УДК 330.115

В.И. НОРКИН

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ АНТИТЕРРОРИСТИЧЕСКОЙ ЗАЩИТЫ[1]

Аннотация. Дан обзор математических моделей и задач по планированию антитеррористических и специальных операций: задач контроля территории, задач защиты критической инфраструктуры (описываемой оптимизационными моделями), блокировки транспортных и информационных сетей. Показано, что многие задачи контроля территории сводятся к известным оптимизационным задачам теории графов, поиску кратчайших путей и минимальных покрытий. Задачи защиты критической инфраструктуры и блокировки сетей сводятся к решению игровых стохастических минимаксных задач. Предлагаются численные методы решения этих задач.

Ключевые слова: антитеррористические операции, контроль территории, защита критической инфраструктуры, стохастическая оптимизация, оптимизация на графах, блокировка сетей, минимаксные задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Математическая теория исследования операций возникла в середине XX в. как теория планирования военных операций во время Второй мировой войны и в последующем в условиях холодной войны. В современных условиях террористических и гибридных войн модели и методы исследования операций приобретают новую интерпретацию и актуальность [1–4].

Террористические угрозы характеризуются значительной территориальной и временной неопределенностью, разнообразием, изощренностью и катастрофической опасностью. К новым угрозам относятся атаки на критическую инфраструктуру общества и государства, кибертерроризм и уличный терроризм. Эти угрозы ставят новые задачи перед органами безопасности государств, а также задачи научного обеспечения общественной безопасности. Возникает необходимость в создании моделей террористических угроз и атак, учитывающих высокую степень неопределенности, разнообразие и злонамеренный характер возможных атак.

В работе обсуждается ряд математических моделей и задач по планированию антитеррористических операций. Это задачи контроля территории, задачи защиты элементов критической инфраструктуры (описываемой оптимизационными моделями), блокировки транспортных и информационных сетей, распространения нежелательных товаров и информации, блокировки путей проникновения на контролируемую территорию. Показано, что многие задачи контроля территории сводятся к известным оптимизационным задачам теории графов, поиску кратчайших путей и минимальных покрытий. Задачи защиты критической инфраструктуры и блокировки сетей сводятся к решению игровых стохастических минимаксных задач.

Хотя перечисленные задачи являются традиционными для теории исследования операций, в данном контексте они приобретают новую интерпретацию, требуют обязательного учета стохастической, информационной и поведенческой неопределенности, а также адаптации и модификации известных методов для решения возникающих оптимизационных задач.

1. ЗАДАЧИ КОНТРОЛЯ ТЕРРИТОРИИ

Для всех рассматриваемых здесь задач предполагается, что задан нагруженный граф $G=(V, E)$, где V — множество, содержащее n вершин, E — множество ре-

[1] Работа поддержана грантом CPEA-ST-2016/10002, The Norwegian Centre for International Cooperation in Education (SIU).

бер (дуг) графа, возможно, с весами (например, длинами дуг). Граф может представляться матрицей смежности или матрицей инцидентности, а также иметь графический вид, например отображать систему дорог на карте местности.

Многие оптимизационные задачи из теории графов могут быть полезными при планировании антитерростической защиты территории. Представим ряд таких задач вместе с содержательной (антитеррористической) интерпретацией и рассмотрим их некоторые стохастические обобщения.

Задача 1.1. (О расстановке блокпостов/часовых.) Содержательно задача состоит в том, чтобы расставить минимальное количество блокпостов в вершинах графа таким образом, чтобы контролировать все ребра. В теории графов такая задача известна как задача нахождения наименьшего вершинного покрытия (т.е. множества вершин) такого, что каждое ребро графа инцидентно хотя бы одной вершине покрытия. В терминах теории сложности это классическая NP-полная задача, для которой не существует простого (полиномиального, непереборного) алгоритма решения. В частности, NP-трудной является даже невзвешенная задача о вершинном покрытии в случае, когда G — планарный граф и степени всех его вершин равны трем.

Данная задача может быть формализована в виде задачи булевого линейного программирования. Введем булевы переменные $x_i \in \{0, 1\}$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $x_i = 1$, если в вершине i устанавливается блокпост, и $x_i = 0$ — в противном случае:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \to \min_{x \in \{0, 1\}^n} \tag{1}$$

при ограничениях

$$x_i + x_j \geq 1, \ (i, j) \in E. \tag{2}$$

Ограничение (2) означает, что, по крайней мере, в одной из вершин i или j должен быть расположен блокпост. Если каждой вершине приписать ее вес (важность) c_i, то целевая функция в (1) принимает более общий вид: $F(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$.

