УДК 517.977

И.С. РАППОПОРТ

МЕТОД РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ИГРОВЫХ ЗАДАЧ УПРАВЛЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Аннотация. Исследован метод разрешающих функций относительно игровых задач управления с интегральными ограничениями. Предложена схема метода, которая обеспечивает окончание игры за определенное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий. Показаны результаты сравнения гарантированных времен этой схемы метода разрешающих функций с первым прямым методом Понтрягина для интегральных ограничений.

Ключевые слова: линейная дифференциальная игра, интегральные ограничения, многозначное отображение, измеримый селектор, стробоскопическая стратегия.

ВВЕДЕНИЕ

Исследован подход к решению игровых задач управления динамическими процессами с интегральными ограничениями [1–4] применительно к общей схеме метода разрешающих функций [5, 6]. Согласно методике [7, 8] введены понятия верхней и нижней разрешающих функций двух типов и получены достаточные условия гарантированного результата в линейной дифференциальной игре с интегральными ограничениями в случае, когда условие М.С. Никольского [1] не имеет места. Предложены две схемы метода разрешающих функций, построены соответствующие стратегии управления и дано сравнение гарантированных времен.

Важной особенностью общей схемы метода разрешающих функций является использование при построении управляющего воздействия информации о поведении противника в прошлом. Причем эта информация необходима лишь для определения некоторого момента переключения, разделяющего активный и пассивный интервалы развития игры. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, определяемое стробоскопической стратегией Хайека [9]. Условия, при которых информация о предыстории противника не используется, найдены в [6, 10].

Одним из основных результатов настоящей работы является то, что для реализации гарантированного времени окончания линейной дифференциальной игры с интегральными ограничениями можно ограничиться лишь контруправлением без дополнительных условий.

В данной работе развиты идеи [1–11] и исследований [12–23], а также приведены новые возможности применения метода разрешающих функций к решению игровых задач управления.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, СХЕМА МЕТОДА

Рассмотрим конфликтно-управляемый процесс, эволюция которого описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\dot{z} = Az + Bu - Cv. \tag{1}$$

Здесь $z \in R^n$, $u \in R^m$, $v \in R^k$, $n \geq 1$, $m \geq 1$, $k \geq 1$; A, B, C — постоянные прямоугольные матрицы порядка $n \times n$, $n \times m$, $n \times k$ соответственно; u — управляющий параметр первого игрока; v — управляющий параметр второго игрока. Параметры u и v выбираются в виде измеримых функций $u = u(\cdot)$ и $v = v(\cdot)$ из класса $L_p[0, +\infty)$, $p > 1$, и удовлетворяют ограничениям

$$\int_0^\infty ||u(\tau)||^p \, d\tau \le \mu^p, \ \mu > 1, \tag{2}$$

$$\int_0^\infty ||v(\tau)||^p \, d\tau \le \nu^p, \ \nu > 1. \tag{3}$$

Такие управления будем называть допустимыми.

Кроме процесса (1), задано терминальное множество M^*, имеющее цилиндрический вид

$$M^* = M_0 + M, \tag{4}$$

где M_0 — линейное подпространство из R^n, а M — компакт из ортогонального дополнения L к подпространству M_0 в R^n.

Траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент $T = T(z_0)$, если по любой допустимой функции $v(t)$, $t \in [0, T]$, построить допустимую функцию

$$u(t) = u(t, z_0, v_t(\cdot)), \ t \in [0, T], \tag{5}$$

где $v_t(\cdot) = \{v(\tau), \tau \in [0, t]\}$, или допустимое контруправление

$$u(t) = u(t, z_0, v(\cdot)), \ t \in [0, T], \tag{6}$$

такие, что абсолютно непрерывное решение $z(t)$ задачи Коши $\dot{z} = Az + Bu(t) - Cv(t)$, $z(0) = z_0$, попадает на терминальное множество M^* в момент $T = T(z_0)$.

Пусть π — оператор ортогонального проектирования из R^n на подпространство L. Рассмотрим линейные отображения $\pi e^{tA} B_1 R^m \to L, \pi e^{tA} C R^k \to L, t \ge 0$, где B_1 — постоянная прямоугольная матрица порядка $n \times m$.

Условие 1. Пусть существует непрерывная неособая матрица $D(\cdot): R^k \to R^m$, которая является решением матричного уравнения $\pi e^{tA} B_1 X = \pi e^{tA} C$, где X — искомая матрица, B_1 — постоянная прямоугольная матрица порядка $n \times m$.

Рассмотрим функцию [1]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t ||\omega(\tau)||^p d\tau \le 1} \int_0^t ||D(t-\tau)\omega(\tau)||^p \, d\tau,$$

где $\omega(\cdot)$ — произвольная функция из пространства $L_p^k[0, \infty)$ с указанным ограничением, а $D(\cdot): R^k \to R^m$ — некоторая непрерывная неособая матрица, удовлетворяющая условию 1.

С помощью функции $\chi^p(t)$ определим величину [1] $\mathrm{X}^p = \sup_{0 \le t < \infty} \chi^p(t)$.

Условие 2. Справедливо неравенство $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}^p > 0$.

Пусть справедливы условия 1, 2 и $\gamma(\tau)$ — измеримая функция из класса $L_p^m[0, +\infty)$, $p > 1$, которая удовлетворяет ограничению $\int_0^\infty ||\gamma(\tau)||^p \, d\tau \le \hat{\gamma}$. Следуя [7, 8], будем ее называть функцией сдвига. Зафиксируем некоторую функцию сдвига $\gamma(\tau)$ и положим

$$\xi(t)=\xi(t, z_0, \gamma(\cdot))=\pi e^{tA} z_0+\int_0^t \pi e^{(t-\tau)A} B\gamma(\tau)d\tau.$$

Обозначим

$$U(t,\tau,\upsilon,\alpha)=\left\{ u\in R^m : ||u|| \le (||D(t-\tau)\upsilon||^p+\alpha\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}} \right\},$$

где $(t,\tau)\in\Delta=\{(t,\tau): 0\le\tau\le t<\infty\}$, $\upsilon\in R^k$, $\alpha\ge 0$. Отображение $U(t,\tau,\upsilon,\alpha)$ является выпуклозначным компактнозначным многозначным отображением [24].

Рассмотрим для $(t,\tau)\in\Delta$, $\upsilon\in R^k$, $z_0\in R^n$ многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0)=\{\alpha\ge 0 : [\pi e^{(t-\tau)A} B[U(t,\tau,\upsilon,\alpha)-\gamma(\tau)]-$$

$$-\pi e^{(t-\tau)A} C\upsilon]\bigcap \alpha[M-\xi(t]\neq\varnothing\}. \tag{7}$$

Условие 3. Для некоторого начального положения $z_0\in R^n$ и функции сдвига $\gamma(\cdot)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0)$ принимает непустые значения на множестве $\Delta\times R^k$.

