2), являющейся реализацией $N \subset \Pi_{u^{\#}}$, тогда (i) является следствием теоремы 31.D в [18, с. 111]. Так как ОЛД-совместимость влечет свойство РЛД-совместимости по всем ступеням $1 \le k$, то для доказательства леммы установим свойство (ii).

Рассуждаем от противного. Пусть расширение $E_1 := \mathrm{Span}\,(E \cup \{(x^*, u^*, u^\#(x^*))\})$ сохраняет РЛД-совместимость ступени k для одноэлементного ОЛД-совместимого $\{(x^*, u^*, u^\#(x^*))\} \not\subset E$. Выберем в E тройку $(x^{**}, u^*, u^\#(x^{**}))$ такую, что $x^{**}(t_0) = x^*(t_0)$, $t_0 \in T$. Тогда в силу РЛД-совместимости E_1 тройка $(x^{**} - x^*, 0, u^\#(x^{**} - x^*))$ представляет ненулевое решение некоторой однородной системы (2) с нулевым начальным условием в момент t_0. В результате пришли к противоречию. ■

Лемма 2 имеет важное следствие, по существу, показывающее, что ОЛД-совместимость топологически является настолько «хорошей», насколько этого можно желать.

Следствие 1. Замыкание ОЛД-совместимого множества в топологии пространства H_2 также является ОЛД-совместимым множеством.

Согласно следствию 1 леммы 2 любой обыкновенный пласт, не замкнутый в пространстве H_2, всегда можно топологически расширить действием оператора замыкания Куратовского [17, с. 36] до его замыкания с сохранением свойства ОЛД-совместимости. В данном контексте, систематизировав терминологию, такое расширение назовем топологическим ОЛД-расширением, что в общем случае несправедливо в отношении распределенного пласта, поскольку не всегда выполнимо топологическое распространение РЛД-совместимости. В связи с введенной топологической конструкцией возникает простой вопрос, существуют ли в пространстве H_2 незамкнутые обыкновенные пласты, допускающие топологическое ОЛД-расширение. Ответ, очевидно, положителен: таковыми (в силу теоремы Бэра о категории [14, с. 96]) являются пласты со счетным базисом Гамеля (алгебраическим базисом [14, с. 141]), что подтверждает следующий вывод.

Следствие 2. Если обыкновенный или распределенный пласт над $N \subset \Pi_{u^\#}$ замкнут в пространстве H_2, то его базис Гамеля либо конечный, либо несчетный.

Согласно обычной терминологии башен множеств [15] над семейством управляемых процессов $\Pi_{u^\#}$ структура ОЛД-совместимости сильнее (иными словами, тоньше) структуры РЛД-совместимости (равносильно РЛД-совместимость слабее (грубее) ОЛД-совместимости), поскольку (лемма 2, п. ii) каждое ОЛД-совместимое множество динамических процессов из $\Pi_{u^\#}$ является РЛД-совместимым для любой ступени k (обратное предположение в общем случае несправедливо (см. п. 3 замечания 1, а также пример 1)).

Далее G_N — граница [17, с. 51] множества $\mathrm{abs\,co}(N)$ в линейном топологическом пространстве $\mathrm{Span}\ N$ с топологией, индуцированной из объемлющего (гильбертова) пространства H_2; в силу следствия 2 при $\mathrm{Card\,dim\,Span}\ N = \aleph_0$ пространство $\mathrm{Span}\ N$ неполно.

Очевидно, что каждое теоретико-системное исследование РЛД-совместимости фиксированного семейства управляемых динамических процессов (3) должно начинаться со ступени $k = 1$, поэтому в арсенале теоретических средств подобных качественных исследований не последнее место может занять следующее утверждение.

Теорема 1. Над семейством процессов (3) существует распределенный однородный пласт ступени $k = 1$ в том и только в том случае, если $\Psi[G_N] \subset \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$, при этом $\mathrm{Span}\ N$ образует обыкновенный однородный пласт тогда и только тогда, когда множество $\Psi[G_N]$ ограничено сверху в пространстве $(\mathrm{L}_2(T, \mu, R), \le_{\mathrm{L}})$, что эквивалентно существованию $\sup_{\mathrm{L}} \Psi[G_N] \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$ в структуре квазиупорядочения $\le_{\mathrm{L}}$.

Если каждый пучок управляемых процессов $N_i \subset \Pi_{u^\#}$, $\mathrm{Card}\ N_i < \aleph_0$, $i = 1, \ldots, n$, имеет свойство РЛД-совместимости ступени $k = 1$, то семейство процессов $\bigcup\limits_{i=1,\ldots,n} N_i$ имеет некоторую дифференциальную реализацию (2), коль скоро оператор Релея–Ритца полуаддитивен с некоторым весом $p \ge 1$ на замкнутом линейном многообразии $\mathrm{Span}\ N_1 + \mathrm{Span}\ N_2 + \cdots + \mathrm{Span}\ N_n$.