Эвристические (жадные) алгоритмы. Алгоритм решения задачи последовательно расставляет блокпосты в вершинах графа следующим образом. Итеративно среди незанятых вершин находится вершина с максимальным числом неконтролируемых (незанятых) соседей, и при наличии неконтролируемых соседей она занимается блокпостом (в противном случае алгоритм останавливается).

Следующий алгоритм находит приближенное решение, не более чем в два раза худшее, чем оптимальное решение. Алгоритм последовательно пополняет покрытие любыми двумя связанными вершинами, еще не включенными в покрытие. Затем эти вершины удаляются из графа и отыскиваются две новые связанные вершины в оставшемся редуцированном графе и так далее.

Обсуждение задачи о минимальном вершинном покрытии и оценки эффективности жадных (приближенных) алгоритмов изложены в [5, 6].

Формулировка задачи как двухкритериальной. Для данного булевого вектора решений $x \in \{0, 1\}^n$ вычисляем два критерия (минимизации):

$F_1(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ — число блокпостов,

$F_2(x)$ — число неконтролируемых ребер, не имеющих блокпостов на концах.

Задача состоит в том, чтобы построить парето-оптимальную границу в плоскости (F_1, F_2).

Задача 1.2. (О расстановке связанных блокпостов.) Расставить минимальное количество блокпостов в вершинах графа так, чтобы просматривались все ребра и каждый блокпост был связан ребром хотя бы с одним другим блокпостом.

Можно дополнить задачи булевого программирования (1), (2) еще одной группой ограничений:

$$x_i \le \sum\nolimits_{j \in I_i} x_j, \; i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где I_i — множество смежных с i вершин. Ограничения (3) означают, что если в вершине i есть блокпост, т.е. $x_i = 1$, то в одной из смежных вершин также должен быть блокпост. Таким образом, граф накрывается системой связанных подграфов (парами, тройками и т.д.).

Эвристический (жадный) алгоритм. Алгоритм последовательно расставляет блокпосты в вершинах графа следующим образом.

Вначале находится вершина с максимальным числом соседей и которая занимается блокпостом; положим $k = 1$. Предположим, что уже размещено k блокпостов, которые образуют подграф исходного графа. Среди соседних к данному подграфу незанятых вершин находится вершина с максимальным числом незанятых соседей, и если число незанятых соседей больше одного, то вершина занимается блокпостом (в противном случае алгоритм останавливается).

Задача 1.3. (Захват территории.) Пусть задан нагруженный граф (V, E), где несколько вершин его отмечены (например, как военные базы). Задача состоит в том, чтобы, выдвигаясь с баз и двигаясь по ребрам графа, захватить как можно больше вершин за заданное время.

Волновой алгоритм. Из базовых вершин распространяется волна, движущаяся по еще не пройденным ребрам и вершинам графа. Те вершины, которые волна успеет накрыть за заданное время, и есть решение задачи.

Волновой алгоритм позволяет также проследить путь достижения волной любой вершины и, таким образом, спланировать наискорейшую доставку ресурсов в захваченные вершины графа.

Задача 1.4. (Дележ территории.) Пусть задан нагруженный граф (V, E), где несколько вершин графа размечены разными цветами (как военные базы — белые, красные, синие и т.д.). Будем считать, что незакрашенные вершины контролируются определенным цветом, если расстояние от этих незакрашенных вершин до множества вершин данного цвета меньше, чем до множеств вершин других цветов. Задача состоит в том, чтобы определить вершины, подконтрольные каждому цвету.

Групповой волновой алгоритм. Из базовых закрашенных вершин запускаются волны разных цветов, которые движутся по незакрашенным вершинам (и ребрам), закрашивая их, до соприкосновения с другими волнами. Таким образом, весь граф закрашивается в разные цвета и делится на зоны влияния цветов.

Задача 1.5. (Оптимальное расположение сервисных/экстренных служб.) Задача состоит в том, чтобы расположить в вершинах графа несколько (фиксированное число) сервисных служб так, чтобы расстояние от максимально удаленной от сервисных служб вершины графа было минимально.

Двойственная задача состоит в нахождении минимального числа сервисных служб и расположении их таким образом, чтобы расстояние от максимально удаленной от сервисных служб вершины графа было не больше заданной величины.

Содержательные приложения задачи включают: размещение миротворческого контингента, расположение полицейских участков и постов в условиях уличного терроризма, расположение станций скорой помощи, пожарных станций, сервисных служб и т.п. Концептуально близкие задачи оптимального размещения сенсоров в акватории для обнаружения подводной угрозы со стороны лодок и пловцов рассмотрены в работах [7–9].