Если это условие выполнено, то по аналогии с [7, 8] введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции

$$\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)=\sup\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0)\},\ \alpha_*(t,\tau,\upsilon,z_0)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0)\},$$

где $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in R^k$, $z_0\in R^n$. Можно показать [6], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon,z_0)$ замкнутозначное, $L\otimes B$-измеримое по совокупности (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in R^k$, а верхняя и нижняя разрешающие функции $L\otimes B$-измеримые по совокупности (τ,υ), $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in R^k$. Поэтому они суперпозиционно измеримы [6], т.е. $\alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau),z_0)$ и $\alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau),z_0)$ измеримы по τ, $\tau\in[0,t]$, при любой допустимой функции $\upsilon(\cdot)$, для которой выполняется ограничение (3). Отметим также, что верхняя разрешающая функция полунепрерывна сверху, а нижняя — полунепрерывна снизу по переменной υ.

Рассмотрим множество

$$T(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{ t\ge 0 : \inf_{\int_0^t ||\upsilon(\tau)||^p d\tau\le\nu^p} \int_0^t \alpha^*(t,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau\ge 1, \right.$$

$$\left. \sup_{\int_0^t ||\upsilon(\tau)||^p d\tau\le\nu^p} \int_0^t \alpha_*(t,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau<1 \right\}. \tag{8}$$

Если при некотором $t>0$ верхняя рарешающая функция $\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in R^k$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (8) естественно положить равным $+\infty$ и $t\in T(z_0,\gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (8) . В случае, когда неравенства в соотношении (8) не выполняются при всех $t>0$, положим $T(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1–3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $T(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, а $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент T с использованием допустимого управления вида (5).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим вначале случай $\xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$ и введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau - \int_t^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau, \ t \in [0, T].$$

Функции $\alpha^*(T, \tau, v, z_0)$ и $\alpha_*(T, \tau, v, z_0)$ $L \otimes B$-измеримы по совокупности (τ, v), $\tau \in [0, T]$, $v \in R^k$, и поэтому они суперпозиционно измеримы, т.е. функции $\alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0)$ и $\alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0)$ измеримы по τ, $\tau \in [0, T]$.

По определению T имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \ge 1 - \sup_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \le v^p} \int_0^T \alpha_*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \le 1 - \inf_{\int_0^T \|v(\tau)\|^p d\tau \le v^p} \int_0^T \alpha^*(T, \tau, v(\tau), z_0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, T]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначное отображение при $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$

$$U(\tau, v) = \{u \in U(T, \tau, v, \alpha(T, \tau, v, z_0)):$$
$$\pi e^{(T-\tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(T-\tau)A} Cv \in \alpha(T, \tau, v, z_0)[M - \xi(T)]\}, \tag{9}$$

где
$$\alpha(T, \tau, v, z_0) = \begin{cases} \alpha^*(T, \tau, v, z_0), & 0 \le \tau \le t_*, \\ \alpha_*(T, \tau, v, z_0), & t_* < \tau \le T. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхней $\alpha^*(T, \tau, v, z_0)$ и нижней $\alpha_*(T, \tau, v, z_0)$ разрешающих функций отображение $U(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [6] и компактнозначно при $v \in R^k$, $\tau \in [0, T]$.

В работе [25] А.Ф. Филиппов впервые ввел понятие лексикографического максимума по ортогональному базису $e_1, \ldots, e_n$ от компакта $A \in K(R^n)$ по следующей формуле:

$$\operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_n} A = \bigcap_{k=0}^n A_k,$$

где $A_0 = A$, $A_k = \{x \in A_{k-1} : (x, e_k) = c(A_{k-1}, \psi)\}$, $c(A_{k-1}, \psi)$ — опорная функция множества A_{k-1} [24], $k = 1, \ldots, n$. Множество $\operatorname*{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_n} A$ состоит из одной точки, принадлежащей множеству крайних точек выпуклой оболочки множества A.

При этом если выбрать многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ и ортогональный базис, такой что $e_1 = \psi$, $\psi \in R^m$, $\psi \neq 0$, то выполняется равенство $(\operatorname{lex}\max\limits_{e_1, \ldots, e_m} U(\tau, \upsilon), \psi) = c(U(\tau, \upsilon), \psi)$ [26]. Поэтому в силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение $U(\tau, \upsilon)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u(\tau, \upsilon) = \operatorname{lex}\max\limits_{e_1, \ldots, e_m} U(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и $\|u(\tau, \upsilon)\| = (\|D(T-\tau)\upsilon\|^p + \alpha(T, \tau, \upsilon, z_0)\hat{\gamma})^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, T]$, $\upsilon \in R^k$. Положим управление первого игрока $u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(T) = \xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^T \pi e^{(T-\tau)A} [B[u(\tau) - \gamma(\tau)] - C\upsilon(\tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (9) получим

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau =$$

$$= \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau - \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau\right] +$$

$$+ \int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) M d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) M d\tau =$$

$$= \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau\right] M = M.$$

Таким образом, $z(T) \in M^*$ и осталось показать допустимость управления $u(\tau) = u(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^T \|u(\tau)\|^p \, d\tau = \int_0^T \|D(T-\tau)\upsilon(\tau)\|^p \, d\tau + \hat{\gamma}\left[\int_0^{t_*} \alpha^*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{t_*}^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau\right] \le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Для случая $\xi(T, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$ управление первого игрока на всем промежутке $[0, T]$ выберем в виде измеримой функции $u(\tau) = u_*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, T]$, где $u_*(\tau, \upsilon) = \operatorname{lex}\max\limits_{e_1, \ldots, e_m} U(\tau, \upsilon)$ является $L \otimes B$-измеримым селектором отображения $U(\tau, \upsilon)$ соотношения (9) с разрешающей функцией $\alpha(T, \tau, \upsilon, z_0) = \alpha_*(T, \tau, \upsilon, z_0)$ на всем промежутке $[0, T]$. Тогда с учетом аппарата опорных функций [24] соотношения (9) дают

$$\pi z(T) \in \xi(T) + \int_0^T \alpha_*(T, \tau, \upsilon(\tau), z_0)[M - \xi(T)] d\tau \subset M,$$

поскольку по предположению $c(M-\xi(T))\ge 0$, а

$$\int_0^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau \le \sup_{\int_0^T \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p} \int_0^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau<1.$$

Поэтому $\pi z(T)\in M$ и, следовательно, $z(T)\in M^*$.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (8) и (9), имеем

$$\int_0^T ||u(\tau)||^p\ d\tau=\int_0^T ||D(T-\tau)\upsilon(\tau)||^p\ d\tau+\hat{\gamma}\int_0^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau\le$$

$$\le\nu^p \mathrm{X}^p+\hat{\gamma}\sup_{\int_0^t \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^T \alpha_*(T,\tau,\upsilon(\tau),z_0)d\tau<\nu^p\mathrm{X}^p+\hat{\gamma}=\mu^p.$$

Теорема полностью доказана.