Доказательство. Первая часть теоремы 1 очевидна в силу теоремы 3 в [8], поэтому обоснуем вторую часть. Пусть $\{(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij})) : j = 1, \ldots, k_i\}$ — алгебраический базис в Span N_i и пусть $\Psi(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij}) = \varphi_{ij}$, где $\varphi_{ij} \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$. Если $(x, u, v) \in$ Span $N_1 + \ldots +$ Span N_n, то $(x, u, v) \in \Sigma\beta_{ij}(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij}))$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k_i$, и значит, на основании (1') имеет место цепочка отношений (далее $l = k_1 + \ldots + k_n$):

$$\Psi(x, u, v) \in \Psi(\Sigma\beta_{ij}(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij}))) \leq_{\mathrm{L}} \Sigma p^{l-1}\Psi(\beta_{ij}(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij}))) =$$

$$= \Sigma p^{l-1}\Psi(x_{ij}, u_{ij}, u^{\#}(x_{ij})) = \Sigma p^{l-1}\varphi_{ij},$$

и так как выбор (x, u, v) предполагался произвольным, то данное утверждение следует из теоремы 3 в [8]. ■

Продолжив анализ РЛД-совместимости ступени $k = 1$, отметим, что в моделировании реализации семейств динамических процессов с «нулевыми» программным и позиционным управлениями, по существу, этим структурным классом можно и ограничиться; для удобства примем

$$\Pi_0 := AC(T, X) \times \{0\} \times \{0\} \subset \Pi.$$

Теорема 2. Структуры РЛД-совместимости ступеней $k = 1, 2, \ldots$ на подмножествах из Π_0 эквивалентны (совпадают).

(Доказательство — модификация утверждения 3 в [19].)

Для решения задачи существования дифференциальной реализации в классе однородных систем (2) получаем (согласно первой части теоремы 1) важное следствие, устанавливающее структурное положение, когда в семействе динамических процессов N совпадают обе структуры: слабая — РЛД и сильная — ОЛД.

Следствие 1. На конечных подмножествах из Π_0 структуры РЛД-совместимости ступени $k = 1$ и ОЛД-совместимости эквивалентны.

Используя теорему 1, данный результат можно компактно интерпретировать геометрически, при этом получается следующая новая форма следствия 1 теоремы 2, которая иногда может оказаться аналитически предпочтительней.

Следствие 2. Пучок траекторий $N \subset \Pi_0$, Card $N < \aleph_0$, представляет K-решения однородной системы (2) тогда и только тогда, когда $\Psi[G_N] \subset \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$.

Замечание 3. Чтобы оценить качественный вклад РЛД-совместимости в результат теоремы 2 и ее следствий 1 и 2, отметим, что аналитический метод, обычно доказывающий [8, 10] существование дифференциальной реализации семейства процессов (3), основан на отыскании функции $\varphi \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$, для которой выполнимо $\phi \leq_{\mathrm{L}} \varphi$ при произвольной функции $\phi \in \Psi[G_N]$ (см. теорему 1). Ясно, что характеристический признак $\Psi[G_N] \subset \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$ — более слабое условие.

ПРОЕКТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА РЕЛЕЯ–РИТЦА

В силу формулы (1') формально можно считать $\Psi\,|\text{Span } N \setminus \{0\} = \Psi|P_N$, где P_N — вещественное проективное пространство (совокупность всех одномерных подпространств в Span N [15, с. 239])[2], ассоциированное с линейным многообразием Span N; далее в отношении метрической структуры пространства $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ использованы теоремы 15 и 16 из [16, с. 65, 67].

[2]Абстрагируясь, в конструкции оператора Релея–Ритца можно принять, что область определения P_N — это множество орбит мультипликативной группы $R^* = R \setminus \{0\}$, действующей на Span $N \setminus \{0\}$ по правилу $\lambda(g,w,q) = (\lambda g, \lambda w, \lambda q)$, $\lambda \in R^*$. В данной трактовке очевидны (и существенно актуальны в контексте теоремы 3 и ее следствия 1) топологические свойства [15, с. 77] пространства P_N, Card $N < \aleph_0$, прежде всего его компактность, в частности, если dim Span N = 3, то P_N устроено (гомеоморфно) как лист Мебиуса, к которому по его границе приклеен круг [20, с. 162]. Отметим, что на пространстве P_N, Card $N < \aleph_0$, можно ввести структуру конечного CW-комплекса [20, с. 140], что важно при решении вопроса о геометрической реализации (теорема 9.7 [20, с. 149]) многообразия P_N при нахождении (вычислении) $\sup_L \Psi[P_N]$. В данном контексте свойство РЛД-совместимости легко переформулируется на языке проективной геометрии в терминах вещественных грассмановых многообразий [15, с. 78].