Данную задачу можно формализовать как задачу о минимальном покрытии графа. А именно для каждой вершины i графа определим подмножество вершин $V_i(\rho)$ графа, отстоящих (по графу) от i не далее, чем на расстояние ρ. Семейство $\{V_i(\rho), \; i = 1, \ldots, n\}$ является покрытием графа. Каждому подмножеству $V_i(\rho)$ можно приписать определенный вес $c_i(\rho)$, например $c_i(\rho) \equiv 1$ или

$c_i(\rho) = 1/|V_i(\rho)|$, где $|V_i(\rho)|$ — число элементов в множестве $V_i(\rho)$. Теперь задача состоит в выборе минимального подпокрытия, т.е. с минимальным суммарным весом.

Задача о минимальном покрытии может быть сформулирована как задача линейного булевого программирования:

$$c^{\mathrm{T}}(\rho)x \to \min_{\{x \in \{0,1\}^n:\ Ax \ge \mathbf{1}\}},$$

где $c^{\mathrm{T}}(\rho) = (c_1(\rho), \ldots, c_n(\rho))$; $A = \{a_{ki}\}$ — матрица размера $n \times n$ с элементами $a_{ki} = 1$, если $k \in V_i(\rho)$, и $a_{ki} = 0$ в противном случае; $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор булевых переменных с компонентами $x_i = 1$, если $V_i(\rho)$ входит в покрытие, и $x_i = 0$ в противном случае; **1** — n-мерный вектор-столбец из единиц. Заметим, что задача 1.1 о вершинном покрытии графа является частным случаем задачи 1.5, если в качестве накрывающего множества V_i выбрать вершину i вместе с ее соседями. Задача о минимальном покрытии может рассматриваться и как многокритериальная, например с тремя критериями $(c^{\mathrm{T}}(\rho)x, \sum_{i=1}^{n} x_i, 1/\rho)$, подлежащими минимизации по $x \in \{0,1\}^n$ и $\rho > 0$.

Для задачи о минимальном покрытии разработано значительное число приближенных алгоритмов с априорными оценками точности получаемых решений. Одним из первых приближенных алгоритмов, предложенных для невзвешенной задачи о покрытии, является жадный алгоритм. В этом алгоритме на каждой итерации очередным элементом покрытия выбирается подмножество, покрывающее наибольшее число элементов из V, не покрытых на предыдущих итерациях. Для относительной ошибки δ данного алгоритма справедлива оценка $\delta \le 1 + \ln \max_i |V_i|$.

Для задачи о покрытии с произвольными весами предложена модификация жадного алгоритма, где на каждой итерации в покрытие включается подмножество V_i с максимальным отношением числа покрываемых элементов, не покрытых на предыдущих итерациях, к весу c_i (если $c_i = 0$, то отношение полагается равным $+\infty$). При положительных весах для относительной ошибки справедлива та же оценка: $\delta \le 1 + \ln \max_i |V_i|$.

Обзор оценок эффективности приближенных методов решения задачи о покрытии представлен в [5].

Задача 1.6. (Оптимальное расположение сервисных/экстренных служб в условиях случайных вызовов.) Вероятностная формулировка задачи оптимального размещения сервисных/экстренных служб имеет следующий вид [10]:

$$c^{\mathrm{T}} x \to \min_{x \in \{0,1\}^n},$$

$$\Pr\{Ax \ge \xi\} \ge p,$$

где параметры $c^{\mathrm{T}} = (c_1, \ldots, c_n)$, $A = \{a_{ij}\}$ и переменная x — такие же, как и для детерминированного случая; $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный булев вектор размерности n; $p \in (0,1)$ — некоторый параметр надежности; символ $\Pr\{\cdot\}$ обозначает вероятность события в скобках. Здесь ξ_i является индикатором случайного события в вершине i, требующего обслуживания, а элемент $a_{ij} \in \{0, 1\}$ матрицы A моделирует возможность обслужить запрос из пункта i службой, находящейся в пункте j. Вероятностное ограничение задачи устанавливает ограничение на вероятность обслуживания всех возможных вызовов. Такие задачи называются задачами стохастического программирования с вероятностными ограничениями [11]. В общем случае веса дуг графа могут быть случайными, поэтому и матрица A также может быть случайной. Отметим, что рассматриваемая постановка задачи включает и стохастический вариант задачи 1.1 о вершинном покрытии, поскольку последняя является частным случаем общей задачи 1.5 о минимальном покрытии.