СХЕМА МЕТОДА ДЛЯ КЛАССА СТРОБОСКОПИЧЕСКИХ СТРАТЕГИЙ

Из доказательства теоремы 1 видно, что преследователь в момент t использует информацию о $\upsilon_t(\cdot)$, причем она необходима лишь для определения момента переключения t_*, который разделяет активный и пассивный интервалы. На самих интервалах преследователь применяет контруправление, которое определяется стробоскопической стратегией. В приведенной далее теореме 2 показано, что для реализации гарантированного времени теоремы 1 можно ограничиться контруправлением.

Положим $\alpha^*(t,\tau,z_0)=\inf_{\upsilon\in R^k}\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)$, $\alpha_*(t,\tau,z_0)=\sup_{\upsilon\in R^k}\alpha_*(t,\tau,\upsilon,z_0)$, $\tau\in[0,t]$, $z_0\in R^n$.

Лемма 1. Функции $\alpha^*(t,\tau,z_0)$ и $\alpha_*(t,\tau,z_0)$ являются измеримыми по τ, $\tau\in[0,t]$.

Доказательство. Рассмотрим для каждого $\varepsilon\in R^1$ и $\tau\in[0,t]$ многозначное отображение $G_\varepsilon^*(\tau)=\{\upsilon\in R^k:\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)<\varepsilon\}$, которое имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $\upsilon\in R^k$ функции $\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)$ при любом $\tau\in[0,t]$. График этого отображения $\mathrm{gr}\,G_\varepsilon^*(\tau)=\{(\tau,\upsilon):\upsilon\in G_\varepsilon^*(\tau),\ \tau\in[0,t]\}$ будет $L\otimes B$-измеримым по совокупности (τ,υ), $\upsilon\in R^k$, $\tau\in[0,t]$, для любого t, поскольку функция $\alpha^*(t,\tau,\upsilon,z_0)$ $L\otimes B$-измерима по совокупности (τ,υ) [6]. Тогда по теореме об измеримости проекции [27] множество $\{\tau\in[0,t]:(\tau,\upsilon)\in\mathrm{gr}\,G_\varepsilon^*(\tau)$ для некоторого $\upsilon\in G_\varepsilon^*(\tau)\}$ будет L-измеримо.

Пусть Q — счетное плотное множество в R^k [28]. Для любого $\varepsilon\in R^1$ имеем

$$\{\tau\in[0,t]:\alpha^*(t,\tau,z_0)<\varepsilon\}=\{\tau\in[0,t]:G_\varepsilon^*(\tau)\ne\varnothing\}=$$

$$=\{\tau\in[0,t]:(\tau,\upsilon)\in\mathrm{gr}\,G_\varepsilon^*(\tau)\ \text{для некоторого}\ \upsilon\in G_\varepsilon^*(\tau)\}=$$

$$=\{\tau\in[0,t]:(\tau,q)\in\mathrm{gr}\,G_\varepsilon^*(\tau)\ \text{для некоторого}\ q\in G_\varepsilon^*(\tau)\cap Q\}=$$

$$=\bigcup_{q\in G_\varepsilon^*(\tau)\bigcap Q}\{\tau\in[0,t]:(\tau,q)\in\mathrm{gr}\,G_\varepsilon^*(\tau)\}.$$

Однако, как отмечалось ранее, множество $\{\tau \in [0, t] : (\tau, q) \in \operatorname{gr} G_\varepsilon^*(\tau)$ для некоторого $q \in G_\varepsilon^*(\tau) \cap Q\}$ измеримо и поэтому функция $\alpha^*(t, \tau, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0)$ является измеримой по τ функцией. Аналогично можно доказать измеримость функции $\alpha_*(t, \tau, z_0) = \sup_{v \in R^k} \alpha_*(t, \tau, v, z_0)$.

Рассмотрим множество

$$\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \ge 0 : \int_0^t \alpha^*(t, \tau, z_0) d\tau \ge 1, \quad \int_0^t \alpha_*(t, \tau, z_0) d\tau < 1 \right\}. \qquad (10)$$

В силу леммы 1 функции $\alpha^*(t, \tau, z_0)$ и $\alpha_*(t, \tau, z_0)$ являются измеримыми по τ, $\tau \in [0, t]$. Если при некотором $t > 0$ функция $\alpha^*(t, \tau, z_0) \equiv +\infty$ для $\tau \in [0, t]$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках соотношения (10) естественно положить равным $+\infty$ и $t \in \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках соотношения (10). В случае, когда неравенства в соотношении (10) не выполняются при всех $t > 0$, положим $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \varnothing$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1–3 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, а $\widehat{T} \in \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент $\widehat{T}$ с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Положим $\alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)$, $\alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) = \sup_{v \in R^k} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, v, z_0)$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$, $z_0 \in R^n$, и рассмотрим вначале случай $\xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$.

Введем контрольную функцию

$$h(t) = 1 - \int_0^t \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau - \int_t^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau, \quad t \in [0, \widehat{T}].$$

По определению $\widehat{T}$ имеем

$$h(0) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau > 0, \quad h(\widehat{T}) = 1 - \int_0^{\widehat{T}} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \le 0.$$

Поэтому в силу непрерывности функции $h(t)$ существует такой момент времени t_*, $t_* \in (0, \widehat{T}]$, что $h(t_*) = 0$. Отметим, что момент переключения t_* не зависит от предыстории управления второго игрока $v_{t_*}(\cdot) = \{v(s) : s \in [0, t_*]\}$.

Рассмотрим многозначное отображение при $v \in R^k$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$

$$\widehat{U}(\tau, v) = \{u \in U(\widehat{T}, \tau, v, \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0)) :$$

$$\pi e^{(\widehat{T} - \tau)A} B[u - \gamma(\tau)] - \pi e^{(\widehat{T} - \tau)A} Cv \in \alpha(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})]\}, \qquad (11)$$

где

$$\alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) = \begin{cases} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0), & 0 \le \tau \le t_*, \\ \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0), & t_* < \tau \le \widehat{T}. \end{cases}$$

В силу свойств параметров процесса (1), верхней $\alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0)$ и нижней $\alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)$ разрешающих функций отображение $\widehat{U}(\tau, v)$ $L \otimes B$-измеримо [6] при $v \in R^k$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$. В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение $\widehat{U}(\tau, v)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $\widehat{u}(\tau, v) = \underset{e_1, \ldots, e_m}{\text{lex max}}\, \widehat{U}(\tau, v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и $||\widehat{u}(\tau, v)|| = \left(||D(\widehat{T} - \tau)v||^p + \alpha(\widehat{T}, \tau, v, z_0)\hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$, $v \in R^k$. Положим управление первого игрока $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(\widehat{T}) = \xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^{\widehat{T}} \pi e^{(\widehat{T} - \tau)A} [B[\widehat{u}(\tau) - \gamma(\tau)] - Cv(\tau)] d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (11) получим

$$\pi z(\widehat{T}) \in \xi(\widehat{T}) + \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau =$$

$$= \xi(\widehat{T}) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau - \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] + \int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) M d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) M d\tau = \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] M = M.$$