Теорема 3. Рассмотрим $\mathrm{L}(T, \mu, R)$ как полное сепарабельное метрическое пространство с инвариантной метрикой

$$\rho_T(\xi, \zeta) := \int_T |\xi(\tau) - \zeta(\tau)| (1 + |\xi(\tau) - \zeta(\tau)|)^{-1} \mu(d\tau), \;\; \xi, \zeta \in \mathrm{L}(T, \mu, R),$$

и пусть $N \subset \Pi_0, \mathrm{Card}\, N < \aleph_0$. Тогда оператор $\Psi: P_N \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$ будет непрерывным, если пучок динамических процессов N представляет РЛД-совместимое множество ступени 1.

Теорему 3 еще предстоит обобщить (на управляемые N-пучки согласно следствию 1 этой теоремы).

Доказательство. Поскольку все хаусдорфовы конечномерные локально выпуклые векторные топологические пространства одной и той же алгебраической размерности изоморфны между собой (теорема 2 в [16, с. 127]), будем считать, что векторную топологию в линейном многообразии $\mathrm{Span}\, N \subset \Pi_0$ (наравне с топологией, индуцированной из гильбертова пространства H_2) снабжает норма $||(g,0,0)||_N := ||g||_C + ||\dot{g}||_1, \;(g,0,0) \in \mathrm{Span}\, N,$ где

$$\dot{g}(t) = dg(t)/dt, \;||g||_C := \sup\{||g(t)||_X : t \in T\}, \;||\dot{g}||_1 := \int_T ||\dot{g}(\tau)||_X \;\mu(d\tau).$$

Обозначим $S_N := \{(g,0,0) \in \mathrm{Span}\, N : ||(g,0,0)||_N = 1\}$ сферу 1-радиуса в $\mathrm{Span}\, N$ с топологией, индуцированной нормой $||\cdot||_N$. В силу (1) для доказательства достаточно установить непрерывность оператора $\Phi: S_N \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$, действующего по правилу (аналогичному правилу (1)):

$$\Phi(g(t),0,0) := ||\dot{g}(t)||_X / ||g(t)||_X \;\; \text{при} \;\; g(t) \neq 0,$$

$$\Phi(g(t),0,0) := 0 \in R, \;\; \text{если} \;\; g(t) = 0.$$

Выделим $(g^*, 0, 0) \in S_N$ и пусть $\{(g_j,0,0)\}$ — последовательность в S_N, сходящаяся к $(g^*, 0, 0)$. Покажем, что $\rho_T(\Phi(g_j,0,0), \Phi(g^*,0,0)) \to 0$. Для этого, рассуждая от противного, внутри подпоследовательности $\{(g_k,0,0)\} \subset \{(g_j,0,0)\}$ такой, что $\rho_T(\Phi(g_k,0,0), \Phi(g^*,0,0)) \geq \sigma > 0$, достаточно (в целях получения противоречия) для некоторой подпоследовательности $\{(g_i,0,0)\} \subset \{(g_k,0,0)\}$ установить (теоремы 4 и 14 в [16, с. 58, 64]) сходимость $\Phi(g_i,0,0) \to \Phi(g^*,0,0)$ μ-почти всюду в T, поскольку сходимость в метрике ρ_T равносильна сходимости по мере μ.

Сходимость последовательности $\{(g_k,0,0)\}$ в норме $||\cdot||_N$ приводит к тому, что последовательность $\{g_k\}$ $||\cdot||_C$-сходится к g^* равномерно (а значит, всюду в T), при этом последовательность $\{\dot{g}_k\}$ будет $||\cdot||_1$-сходиться к $\dot{g}^*$ в среднем, и значит, существует такое подмножество $T_\mu = T(\mathrm{mod}\, \mu)$, что найдется $\{\dot{g}_i\} \subset \{\dot{g}_k\}$, поточечно сходящаяся к g^* всюду в T_μ. Зафиксируем в T_μ точку t', тогда $g^*(t') \neq 0$; действительно, так как множество N РЛД-совместимо ступени 1, то траектория g^* имеет однородную реализацию (2), и, таким образом, g^* нигде на интервале времени T не проходит через точку $0 \in X$.

Итак, пусть $g^*(t') \neq 0$. Ясно, что для любого исчезающего малого $\varepsilon > 0$ найдется (в силу равномерной $||\cdot||_C$-сходимости $\{g_i\}$) такой индекс i', что при $i \geq i'$ выполняется

$$|\Phi(g^*(t'),0,0) - \Phi(g_i(t'),0,0)| = |||\dot{g}^*(t')||_X / ||g^*(t')||_X - ||\dot{g}_i(t')||_X / ||g_i(t')||_X| =$$

$$= |||\dot{g}^*(t')||_X / ||g^*(t')||_X - ||\dot{g}_i(t')||_X / (||g^*(t')||_X \;(1 \pm \delta'(i)))|,$$

где $0 \leq \delta'(i) \leq \varepsilon < 1$. Рассмотрим вариант $-\delta'(i)$; вычисления для $+\delta'(i)$ аналогичны.

