УДК 519.615

В.Ю. СЕМЕНОВ, Ю. ПРЕСТИН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСЛОВИЙ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ ВЕЙВЛЕТОВ, ОСНОВАННЫХ НА ПОЛИНОМАХ ЯКОБИ

Аннотация. Исследованы свойства вейвлетов, основанных на полиномах Якоби. Рассмотрены условия, при которых эти вейвлеты являются взаимно-ортогональными, а также условия, при которых базис вейвлетов характеризуется минимальным отношением Ритца. Эти задачи приводят к решению систем нелинейных уравнений с помощью метода, ранее предложенного авторами.

Ключевые слова: вейвлеты, полиномы Якоби, условия ортогональности, поиск корней.

ВВЕДЕНИЕ

Последние десятиления характеризуются развитием теории вейвлетов и ее практических приложений. Сфера применения вейвлетов расширяется вследствие их свойства описывать локальное поведение сигналов в различных временных масштабах, что позволяет их использовать для задач телекоммуникаций, геофизики, астрофизики, обработки аудио- и видеосигналов, биомедицины и т.д. [1].

Каждая практическая задача требует применения особого класса вейвлетов. В данной статье рассматривается важный класс вейвлетов — полиномиальные, основанные на полиномах Якоби. При проведении анализа использовалась теория ортогональных полиномов, представленная в работах [2, 3]. Целью данного исследования является получение ответов на следующие вопросы:

— при каких условиях рассматриваемые вейвлеты являются ортогональными?

— при каких параметрах вейвлетов достигается минимальное отношение Ритца?

Поиск ответов на эти вопросы приводит к решению систем нелинейных уравнений. Некоторые из полученных систем уравнений решаются предложенным авторами методом [4].

В разд. 1 даны предварительные сведения о полиномиальных вейвлетах, основанных на многочленах Якоби. Вопросы ортогональности и минимизации отношения Ритца рассмотрены в разд. 2 и 3 соответственно.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Следуя работе [2], используем определение полиномиального вейвлета n-го порядка:

$$\psi_{n,r}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n} P_k(t_r) P_k(x)$$

для некоторого фиксированного набора параметров $t_1, t_2, \dots, t_n$. Полином Якоби n-го порядка, зависящий от параметров α, β, определяется следующим образом:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \sum_{m=0}^{n} C_n^m \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} \left(\frac{x-1}{2}\right)^m, \tag{1}$$

где $\Gamma(\cdot)$ обозначена гамма-функция. Кроме того, полином (1) обычно нормируется множителем

$$K = \sqrt{\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+a+1)\Gamma(n+b+1)}{(2n+a+b+1)\Gamma(n+a+b+1)n!}}$$