Таким образом, $z(\widehat{T}) \in M^*$ и осталось показать допустимость управления $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$. По построению справедливы соотношения

$$\int_0^{\widehat{T}} ||\widehat{u}(\tau)||^p \, d\tau = \int_0^{\widehat{T}} ||D(\widehat{T} - \tau)v(\tau)||^p \, d\tau +$$

$$+ \hat{\gamma} \left[\int_0^{t_*} \alpha^*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau + \int_{t_*}^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0) d\tau \right] \le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Для случая $\xi(\widehat{T}, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$ управление первого игрока на всем промежутке $[0, \widehat{T}]$ выберем в виде измеримой функции $\widehat{u}(\tau) = \widehat{u}_*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0, \widehat{T}]$, где $\widehat{u}_*(\tau, v) = \underset{e_1, \ldots, e_n}{\text{lex max}}\, \widehat{U}(\tau, v)$ является $L \otimes B$-измеримым селектором отображения $\widehat{U}(\tau, v)$ соотношения (11) с разрешающей функцией $\alpha(\widehat{T}, \tau, z_0) = \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)$ на всем промежутке $[0, \widehat{T}]$. Тогда соотношения (11) дают

$$\pi z(\widehat{T}) \in \xi(\widehat{T}) + \int_0^{\widehat{T}} \alpha_*(\widehat{T}, \tau, z_0)[M - \xi(\widehat{T})] d\tau.$$

Поскольку по предположению $c(M-\xi(\widehat{T}),\psi)\geq 0$, а по определению момента $\widehat{T}$ $\int_0^{\widehat{T}}\alpha_*(\widehat{T},\tau,z_0)d\tau<1$, применив аппарат опорных функций, получим $\xi(\widehat{T})+\int_0^{\widehat{T}}\alpha_*(\widehat{T},\tau,z_0)[M-\xi(\widehat{T})]d\tau\subset M$. Поэтому $\pi z(\widehat{T})\in M$ и, следовательно, $z(\widehat{T})\in M^*$.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (10) и (11), имеем

$$\int_0^{\widehat{T}}||u(\tau)||^p\, d\tau=\int_0^{\widehat{T}}||D(\widehat{T}-\tau)v(\tau)||^p\, d\tau+\hat{\gamma}\int_0^{\widehat{T}}\alpha_*(\widehat{T},\tau,z_0)d\tau<\nu^p\mathrm{X}^p+\hat{\gamma}=\mu^p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Рассмотрим многозначное отображение

$$\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)=\bigcap_{v\in R^k}\mathfrak{A}(t,\tau,v,z_0),\ (t,\tau)\in\Delta,\ z_0\in R^n.$$

Условие 4. Для некоторого начального положения $z_0\in R^n$ и функции сдвига $\gamma(\cdot)$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ принимает непустые значения на множестве Δ.

Если это условие выполнено, то, следуя [7, 8] , введем верхнюю и нижнюю разрешающие функции второго типа

$$\beta^*(t,\tau,z_0)=\sup\{\beta:\beta\in\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)\},$$

$$\beta_*(t,\tau,z_0)=\inf\{\beta:\beta\in\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)\},\ (t,\tau)\in\Delta,\ z_0\in R^n.$$

Можно показать [6], что многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ является замкнутозначным, измеримым по τ, а верхняя и нижняя разрешающие функции измеримы по переменной τ при фиксированном t.

Рассмотрим множество

$$\Theta(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\geq 0:\int_0^t\beta^*(t,\tau,z_0)d\tau\geq 1,\ \int_0^t\beta_*(t,\tau,z_0)d\tau<1\right\}.$$

Если при некотором $t>0$ верхняя разрешающая функция $\beta^*(t,\tau,z_0)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, то значение соответствующего интеграла в фигурных скобках естественно положить равным $+\infty$ и $t\in\Theta(z_0,\gamma(\cdot))$, если для этого t справедливо другое неравенство в фигурных скобках. В случае, когда неравенства в фигурных скобках не выполняются при всех $t>0$, положим $\Theta(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия 1, 2, 4 и для соответствующей функции сдвига $\gamma(\cdot)$ множество $\Theta(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто, а $\Theta\in\Theta(z_0,\gamma(\cdot))$. Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0\in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент Θ с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство. Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Положим $\beta(\Theta,\tau,z_0)=\dfrac{1}{\int\limits_0^{\Theta}\beta^*(\Theta,\tau,z_0)d\tau}\beta^*(\Theta,\tau,z_0)$, $\tau\in[0,\Theta]$, $z_0\in R^n$, и рассмотрим вначале случай $\xi(\Theta,\ z_0,\gamma(\cdot))\notin M$.

Поскольку $\int\limits_0^{\Theta}\beta^*(\Theta,\tau,z_0)d\tau\geq 1$, то $\beta(\Theta,\tau,z_0)\leq\beta^*(\Theta,\tau,z_0)$, $\tau\in[0,\Theta]$, $z_0\in R^n$.

В силу условия $\int\limits_0^{\Theta}\beta_*(\Theta,\tau,z_0)d\tau<1$ получим $\beta(\Theta,\tau,z_0)>\beta_*(\Theta,\tau,z_0)$, $\tau\in[0,\Theta]$, $z_0\in R^n$. Действительно, предположим, что $\beta(\Theta,\tau,z_0)\leq\beta^*(\Theta,\tau,z_0)$. Тогда имеем $1=\int\limits_0^{\Theta}\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau\leq\int\limits_0^{\Theta}\beta_*(\Theta,\tau,z_0)d\tau$, что противоречит определению момента времени Θ.

Таким образом, $\beta(\Theta,\tau,z_0)\in\mathfrak{A}(\Theta,\tau,z_0)$, $\tau\in[0,\Theta]$, $z_0\in R^n$.

Рассмотрим многозначное отображение $\upsilon\in R^k$, $\tau\in[0,\Theta]$

$$\underset{\frown}{U}(\tau,\upsilon)=\{u\in U(\Theta,\tau,\upsilon,\beta(\Theta,\tau,z_0)):$$
$$\pi e^{(\Theta-\tau)A}B[u-\gamma(\tau)]-\pi e^{(\Theta-\tau)A}C\upsilon\in\beta(\Theta,\tau,z_0)[M-\xi(\widehat{T})]\}. \qquad (12)$$

Как и ранее, отображение $\underset{\frown}{U}(\tau,\upsilon)$ компактнозначно и $L\otimes B$-измеримо [6] при $\upsilon\in R^k$, $\tau\in[0,\Theta]$. В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение $\underset{\frown}{U}(\tau,\upsilon)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $\underset{\frown}{u}(\tau,\upsilon)=\operatorname{lex}\max\limits_{e_1,\ldots,e_m}\underset{\frown}{U}(\tau,\upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и

$$\|\underset{\frown}{u}(\tau,\upsilon)\|=\left(\|D(\Theta-\tau)\upsilon\|^p+\beta(\Theta,\tau,\upsilon,z_0)\hat{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}},\ \tau\in[0,\Theta],\ \upsilon\in R^k.$$

Положим управление первого игрока равным $u(\tau)=\underset{\frown}{u}(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$.

Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях имеем

$$\pi z(\Theta)=\xi(\Theta,z_0,\gamma(\cdot))+\int\limits_0^{\Theta}\pi e^{(\Theta-\tau)A}[B[\underset{\frown}{u}(\tau)-\gamma(\tau)]-C\upsilon(\tau)]d\tau.$$

Тогда с учетом соотношения (12) получим

$$\pi z(\Theta)\in\xi(\Theta,z_0,\gamma(\cdot)\left[1-\int\limits_0^{\Theta}\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau\right]+\int\limits_0^{\Theta}\beta(\Theta,\tau,z_0)Md\tau.$$

Так как M — выпуклый комапакт, а $\beta(\Theta,\tau,z_0)\geq 0$, $\tau\in[0,\Theta]$, и $\int\limits_0^{\Theta}\beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau=1$, то $\int\limits_0^{\Theta}\beta(\Theta,\tau,z_0)Md\tau=M$. Поэтому $\pi z(\Theta)\in M$, $z(\Theta)\in M^*$ и осталось показать допустимость управления $u(\tau)=\underset{\frown}{u}(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\Theta]$.

По построению справедливы соотношения

$$\int_0^\Theta ||\underset{\frown}{u}(\tau)||^p\, d\tau = \int_0^\Theta ||D(\Theta-\tau)v(\tau)||^p\, d\tau + \hat{\gamma}\int_0^\Theta \beta(\Theta,\tau,z_0)d\tau \le \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Для случая $\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \in M$ управление первого игрока на всем промежутке $[0,\Theta]$ выберем в виде измеримой функции $\underset{\frown}{u}(\tau) = \underset{\frown}{u}_*(\tau, v(\tau))$, $\tau \in [0,\Theta]$, где $\underset{\frown}{u}_*(\tau, v) = \operatorname{lex\,max}_{e_1,\ldots,e_m} \underset{\frown}{U}(\tau, v)$ является $L \otimes B$-измеримым селектором отображения $\underset{\frown}{U}(\tau, v)$ соотношения (12) с разрешающей функцией $\beta(\Theta,\tau,z_0) = \beta_*(\Theta,\tau,z_0)$ на всем промежутке $[0,\Theta]$. Тогда соотношения (12) дают

$$\pi z(\Theta) \in \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) + \int_0^\Theta \beta_*(\Theta,\tau,z_0)[M - \xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot))]d\tau.$$

Поскольку по предположению $c(M - \xi(\Theta), \psi) \ge 0$, а по определению момента Θ $\int_0^\Theta \beta_*(\Theta,\tau,z_0)d\tau < 1$, применив аппарат опорных функций, получим $\xi(\Theta) + \int_0^\Theta \beta_*(\Theta,\tau,z_0)[M - \xi(\Theta)]d\tau \subset M$. Поэтому $\pi z(\Theta) \in M$ и, следовательно, $z(\Theta) \in M^*$.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^\Theta ||u(\tau)||^p\, d\tau = \int_0^\Theta ||D(\Theta-\tau)v(\tau)||^p\, d\tau + \hat{\gamma}\int_0^\Theta \beta_*(\Theta,\tau,z_0)d\tau < \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что если выполнены условия 1, 2, 4, то для некоторого начального положения $z_0 \in R^n$ многозначное отображение $\mathfrak{A}(t,\tau,z_0)$ принимает непустые выпуклые значения на множестве Δ и $\alpha_*(t,\tau,z_0) = \beta_*(t,\tau,z_0)$. Если к тому же при некотором $t > 0$ $\xi(\Theta, z_0, \gamma(\cdot)) \notin M$, то $\alpha^*(t,\tau,z_0) = \beta^*(t,\tau,z_0)$. Поэтому, если множество $\widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто, множество $\Theta(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто и они совпадают.

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Обозначим $\operatorname{epi}\alpha^*(t,\tau,v,z_0) = \{(\tau,\mu) \in [0,t] \times R^1 : \alpha^*(t,\tau,v,z_0) \le \mu\}$ надграфик функции $\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ [28]. Функция $\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ называется замыканием овыпуклення функции $\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$, если $\operatorname{epi}\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0) = \overline{\operatorname{co}}\operatorname{epi}\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ [24, 27, 28]. При этом справедливо неравенство $\alpha^*(t,\tau,v,z_0) \ge \overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ при всех $t \ge \tau \ge 0$, $v \in V$. Заметим, что поскольку функция $\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ является при каждом $\tau \in [0,t]$ по $v \in R^k$ полунепрерывной сверху [5], такой же будет и функция $\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$. По определению функция $\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ при каждом $\tau \in [0,t]$ по $v \in R^k$ является полунепрерывной снизу [28] и поэтому функция $\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ по $v \in R^k$ будет непрерывной. Такие функции называют функциями Каратеодори [27] и они имеют ряд полезных свойств. Таким образом, с каждой разрешающей функцией можно связать некоторую функцию Каратеодори и провести с ней соответствующие выкладки метода разрешающих функций. При этом, как показывает следующая лемма, гарантированное время окончания игры не изменится.

Банахово пространство измеримых по Лебегу отображений $v(\cdot)$ отрезка $[0, t]$ в R^k, для которых интеграл $\int_0^t ||v(\tau)||^p \, d\tau$ конечен, при $1 \le p < \infty$ обозначается $L_p^k[0, t]$. Положим $\delta = \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau.$

Лемма 2. Если $\int_0^t \alpha^*(t, \tau, v_1(\tau), z_0) d\tau < +\infty$ по крайней мере для одной функции $v_1(\cdot) \in L_p^k[0, t]$, то справедливо равенство

$$\delta = \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\, \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau. \tag{13}$$

Доказательство. Ясно, что имеет место неравенство

$$\delta \ge \inf_{v(\cdot) \in L_p^k[0, t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\, \alpha^*(t, \tau, v(\tau), z_0) d\tau. \tag{14}$$

Пусть в соотношении (14) имеет место строгое неравенство. Тогда существует суммируемая функция $\delta_0(\tau)$ такая, что

$$\delta > \int_0^t \delta_0(\tau) d\tau, \tag{15}$$

и для некоторой функции $v_0(\cdot)$, $v_0(\cdot) \in L_p^k[0, t]$, при почти всех $\tau \in [0, t]$ имеем

$$\delta_0(\tau) > \overline{\text{co}}\, \alpha^*(t, \tau, v_0(\tau), z_0). \tag{16}$$

Заметим, что

$$\overline{\text{co}}\, \alpha^*(t, \tau, v_0(\tau), z_0) \ge \inf_{v \in R^k} \overline{\text{co}}\, \alpha^*(t, \tau, v, z_0) = \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0). \tag{17}$$

Поэтому соотношения (16), (17) при почти всех $\tau \in [0, t]$ дают

$$\delta_0(\tau) > \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t, \tau, v, z_0). \tag{18}$$

Рассмотрим многозначное отображение

$$G^*_{\delta_0(\tau)}(t, \tau) = \{v \in R^k : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) < \delta_0(\tau)\}.$$