Поскольку $(1 - \delta'(i))^{-1} = 1 + \delta'(i) + \delta'^2(i) + \delta'^3(i) + \ldots = 1 + \delta'(i)(1 - \delta'(i))^{-1}$, то имеем

$$|\Phi(g^*(t'),0,0)-\Phi(g_i(t'),0,0)|=$$
$$=\Big|\,||\dot g^*(t')||_X-||\dot g_i(t')||_X/||g^*(t')||_X-\delta'(i)||\dot g_i(t')||_X/(||g^*(t')||_X\ (1-\delta'(i)))\Big|\,.$$

Рассуждая аналогично, заключаем, что для числа ε найдется (в силу поточечной сходимости последовательности $\{\dot g_i\}$) такой индекс $i''\ge i'$ и $0\le\delta''(i)\le\varepsilon$, что при $i\ge i''$ будет

$$|\Phi(g^*(t'),0,0)-\Phi(g_i(t'),0,0)|=$$
$$=|\pm\delta''(i)/||g^*(t')||_X+\delta'(i)(\pm\delta''(i)-||\dot g^*(t')||_X/(||g^*(t')||_X\ (1-\delta'(i)))|\le$$
$$\le\varepsilon(1/||g^*(t')||_X+(\varepsilon+||\dot g^*(t')||_X\ )/(||g^*(t')||_X\ (1-\varepsilon)))=:$$
$$=:f(t',\varepsilon)\Rightarrow\lim\{f(t',\varepsilon):\varepsilon\to+0\}=0,$$

что в конечном итоге устанавливает (в силу произвольности выбора точки $t'\in T_\mu$) поточечную сходимость $\Phi(g_i,0,0)\to\Phi(g^*,0,0)$ μ-почти всюду в T. ■

Корректировка нормы $||\cdot||_N$, учитывающая переход от анализа неуправляемых динамических процессов из Π_0 к управляемым из Π, позволяет сформулировать следующее.

Следствие 1. Для конечного пучка $N\subset\Pi_{\mu^\#}$ оператор $\Psi:P_N\to \mathrm{L}(T,\mu,R)$ непрерывный, если при произвольном выборе вектор-функции $(g,w,q)\in\in\mathrm{Span}\ N\setminus\{0\}$ и точки $t\in T_g:=\{t\in T: g(t)=0\in X\}$ для них найдется такое действительное число $\delta_t>0$, что $\mu((t-\delta_t,t+\delta_t)\cap T_g)=0$.

Доказательство. Вначале установим факт $\mu(T_g)=0$. Для этого выберем каждому моменту времени $t\in T_g$ действительную константу $\delta_t>0$ так, что $\mu((t-\delta_t,t+\delta_t)\cap T_g)=0$. Далее найдем такие рациональные числа r_t^-, r_t^+, что $r_t^-\in(t-\delta_t,t)$, $r_t^+\in(t,t+\delta_t)$, и пусть $I_t:=(r_t^-,r_t^+)$. Тогда семейство интервалов $\{I_t\}_{t\in T_g}$ покрывает множество T_g, а так как каждый интервал I_t является открытым с рациональными концами, то семейство $\{I_t\}_{t\in T_g}$ содержит некоторое счетное подсемейство $\{I_{ti}\}_{i=1,2,\ldots}$, также являющееся покрытием множества T_g. Теперь заметим, что, поскольку для любого индекса $i=1,2,\ldots$ выполняется включение $I_{ti}\subset(t_i-\delta_{ti},t_i+\delta_{ti})$, очевидно имеет место равенство $\mu(I_{ti}\cap T_g)=0$, и значит, справедлива следующая цепочка μ-отношений:

$$\mu(T_g)=\mu(T_g\cap(\bigcup_{i=1,2,\ldots}I_{ti}))=\mu(\bigcup_{i=1,2,\ldots}T_g\cap I_{ti})\le\sum_{i=1,2,\ldots}\mu(T_g\cap I_{ti})=0,$$

откуда следует $\mu(T_g)=0$. По существу, это положение фактически снимает апелляцию в доказательстве теоремы 3 к свойству РЛД-совместимости ступени 1, после чего можно воспользоваться этим фактом и прибегнуть к почти дословному повторению доказательства теоремы 3 с представлением нормы $||\cdot||_N$ и оператора Φ (из доказательства теоремы 3) в виде

$$||(g,w,q)||_N:=||g||_C+||\dot g||_1+||(w,q)||_2,\ (g,w,q)\in\mathrm{Span}\ N\setminus\{0\},\ \dot g(t)=dg(t)/dt,$$
$$||g||_C:=\sup\{||g(t)||_X:t\in T\},\ ||\dot g||_1=\int_T||\dot g(\tau)||_X\ \mu d\tau,$$
$$||(w,q)||_2:=\left(\int_T(||w(\tau)||_Y^2+||q(\tau)||_Z^2\ )\mu(d\tau)\right)^{1/2};$$
$$\Phi(g(t),w(t),q(t)):=||\dot g(t)||_X/(||g(t)||_X+||w(t)||_Y+||q(t)||_Z\ )$$

$$\text{при } (g(t), w(t), q(t)) \neq 0 \in U,$$

$$\Phi(g(t), w(t), q(t)) := 0 \in R, \text{ если } (g(t), w(t), q(t)) = 0 \in U. \blacksquare$$