При дискретном распределении случайных параметров A, ξ задачи, т.е. когда $A \in \{A^1 = \{a_{ij}^1\}, \ldots, A^K = \{a_{ij}^K\}\}$, $\xi \in \{\xi^1, \ldots, \xi^K\}$ с соответствующими вероятностями $\{p_1, \ldots, p_K\}$, стохастическая задача о покрытии может быть сведена к задаче линейного целочисленного программирования с K дополнительными булевыми переменными $(y_1, \ldots, y_K) = y \in \{0, 1\}^K$:

$$c^{\mathrm{T}} x \to \min_{x \in \{0,1\}^n};$$

$$\sum_{k=1}^{K} p_k y_k \geq p;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^k x_j - \xi_i^k \geq y_k - 1, \; i = 1, \ldots, n, \; k = 1, \ldots, K.$$

Применяемый здесь способ сведения задач стохастического программирования с вероятностными ограничениями и с дискретным распределением случайных данных к задачам целочисленного программирования рассматривался в работах [12–16].

Задача 1.7. (Проводка линий связи.) Пусть задан нагруженный граф (V, E), где V — множество вершин (содержит *n* вершин), E — множество ребер (дуг) графа с (случайными) весами. Необходимо провести линии связи между вершинами графа так, чтобы ожидаемая суммарная длина линий была минимальной. В контексте противодействия разнообразным распределенным угрозам данная задача является по-прежнему актуальной, поскольку может быть использована для оптимизации линий связи между многочисленными датчиками, тревожными кнопками и соответствующими службами реагирования.

В случае детерминированных весов данная задача называется задачей об остовном дереве графа (дерева, содержащего все ребра графа и имеющего минимальную суммарную длину). Существует несколько эффективных алгоритмов ее решения [6].

Обобщением данной задачи является (NP-полная) задача Штейнера: найти минимальное дерево Штейнера — кратчайшую подсеть графа, соединяющую заданный конечный набор вершин графа.

2. МИНИМАКСНЫЕ МОДЕЛИ НАПАДЕНИЯ И ПАССИВНОЙ ЗАЩИТЫ

Нападение может интерпретироваться как атака террористов, так и специальная операция (против террористов), т.е. как акт превентивной защиты. Поэтому обе задачи (планирования защиты и планирования нападения) представляют практический интерес. При пассивной защите специальные ресурсы на защиту системы не выделяются, а работа защищаемой системы планируется с учетом ущерба от возможного нападения.

Нападению может подвергаться система в целом, подсистема, функция или количественная характеристика системы. При атаке на оптимально действующую систему нападение может быть направлено на изменение целевой функции системы или ресурсов системы, а также на технологические элементы системы.

В другой терминологии защищающаяся сторона часто называется лидером, а нападающая — ведомым. Предполагается, что нападающая сторона знает о решениях (действиях) защищающейся стороны (лидера) и принимает свои решения для нанесения максимального ущерба лидеру. А лидер, предполагая такое поведение нападающей (ведомой) стороны, изначально выбирает свои решения так, чтобы ущерб после нападения был минимальным.

Общая задача моделирования нападения и защиты имеет вид минимакса или максимина. Пусть функция выигрыша защитника имеет вид $f(x, y)$ и зависит как от действий защитника $x \in X$, так и от действий нападающей стороны (террориста) $y \in Y$. Предполагается, что функция $f(x, y)$, множества X и Y известны как нападающему, так и защитнику. В общем случае множество $X(y)$ может зависеть от действий y нападающего, а множество $Y(x)$ может зависеть от действий x защитника. Если функция $f(x, y)$ вогнуто-выпукла и непрерывна (или даже вогнута и полунепрерывна сверху по x и выпукла и полунепрерывна снизу по y), а множества X, Y — выпуклые компакты, то функция $f(x, y)$ имеет седловую точку (точку равновесия Нэша) $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ (теорема фон Неймана, см. [17, теорема 8.2]):

$$\max_{x \in X} f(x, \bar{y}) \le f(\bar{x}, \bar{y}) \le \min_{y \in Y} f(\bar{x}, y),$$