Соотношение (18) гарантирует, что $G^*_{\delta_0(\tau)}(t, \tau) \ne \varnothing$. Многозначное отображение $G^*_{\delta_0(\tau)}(t, \tau) = \{v \in R^k : \alpha^*(t, \tau, v, z_0) < \varepsilon\}$, $\tau \in [0, t]$, имеет открытые значения в силу полунепрерывности сверху по $v \in R^k$ функции $\alpha^*(t, \tau, v, z_0)$ при любом $\tau \in [0, t]$. График этого отображения $\operatorname{gr} G^*_{\delta_0(\tau)}(t,\tau)$ будет $L \otimes B$-измеримым по совокупности (τ, v), $v \in R^k$, $\tau \in [0, t]$, для любого t, поскольку функция $\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ $L \otimes B$-измерима по совокупности (τ, v) [6]. Тогда по теореме об измеримости проекции [27] для каждого $v \in R^k$ множество $\{\tau \in [0, t] : (\tau, v) \in \operatorname{gr} G^*_{\delta_0(\tau)}(t,\tau)\}$ будет L-измеримо. В силу предложения 4 [28, § 8.1] многозначное отображение $G^*_{\delta_0(\tau)}(t,\tau)$ измеримо и по теореме измеримого выбора [28, § 8.1] имеет измеримый селектор. Пусть $v_2(\tau)$ — произвольный измеримый селектор многозначного отоборажения $G^*_{\delta_0(\tau)}(t,\tau)$. Тогда получим

$$\alpha^*(t,\tau,v_2(\tau),z_0) < \delta_0(\tau),\ \tau \in [0, t]. \tag{19}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число $N > 0$ столь большим, что мера множества $T_N = \{\tau \in [0, t] : ||v_2(\tau)|| > N\}$ меньше ε. Положим

$$\rho(\tau) = \begin{cases} \delta_0(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t],\ \tau \notin T_N, \\ \max\{\delta_0(\tau), \alpha^*(t,\tau,v_1(\tau),z_0)\}, & \text{если } \tau \in T_N. \end{cases}$$

Суммируемая функция $\rho(\tau)$ в силу (15) удовлетворяет неравенству

$$\delta > \int_0^t \rho(\tau)\,d\tau. \tag{20}$$

Полагая

$$v(\tau) = \begin{cases} v_2(\tau), & \text{если } \tau \in [0, t],\ \tau \notin T_N, \\ v_1(\tau), & \text{если } \tau \in T_N, \end{cases}$$

имеем $v(\cdot) \in L_p^k[0, t]$, и согласно (19)

$$\int_0^t \alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)\,d\tau < \int_0^t \rho(\tau)\,d\tau. \tag{21}$$

Неравенства (20) и (21) дают

$$\delta > \int_0^t \rho(\tau)\,d\tau > \int_0^t \alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)\,d\tau \geq \delta.$$

Полученное противоречие показывает, что в соотношении (14) имеет место равенство.

Следствие 1. Если $\int_0^t \alpha^*(t,\tau,v_1(\tau),z_0)\,d\tau < +\infty$ по крайней мере для одной функции $v_1(\cdot) \in L_p^k[0, t]$, то имеет место равенство

$$\delta = \int_0^t \inf_{v \in R^k} \alpha^*(t,\tau,v,z_0)\,d\tau.$$

Доказательство. Поскольку $\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ является функцией Каратеодори, ее надграфик $\operatorname{epi}\overline{\operatorname{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ является измеримым замкнутозначным многозначным отображением и поэтому в силу предложения 2 [28, § 8.3] справедливо равенство

$$\int_0^t \inf_{v\in R^k} \overline{\text{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0)d\tau = \inf_{v(\cdot)\in L_p^k[0,t]} \int_0^t \overline{\text{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v(\tau),z_0)d\tau.$$

Теперь с учетом соотношения $\inf\limits_{v\in R^k} \overline{\text{co}}\,\alpha^*(t,\tau,v,z_0) = \inf\limits_{v\in R^k} \alpha^*(t,\tau,v,z_0)$ равенство (13) дает требуемый результат.

Следствие 1 леммы 2 показывает, что множества $T(z_0,\gamma(\cdot))$ и $\widehat{T}(z_0,\gamma(\cdot))$ совпадают. Поэтому в силу теоремы 2 можно усилить теорему 1 и вместо квазистратегии (5) применить стробоскопическую стратегию (6).

СРАВНЕНИЕ ГАРАНТИРОВАННЫХ ВРЕМЕН

Рассмотрим линейные отображения $\pi e^{tA}BR^m \to L$, $\pi e^{tA}CR^k \to L$, $t\ge 0$.

Условие 5. Пусть существует непрерывная неособая матрица $\Phi(\cdot): R^k \to \to R^m$, являющаяся решением матричного уравнения $\pi e^{tA}BX = \pi e^{tA}C$, где X — искомая матрица.

Как и ранее, рассмотрим функцию [1]

$$\chi^p(t) = \sup_{\int_0^t \|\omega(\tau)\|^p d\tau \le 1} \int_0^t \|\Phi(t-\tau)\omega(\tau)\|^p \, d\tau,$$

где $\omega(\cdot)$ — произвольная функция из пространства $L_p^k[0,t)$ с указанным ограничением, и определим величину $\mathrm{X}^p = \sup\limits_{0\le t<\infty} \chi^p(t)$.

Условие 6. Справедливо неравенство $\hat{\gamma} = \mu^p - \nu^p \mathrm{X}^p \ge 0$.

Пусть справедливы условия 5, 6. Рассмотрим многозначное отображение $W(t) = \left\{ u\in R^m : \|u\| \le \left(\frac{1}{t}\hat{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}} \right\}$, $t>0$. Обозначим $\Gamma_t = \{\gamma(\cdot):\gamma(t)\in W(t)\}$ совокупность измеримых селекторов отображения $W(t)$. Если $\gamma(\cdot)\in\Gamma_t$, то $\gamma(\cdot)$ — измеримая функция из класса $L_p^m[0,t)$, $p>1$, которая удовлетворяет ограничению $\int_0^t \|\gamma(\tau)\|^p \, d\tau \le \hat{\gamma}$, $t>0$.

Легко проверить, что для $\gamma(\cdot)\in\Gamma_t$ справедливо включение

$$0\in \pi e^{(t-\tau)A}BU\left(t,\tau,v,\frac{1}{t}\right) - \pi e^{(t-\tau)A}Cv - \pi e^{(t-\tau)A}B\gamma(\tau), \tag{22}$$

где $U\left(t,\tau,v,\frac{1}{t}\right) = \left\{ u\in R^m : \|u\| \le \left(\|\Phi(t-\tau)v\|^p + \frac{1}{t}\hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}} \right\}$, $(t,\tau)\in\Delta = \{(t,\tau): 0\le \le \tau \le t<\infty\}$, $v\in R^k$.