Ясно, что для управляемого динамического пучка $N \subset \Pi_{u^\#}$, Card $N < \aleph_0$, непрерывность оператора Релея–Ритца, действующего на конечном CW-комплексе P_N, обусловливает компактность функционального множества $\Psi[P_N]$ (теорема 3.1.10 в [17, с. 199]), а также гарантирует (см. следствие 3.2.9 в [17, с. 220]) существование такой точки $\gamma^* \in P_N$, что выполнимы соотношения

$$\rho_T(\Psi(\gamma^*), 0) = \sup\{\rho_T(\Psi(\gamma), 0) : \gamma \in P_N\} \le \rho_T(\sup_{\mathrm{L}} \Psi[P_N], 0),$$

$$\Psi(\gamma^*) \notin \mathrm{L}_2(T, \mu, R) \Rightarrow \sup_{\mathrm{L}} \Psi[P_N] \notin \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$

где $\sup_{\mathrm{L}} \Psi[P_N] = \sup_{\mathrm{L}} \Psi[G_N]$, и если помимо прочего оператор $\Psi : P_N \to \to \mathrm{L}(T, \mu, R)$ является взаимно-однозначным, то $\Psi | P_N$ — гомеоморфизм (теорема 7.2 в [20, с. 104]), что позволяет вычислить фундаментальную группу (теорема 8.3 в [13, с. 97]) метрического пространства $(\Psi[P_N], \rho_T)$.

Замечание 4. Полезно также следующее рассуждение: для натурального n обозначим W_n конечное n^{-1}-плотное подмножество в $\Psi[P_N]$ (W_n найдется в силу теоремы 4.3.27 [17, с. 408], при этом для любого $\varepsilon > 0$, $\cup_{n=1,2,\dots} W_n$ — ε-сеть [16, с. 43] в метрическом пространстве $(\Psi[P_N], \rho_T)$) и пусть $f_n := \sup_{\mathrm{L}} \bigcup_{i=1,\dots,n} W_n$. Поэтому $\sup_{\mathrm{L}} \Psi[P_N]$ существует тогда и только тогда (и значит, в силу теоремы 1 при $\sup_{\mathrm{L}} \Psi[P_N] \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$ пучок N образует ОЛД-совместимое множество), когда $\{f_n\}$ — последовательность Коши в метрическом пространстве $(\mathrm{L}(T, \mu, R), \rho_T)$; отметим, что $(\mathrm{L}(T, \mu, R), \rho_T)$ — полное сепарабельное метрическое пространство (теоремы 15 и 16 в [16, с. 65, 67]).

Данные геометрические конструкции, а также теорема 9.7 в [20, с. 149] дают основание полагать, что для варианта Card $N < \aleph_0$ проективное пространство P_N — это наиболее «естественная» структура области определения оператора Ψ.

Вопрос о реализации динамических пучков (3) в классе дифференциальных систем (2) был бы решен, если бы следствия 1 и 2 теоремы 2 были справедливы и для траекторий с ненулевым программным управлением. Однако для теории реализации и для приложений это не так. Приведем поясняющий пример.

Пример 1. Пусть $X = Y = R$, $T = [-1, 1]$, $u^\#(\cdot) \equiv 0$ и

$$N_1 = \{(x_1(\cdot), u_1(\cdot), 0) : ((x_1(t), u_1(t)) = (t, 1), t \in T\},$$

$$N_2 = \{(x_2(\cdot), u_2(\cdot), 0) : ((x_2(t), u_2(t)) = (t^2, -t), t \in T\}.$$

Покажем, что над $N := N_1 \cup N_2$ существуют только два обыкновенных пласта: Span N_1, Span N_2, и один распределенный однородный пласт Span N ступени 1, который не является обыкновенным пластом, в силу чего (согласно теореме 1) оператор Релея–Ритца неполуаддитивный (с любым весом $p \ge 1$) на линейном многообразии Span N (при этом, очевидно, он полуаддитивен с весом $p = 1$ как на многообразии Span N_1, так и на Span N_2). Докажем эти положения, разбив их установление на серию простых шагов. В связи с этим шаблонная проверка (в силу теоремы 1) показывает, что управляемые процессы N_1, N_2 суть ОЛД-совместимые множества, поскольку выполняются соотношения

$$\sup_{\mathrm{L}} \Psi[G_{N_1}] = (t^2 + 1)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R),$$

$$\sup_{\mathrm{L}} \Psi[G_{N_2}] = 2(t^2 + 1)^{-1/2} \in \mathrm{L}_2(T, \mu, R).$$

Теперь покажем, что множество N имеет РЛД-совместимость ступени 1. Для этого достаточно (в силу первой части теоремы 1) установить, что любая точка границы G_N удовлетворяет теореме 1 [7]. С этой целью зафиксируем произвольную вектор-функцию $(x, u, 0) \in G_N$. Если при этом выборе $(x, u, 0)$ — крайняя точка $\operatorname{abs}\operatorname{co}(N)$, то соответствующее ей множество $\{(x, u, 0)\}$ имеет представление, соответствующее одному из следующих ОЛД-совместимых (что показано ранее) множеств: N_1, N_2, $-N_1$, $-N_2$.

Остается рассмотреть случай, когда $(x, u, 0)$ не является крайней точкой $\operatorname{abs}\operatorname{co}(N)$. Тогда конструкции мер ν и ν_- из теоремы 1 [7], соответствующие процессу $(x, u, 0) \in G_N \setminus (N_1 \cup N_2 \cup -N_1 \cup -N_2)$, должны иметь один из двух вариантов (каждый соответствует своей паре противоположных сторон «параллелограмма» $\operatorname{abs}\operatorname{co}(N)$) из аналитических представлений:

$$\begin{cases} \nu = \int ((c\tau + (1-c)\tau^2)^2 + (c - (1-c)\tau)^2)\mu(d\tau), \\ \nu_- = \int |c + 2(1-c)\tau|\,\mu(d\tau), \text{ если } 0 < c < 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nu = \int ((c\tau - (1-c)\tau^2)^2 + (c + (1-c)\tau)^2)\mu(d\tau), \\ \nu_- = \int |c - 2(1-c)\tau|\,\mu(d\tau), \text{ если } 0 < c < 1. \end{cases}$$

Ограничимся рассмотрением первого варианта (рассуждения для второго варианта аналогичны). Ясно, что $\mathrm{L}_2(T, \mu, R) \subset \mathrm{L}_1(T, \nu_-, R)$. Пусть $f(t) :=$ $:= (ct + (1-c)t^2)^2 + (c - (1-c)t)^2$, тогда $f(t) \neq 0 \ \forall\, t \in T$. Далее, в силу того, что T — компакт, имеем $\inf\{f(t) : t \in T\} > 0$, откуда $\mathrm{L}_2(T, \nu, R) = \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$, и значит, $\mathrm{L}_2(T, \mu, R) \subset \mathrm{L}_1(T, \nu_-, R)$ для любой константы $c \in (0, 1)$, определяющей точку $(x, u, 0)$. Следовательно, в силу теоремы 1 [7] данная точка $(x, u, 0)$ имеет дифференциальную реализацию (2).

Теперь покажем, рассуждая от противного, что пучок N не является ОЛД-совместимым: если существует (A, B)-модель $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot)) : T \to R \times R$ реализации $N_1 \cup N_2$, то она индуцирует равенства $1 + \alpha(t)t + \beta(t) = 0$ для N_1 и $2t + \alpha(t)t^2 - \beta(t)t = 0$ для N_2, откуда $(\alpha(\cdot), \beta(\cdot)) = (1.5t^{-1}, 0.5)$. Таким образом, функциональная (A, B)-модель реализации N не принадлежит классу $\mathrm{L}_2(T, \mu, R) \times \mathrm{L}_2(T, \mu, R)$.

Примем как исходную постановку $N_2 = \{(x_2(\cdot), u_2(\cdot), 0) : (x_2(t), u_2(t)) =$ $= (-t, 1),\ t \in T\}$. В данном случае N не будет РЛД-совместимым (хотя обыкновенные пласты над N такие же: Span N_1 и Span N_2); при этом любая тройка $(x, u, 0)$ из $\operatorname{co}(N)$, но не из $\operatorname{abs}\operatorname{co}(N)$, будет ОЛД-совместимой.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основное предназначение абстрактной теории дифференциальной реализации бихевиористических систем независимо от других свойств динамики рассматриваемых моделей — качественное изучение математического моделирования уравнений динамики исследуемых процессов и при этом поиск аналогии между явлениями, кажущимися далекими один от другого. В данном контексте укажем некоторые (предварительные) области применения структуры РЛД-совместимости в геометрической теории общих динамических систем [15, 21].

В варианте расширения определения 2 до положения, когда ступень k РЛД-совместимости определяется кардинальным числом, РЛД-совместимость приводит вне рамок континуум-гипотезы [22] либо к тривиальным предложениям при

$k = \text{Card}\ N$ (например, если пучок N счетный и РЛД-совместим ступени $k = \aleph_0$, то N имеет реализацию (2), аналогично для $k = \text{Card}\ N = \exp \aleph_0$), либо с учетом следствий 1, 2 теоремы 2 к новым[3] постановкам для $k < \text{Card}\ N \le \exp \aleph_0$; при этом общая философия и результаты подобны случаю, когда ступень k — натуральное число, но возможности шире, хотя в меньшей степени предсказуемы.