Рассмотрим множество

$$\mathrm{P}(z_0) = \left\{ t\ge 0 : e^{tA}z_0 \in M - \int_0^t \pi e^{(t-\tau)A}BW(\tau)d\tau \right\}. \tag{23}$$

Если включение в фигурных скобках не выполняется ни для каких $t \geq 0$, то положим $\mathrm{P}(z_0) = \varnothing$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 5, 6, множество $\mathrm{P}(z_0)$ не пусто и $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(z_0)$. Тогда траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент Р с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство. Пусть $\upsilon(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3). Из условия теоремы и соотношения (23) следует, что $e^{\mathrm{P}A} z_0 \in M - \int_0^{\mathrm{P}} \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} BW(\tau) d\tau$. Тогда существует такая точка $m \in M$ и измеримый селектор $\gamma(\cdot) \in \Gamma_{\mathrm{P}}$, что

$$e^{\mathrm{P}A} z_0 = m - \int_0^{\mathrm{P}} \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} B\gamma(\tau) d\tau. \tag{24}$$

С учетом включения (22) рассмотрим многозначное отображение

$$U_0(\tau, \upsilon) = \left\{ u \in U\left(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, \frac{1}{\mathrm{P}}\right) : \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} Bu - \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} C\upsilon - \right.$$

$$\left. - \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} B\gamma(\tau) = 0 \right\}, \ \tau \in [0, \mathrm{P}], \ \upsilon \in R^k.$$

В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение $U_0(\tau, \upsilon)$ содержит $L \otimes B$-измеримый селектор $u_0(\tau, \upsilon) = \operatorname{lex\,max}_{e_1, \ldots, e_m} U_0(\tau, \upsilon)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и $\| u_0(\tau, \upsilon) \| = \left(\| \Phi(\mathrm{P} - \tau)\upsilon \|^{\mathrm{P}} + \frac{1}{\mathrm{P}} \hat{\gamma} \right)^{\frac{1}{p}}$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $\upsilon \in R^k$. Положим управление первого игрока $u_0(\tau) = u_0(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$. Из формулы Коши для процесса (1) при выбранных управлениях с учетом (24) имеем

$$\pi z(\mathrm{P}) = e^{\mathrm{P}A} z_0 + \int_0^{\mathrm{P}} \pi e^{(\mathrm{P}-\tau)A} [Bu_0(\tau) - C\upsilon(\tau)] d\tau = m \in M$$

и, следовательно, $z(\mathrm{P}) \in M^*$.

Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}} \| u_0(\tau) \|^p \, d\tau = \int_0^{\mathrm{P}} \| \Phi(\mathrm{P} - \tau)\upsilon(\tau) \|^p \, d\tau + \frac{1}{P} \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}} d\tau \leq \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Приведенную схему можно рассматривать как аналог первого прямого метода Л.С. Понтрягина [13, 14] для линейных дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Доказательство теоремы 4 использует условия М.С. Никольского [1] и является обобщением его результатов.

Рассмотрим множества

$$\mathrm{P}_*(z_0, \gamma(\cdot)) = \left\{ t \geq 0 : \xi(t, z_0, \gamma(\cdot)) \in M, \quad \sup_{\int_0^t \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^t \alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau < 1 \right\}, \tag{25}$$

$$\widehat{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\xi(t,z_0,\gamma(\cdot))\in M,\ \int_0^t \alpha_*(t,\tau,z_0)d\tau<1\right\},$$

$$\underset{\frown}{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\left\{t\ge 0:\xi(t,z_0,\gamma(\cdot))\in M,\ \int_0^t \beta_*(t,\tau,z_0)d\tau<1\right\}.$$

Если соотношения в фигурных скобках не выполняются ни для каких $t\ge 0$, то положим $\mathrm{P}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$, $\widehat{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$, $\underset{\frown}{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\varnothing$ соответственно.

Теорема 5. Пусть выполнены условия 1–3, множество $\mathrm{P}_*(z_0,\gamma(\cdot))$ не пусто и $\mathrm{P}_*\in\mathrm{P}_*(z_0,\gamma(\cdot))$. Тогда $\mathrm{P}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\widehat{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\underset{\frown}{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))$ и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0\in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент P_* с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство. Нетрудно показать, что если выполнены условия 1–3, то справедливо условие 4. При этом имеют место соотношения для $(t,\tau)\in\Delta$, $z_0\in R^n$,

$$\sup_{\int_0^t \|v(\tau)\|^p d\tau\le \nu^p}\int_0^t \alpha_*(t,\tau,v(\tau),z_0)d\tau=\int_0^t \alpha_*(t,\tau,z_0)d\tau,\ \ \alpha_*(t,\tau,z_0)=\beta_*(t,\tau,z_0).$$

Поэтому справедливы равенства $\mathrm{P}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\widehat{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))=\underset{\frown}{\mathrm{P}}_*(z_0,\gamma(\cdot))$.

Пусть $v(\cdot)$ — произвольное допустимое управление убегающего, для которого выполняется ограничение (3).

Рассмотрим многозначное отображение при $v\in R^k$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*]$

$$U_*(\tau,v)=\{u\in U(\mathrm{P}_*,\tau,v,\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v,z_0)):$$
$$\pi e^{(\mathrm{P}_*-\tau)A}B[u-\gamma(\tau)]-\pi e^{(\mathrm{P}_*-\tau)A}Cv\in\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v,z_0)[M-\xi(\mathrm{P}_*,z_0,\gamma(\cdot))]\}. \quad (26)$$

В силу теоремы об опорной функции [27] многозначное отображение $U_*(\tau,v)$ содержит $L\otimes B$-измеримый селектор $u_*(\tau,v)=\underset{e_1,\ldots,e_n}{\mathrm{lex\,max}}\,U_*(\tau,v)$, который является суперпозиционно измеримой функцией [6] и $\|u_*(\tau,v)\|=$ $=\left(\|\Phi(\mathrm{P}_*-\tau)v\|^p+\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v,z_0)\hat{\gamma}\right)^{\frac{1}{p}}$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*]$, $v\in R^k$. Положим управление первого игрока $u_*(\tau)=u_*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,\mathrm{P}_*]$. Тогда с учетом аппарата опорных функций [24] соотношения (25), (26) дают

$$\pi z(\mathrm{P}_*)\in\xi(\mathrm{P}_*)+\int_0^{\mathrm{P}_*}\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v(\tau),z_0)[M-\xi(\mathrm{P}_*)]d\tau\subset M,$$

поскольку по условию $c(M-\xi(\mathrm{P}_*),\psi)\ge 0$, а

$$\int_0^{\mathrm{P}_*}\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v(\tau),z_0)d\tau\le\sup_{\int_0^{\mathrm{P}_*}\|v(\tau)\|^p d\tau\le\nu^p}\int_0^{\mathrm{P}_*}\alpha_*(\mathrm{P}_*,\tau,v(\tau),z_0)d\tau<1.$$

Поэтому $\pi z(\mathrm{P}_*) \in M$ и, следовательно, $z(\mathrm{P}_*) \in M^*$. Покажем допустимость соответствующего управления преследователя. Принимая во внимание соотношения (25) и (26), имеем

$$\int_0^{\mathrm{P}_*} || u(\tau)||^p \, d\tau = \int_0^{\mathrm{P}_*} || \Phi(\mathrm{P}_* - \tau) \upsilon(\tau)||^p \, d\tau + \hat{\gamma} \int_0^{\mathrm{P}_*} \alpha_* (\mathrm{P}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau \leq$$

$$\leq \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} \sup_{\int_0^{\mathrm{P}_*} \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^{\mathrm{P}_*} \alpha_* (\mathrm{P}_*, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau < \nu^p \mathrm{X}^p + \hat{\gamma} = \mu^p.$$

Следствие 1. Пусть выполнены условия 5, 6, множество $\mathrm{P}(z_0)$ не пусто и $\mathrm{P} \in \mathrm{P}(z_0)$. Тогда $\mathrm{P}_* (z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{\mathrm{P}}_* (z_0, \gamma(\cdot)) = \underset{\frown}{\mathrm{P}}_* (z_0, \gamma(\cdot)) = \mathrm{P}(z_0)$ и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент P с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство. Если выполнены условия 5, 6, то с учетом соотношения (22) получим $0 \in \mathfrak{A}(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, z_0)$, $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $\upsilon \in R^k$. Поэтому $0 \in \mathfrak{A}(\mathrm{P}, \tau, z_0)$, справедливы условия 3 и 4, причем для $\tau \in [0, \mathrm{P}]$, $\upsilon \in R^k$,

$$\alpha_* (\mathrm{P}, \tau, \upsilon, z_0) = \inf \{\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}(\mathrm{P}, \tau, \upsilon, z_0)\} = 0,$$

$$\sup_{\int_0^{\mathrm{P}} \|\upsilon(\tau)\|^p d\tau \leq \nu^p} \int_0^{\mathrm{P}} \alpha_* (\mathrm{P}, \tau, \upsilon(\tau), z_0) d\tau = \int_0^{\mathrm{P}} \alpha_* (\mathrm{P}, \tau, z_0) d\tau = \int_0^{\mathrm{P}} \beta_* (\mathrm{P}, \tau, z_0) d\tau = 0.$$

Теорема 6. Пусть выполнены условия 5, 6, множество $T(z_0, \gamma(\cdot))$ не пусто и $T \in T(z_0, \gamma(\cdot))$. Тогда $T(z_0, \gamma(\cdot)) = \widehat{T}(z_0, \gamma(\cdot)) = \Theta(z_0, \gamma(\cdot))$ и траекторию процесса (1)–(3) из начального положения $z_0 \in R^n$ можно привести на терминальное множество (4) в момент T с использованием допустимого управления вида (6).

Доказательство непосредственно следует из конструкций соответствующих определений и теорем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Сформулированы достаточные условия окончания игры за конечное гарантированное время в случае, когда условие М.С. Никольского [1] не выполняется. Предложены две схемы метода разрешающих функций, обеспечивающих завершение игры за конечное гарантированное время в классе стробоскопических стратегий Хайека [9]. Показано, что без дополнительных предположений это время совпадает с гарантированным временем в классе квазистратегий. Предложена схема регуляризации разрешающих функций, которая превращает их в функции Каратеодори [27] и существенно упрощает общую схему метода разрешающих функций без изменения гарантированного времени завершения игры. Дано сравнение гарантированных времен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никольский М.С. Прямой метод в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Управляемые системы*. 1969. Вып. 2. С. 49–59.
2. Чикрий А.А., Безмагорычный В.В. Метод разрешающих функций в линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями. *Автоматика*. 1993. № 4. С. 26–36.
3. Чикрий А.А., Белоусов А.А. О линейных дифференциальных играх с интегральными ограничениями сближения. *Труды ИММ УрО РАН*. 2009. Т. 15, № 4. С. 290–301.
4. Саматов Б.Т. О задачах группового преследования при интегральных ограничениях на управления игроков. I. *Кибернетика и системный анализ*. 2013. № 5. С. 132–145.
5. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Springer Science and Business Media, 2013. 424 p.
6. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 4. С. 40–64.
7. Чикрий А.А., Чикрий В.К. Структура образов многозначных отображений в игровых задачах управления движением. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 3. С. 65–78.
8. Раппопорт И.С. Достаточные условия гарантированного результата в дифференциальной игре с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 1. С. 72–84.
9. Hajek O. Pursuit games. New York: Academic Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
10. Раппопорт И.С. О стробоскопической стратегии в методе разрешающих функций для игровых задач управления с терминальной функцией платы. *Кибернетика и системный анализ*. 2016. Т. 52, № 4. С. 90–102.
11. Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов с терминальной функцией платы. *Проблемы управления и информатики*. 2016. № 2. С. 1–10.
12. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
13. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
14. Никольский М.С. Первый прямой метод Л.С. Понтрягина в дифференциальных играх. Москва: Изд-во МГУ, 1984. 65 с.
15. Pittsyk M.V., Chikrii A.A. On a droup pursuit problem. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 1982. Vol. 46, N 5. P. 584–589.
16. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные кофликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
17. Chikrii A.A. Multivalued mappings and their selections in game control problems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1995. Vol. 27, N 1. P. 27–38.
18. Chikrii A.A. Quasilinear controlled processes under conflict. *Journal of Mathematical sciences*. 1996. Vol. 80, N 3. P. 1489–1518.
19. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A. Optimization of game interaction of fractional-order controlled systems. *Optimization Methods and Software*. 2008. Vol. 23, N 1. P. 39–72.
22. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. of the Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
23. Chikrii A.A. Game dynamic problems for systems with fractional derivatives. *Springer Optimization and its Applications*. 2008. Vol. 17. P. 349–387.
24. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.
25. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механка, астрономя, физика, химиия*. 1959. № 2. С. 25–32.

26. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Из-во МФТИ, 1982. 127 с.

27. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.

28. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.

Надійшла до редакції 28.01.2018

Й.С. Раппопорт

МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ІГРОВИХ ЗАДАЧ КЕРУВАННЯ З ІНТЕГРАЛЬНИМИ ОБМЕЖЕННЯМИ

Анотація. Досліджено метод розв'язувальних функцій стосовно ігрових задач керування з інтегральними обмеженнями. Запропоновано схему методу, що забезпечує закінчення гри за певний гарантований час в класі стробоскопічних стратегій. Показано результати порівняння гарантованих часів цієї схеми методу розв'язувальних функцій з першим прямим методом Понтрягіна для інтегральних обмежень.

Ключові слова: лінійна диференційна гра, інтегральні обмеження, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія.

J.S. Rappoport

RESOLVING-FUNCTIONS METHOD FOR GAME THEORY CONTROL PROBLEMS WITH INTEGRAL CONSTRAINTS

Abstract. The author analyzed the method of resolving functions with regard to game theory control problems with integral constraint. A scheme of the method is proposed. This scheme ensures the end of the game within a guaranteed time in the class of stroboscopic strategies. The guaranteed times for this scheme of the resolving-functions method are compared with the results of the fiirst Pontryagin method for integral constraints.

Keywords: linear differential game, integral constraint, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy.

Раппопорт Иосиф Симович,
кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: jeffrappoport@gmail.com.