Полуаддитивность оператора Релея–Ритца находится в важной геометрической зависимости от леммы Тейхмюллера–Тьюки, а именно: в семействе процессов П существуют максимальные множества, на каждом из которых оператор (1) полуаддитивен с некоторым весом $p \ge 0$, при этом в случае $p \in (0, 1)$ такие множества динамических процессов нелинейные (вариант $E = \{0\} \subset \Pi$ исключаем); поэтому в теореме 1 вес полуаддитивности — некоторая постоянная $p \ge 1$. В данном контексте можно показать, что полуаддитивность с весом $p \ge 1$ оператора Релея–Ритца совместно с леммой Тейхмюллера–Тьюки приводят к следующему факту: если E — обыкновенный пласт из формулировки леммы 2, то в E найдется максимальное линейное множество, замкнутое в пространстве H_2, на котором оператор Релея–Ритца полуаддитивен с весом $p \ge 1$, что в конечном итоге делает геометрически корректной формулировку второй части теоремы 1; можно также ставить вопрос об определении веса полуаддитивности (согласно теореме 2 [23]).

Следствия 1, 2 теоремы 2 касательны реализации с позиционным управлением, т.е. можно говорить о реализации «однородной системы с законом $x \mapsto u^{\#}(x)$», поскольку любая $(A, 0, B^{\#})_2$-модель системы (2) приводит к эквивалентной структуре $(A + B^{\#} u^{\#}, 0, 0)$. В частности, если $u^{\#} \ne 0 \in L(X, Z)$ и оператор $u^{\#}$ непрерывно обратим, т.е. $u^{\#-1} \in L(X, Z)$, то, накладывая на оператор-функцию $B^{\#}$ структурную клаузулу $B^{\#} := (A^* - A) u^{\#-1}$, где $A^* \in \mathrm{L}_2(T, \mu, L(X, X))$ — оператор-функция модели реализации однородной системы, в отношении оператор-функции A можно делать любые предположения, не нарушающие $A \in \mathrm{L}_2(T, \mu, L(X, X))$, например, исследовать реализацию в предположении стационарности оператора A, не затрагивая общих результатов из [10, 24–26]. Однако условие $u^{\#-1} \notin L(Z, X)$ приводит к постановке, когда в $(A, 0, B^{\#})_2$-модели оператор-функция A фиксирована (т.е. динамика моделируемого объекта частично известна [12]) и надо определить оператор-функцию $B^{\#}$. Данную реализацию можно строить в контексте теоремы 3, используя аппарат расширения оператор-функций в рамках качественных результатов по теории M_2-продолжимости [8, 10].

Конструкции тензорного произведения пространства Фока [14, с. 68] и оператора Релея–Ритца позволяют на базе свойства универсальности [15, с. 40] тензорного произведения и результатов, подобных следствию 1 теоремы 3, использовать методы проективной геометрии для исследования реализации гиперболических систем [12, 27] с программно-позиционными регуляторами, имеющими полилинейную структуру [28, 29]. Можно полагать, что исследования в этом направлении станут основой новой общей геометрической теории нелинейной дифференциальной реализации сложных бесконечномерных динамических систем [5–12, 23–29].

[3]Вопрос о содержательности таких постановок непростой, однако ответ на него положителен. П. Коэн, доказавшей независимость континуум-гипотезы (КГ) и аксиомы выбора (равносильно — леммы Тейхмюллера–Тьюки) в системе аксиом теории множеств Цермело–Френкеля, полагал [22, с. 281]: «Точка зрения, которая, как предчувствует автор, может в конце концов стать принятой, состоит в том, что КГ является, *очевидно* ложной» (курсив автора). Мотивацией подобных рассуждений является положение, что РЛД-совместимость ступени k характеризуется тем, что любое k-мерное подпространство в $\text{Span}\ N$ имеет некоторую дифференциальную реализацию (2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую. *Прикладная математика и механика*. 1952. Т. XVI, № 6. С. 659–670.
2. Виллемс Я. От временного ряда к линейной системе. Теория систем. Математические методы и моделирование. Под ред. А.Н. Колмогорова, С.П. Новикова. Москва: Мир, 1989. С. 8–191.
3. Данеев А.В., Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. Нестационарная реализация Калмана–Месаровича в конструкциях оператора Релея–Ритца. *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 1. С. 82–90.
4. Daneev A.V., Lakeev A.V., Rusanov V.A., Rusanov M.V. On the theory of realization of strong differential models. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*. 2007. Vol. 1, N 3. P. 273–282.
5. Ahmed N.U. Optimization and identification of systems governed by evolution equations on Banach space. New York: John Wiley and Sons, 1988. 187 p.
6. Сергиенко И.В., Дейнека В.С. Идентификация параметров эллиптико-псевдопараболических распределенных систем. *Кибернетика и системный анализ*. 2011. № 4. С. 28–50.
7. Rusanov V.A., Antonova L.V., Daneev A.V. Inverse problem of nonlinear systems analysis: a behavioral approach. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. 2012. Vol. 10, N 2. P. 69–88.
8. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. Существование дифференциальной реализации динамической системы в банаховом пространстве в конструкциях расширений до M_p-операторов. *Дифференциальные уравнения*. 2013. Т. 49, N 3. С. 358–370.
9. Chen Y.A. New one-parameter inhomogeneous differential realization of the spl(2,1) superalgebra. *International Journal of Theoretical Physics.* 2012. Vol. 51, N 12. P. 3763–3768.
10. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.E. On the differential realization theory of nonlinear dynamic processes in hilbert space. *Far East Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 97, N 4. P. 495–532.
11. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. О расширении в гильбертовом пространстве дифференциальной реализации счетного пучка нелинейных процессов «вход-выход». *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 4. С. 121–126.
12. Rusanov V.A., Daneev A.V., Lakeev A.V., Linke Yu.E. On solvability of the identification-inverse problem for operator-functions of a nonlinear regulator of a nonstationary hyperbolic system. *Advances in Differential Equations and Control Processes*. 2015. Vol. 16, N 2. P. 71–84.
13. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология. Введение. Москва: Мир, 1977. 344 с.
14. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Том 1. Функциональный анализ. Москва: Мир, 1977. 360 с.
15. Кириллов А.А. Элементы теории представлений. Москва: Наука, 1978. 344 с.
16. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. Москва: Наука, 1977. 744 с.
17. Энгелькинг Р. Общая топология. Москва: Мир, 1986. 752 с.
18. Массера Х., Шеффер Х. Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства. Москва: Мир, 1970. 456 с.
19. Данеев А.В., Русанов В.А. Об одном классе сильных дифференциальных моделей над счетным множеством динамических процессов конечного характера. *Известия вузов. Математика*. 2000. № 2. С. 32–40.
20. Прасолов В.В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. Москва: МЦНМО, 2014. 360 с.
21. Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. Геометрическая теория управления. Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 392 с.
22. Коэн П.Дж. Теория множеств и континуум-гипотеза. Москва: Мир, 1969. 348 с.

23. Русанов В.А. Об одной алгебре множеств динамических процессов, обладающей дифференциальной реализацией в гильбертовом пространстве. *Докл. РАН*. 2010. Т. 433, № 6. С. 750–752.

24. Колмогоров А.Н. Кривые в гильбертовом пространстве, инвариантные по отношению к однопараметрической группе движений. Избранные труды. Том 1. Математика и механика. Москва: Наука, 2005. С. 296–300.

25. Воронов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А. Оценка точности в процессе юстировки матрицы идентификации. *Проблемы управления и информатики*. 2015. № 4. С. 16–26.

26. Русанов В.А., Лакеев А.В., Линке Ю.Э. К разрешимости дифференциальной реализации минимального динамического порядка семейства нелинейных процессов «вход-выход» в гильбертовом пространстве. *Дифференциальные уравнения*. 2015. Т. 51, № 4. С. 524–537.

27. Данеев А.В., Русанов В.А., Русанов М.В. От реализации Калмана–Месаровича к линейной модели нормально-гиперболического типа. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. № 6. С. 137–157.

28. Русанов В.А., Шарпинский Д.Ю. К теории структурной идентификации нелинейных многомерных систем. *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74, вып. 1. С. 119–132.

29. Лакеев А.В., Линке Ю.Э., Русанов В.А. К структурной идентификации нелинейного регулятора нестационарной гиперболической системы. *Докл. РАН*. 2016. Т. 468, № 2. С. 143–148.

Надійшла до редакції 14.11.2016.

В.А. Русанов, О.В. Данєєв, Ю.Е Лінке

ЩОДО ГЕОМЕТРИЧНИХ ОСНОВ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ У ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ

Анотація. У контексті якісної теорії реалізації нескінченновимірних динамічних систем наведено результати досліджень геометричних якостей сім'ї неперервних керованих динамічних процесів (відображень «вхід-вихід») у задачі розв'язності диференціальної реалізації цієї сім'ї у класі лінійних звичайних нестаціонарних диференціальних рівнянь у сепарабельному гільбертовому просторі.

Ключові слова: диференціальна реалізація, нестаціонарна $(A, B, B^{\#})_2$-модель, ЗЛД/РЛД-сумісність.

V.A. Rusanov, A.V. Daneev, Yu.E. Linke

TO THE GEOMETRICAL THEORY OF DIFFERENTIAL IMPLEMENTATION OF DYNAMIC PROCESSES IN A HILBERT SPACE

Abstract. In the context of the qualitative theory of implementation of infinite-dimensional dynamic systems, the authors demonstrate some results related to investigation of the geometrical properties of families of continuous control dynamic processes (“input–output” mappings) in the problem of solvability of this differential realization in a class of linear ordinary nonstationary differential equations in a separable Hilbert space.

Keywords: differential implementation, nonstationary $(A, B, B^{\#})_2$-model, OLD-compatibility, DLD-compatibility.

Русанов Вячеслав Анатольевич,
доктор физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова СО РАН, Иркутск, Россия, e-mail: v.rusanov@mail.ru.

Данеев Алексей Васильевич
доктор техн. наук, профессор Иркутского государственного университета путей сообщения; Иркутского национального исследовательского технического университета, Россия, e-mail: daneev@mail.ru.

Линке Юрий Эрниевич,
доктор физ.-мат. наук, профессор Иркутского национального исследовательского технического университета, Россия, e-mail: linkeyurij@gmail.com.