от которой сторонам невыгодно отклоняться в одностороннем порядке. Если условия выпуклости не выполнены, то для принятия решений применяется принцип гарантированного результата или принцип минимакса (максимина). Тогда задача защитника состоит в решении задачи максимина:

$$[\varphi(x) = \min_{y \in Y} f(x, y)] \to \max_{x \in X},$$

а задача нападающего состоит в решении задачи минимакса:

$$[\psi(y) = \max_{x \in X} f(x, y)] \to \min_{y \in Y}.$$

Особенность этих экстремальных задач состоит в том, что в них целевые функции нелинейны и недифференцируемы. Такие задачи изучались в работах [18, 19]. Обобщение этих постановок состоит в рассмотрении стохастических минимаксных задач [20, 21] и применении метода стохастических квазиградиентов для их решения. Дальнейшее обобщение состоит в изучении так называемых двухуровневых задач, когда целевые функции нападающего и защитника различаются [22–24]. Подходы к глобальной оптимизации функций минимума или максимума с помощью мажорант или минорант рассматривались в работах [25, 26]. Минимаксные задачи могут быть достаточно сложными, поэтому имеет смысл рассмотреть их частные случаи.

2.1. Атака на линейную целевую функцию. Пусть поведение защищающейся оптимальной системы описывается задачей линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x \in X}, \tag{4}$$

где $X = \{x \in \mathrm{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, i = 1, \ldots, m;\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n\}$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор показателей активностей системы.

В контексте данной статьи интерпретация задачи может быть следующей. Вектор x описывает набор товаров, производимых исследуемой системой; вектор $b = (b_1, \ldots, b_m)$ — набор имеющихся ресурсов для производства товаров; $A = \{a_{ij}\}$ — матрица затрат ресурсов на производство товаров; $c = (c_1, \ldots, c_n)$ — вектор цен на товары $j = 1, \ldots, n$ на соответствующих рынках. Атака на рынки сбыта товаров соответствует атаке на целевую функцию задачи производителя, и она приводит к изменению цен на рынках. Например, захват пассажирского самолета террористами может существенно повлиять на продажи авиабилетов или атака на курортные зоны может повлиять на продажи туров.

Пусть в результате нападения коэффициенты целевой функции изменяются следующим образом: $c_j \to c_j + d_j y_j$, где $y_j \in [0, 1]$ обозначает степень нападения, в частности может быть $y_j \in \{0, 1\}$; $y_j = 1$, если произошло нападение на коэффициент c_j, и $y_j = 0$ в противном случае; предполагается, что $0 \ge d_j \ge -c_j$. Будем считать, что ресурсы нападающей стороны ограничены множеством Y, т.е. $y \in Y$. Например, $Y = \{y \in \{0, 1\}^n : \sum_{j=1}^{n} y_j \le k\}$ или

$$Y = \{y \in \mathrm{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \alpha_{sj} y_j \le \beta_s,\ s = 1, \ldots, S;\ y_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n\}. \tag{5}$$

При стратегии нападения $y = (y_1, \ldots, y_n)$ целевая функция защищающейся стороны принимает вид [27]

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j y_j) x_j . \tag{6}$$

Задача защищающейся стороны имеет вид максимина:

$$\varphi(x) = \min_{y \in Y} [f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j y_j) x_j] \to \max_{x \in X} , \tag{7}$$

а задача атакующей стороны имеет вид минимакса:

$$\psi(y) = \max_{x \in X} [f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} (c_j + d_j y_j) x_j] \to \min_{y \in Y} . \tag{8}$$

Задача (7) является задачей выпуклого программирования и может быть решена общими методами негладкой оптимизации. Если $y^* = \{y_j^*(x), j = 1, \ldots, n\} \in$ $\in \arg\min_{y \in Y} f(x, y)$, то вектор с компонентами $\{c_j + d_j y_j^*(x), j = 1, \ldots, n\}$ является обобщенным градиентом вогнутой функции $\varphi(\cdot)$ в точке x.

Рассмотрим другие возможности решения задачи (7). Перепишем первую подзадачу (7):

$$\min_{y \in Y} [f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \min_{y \in Y} \sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j \to \max_{x \in X} .$$

В случае дискретного множества Y данная задача может быть переформулирована в виде задачи линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + x_0 \to \max_{x \in X} ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} d_j x_j y_j \ge x_0 , \quad y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y .$$

Если множество Y задается линейными ограничениями (5) и ограничено, то функция (6) является выпукло-вогнутой и имеет седловую точку на компактном множестве $X \times Y$. В этом случае задача защитника также может быть переформулирована (с заменой внутренней задачи на двойственную с двойственными переменными z_s) в виде задачи линейного программирования [27, 28]:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{s=1}^{S} \beta_s z_s \to \max_{x \in X ,\ \{z_s \ge 0,\ s = 1, \ldots, S\}} ,$$

$$\sum_{s=1}^{S} \alpha_{sj} z_s \ge -d_j x_j , \quad j = 1, \ldots, n .$$

2.2. Вероятностный вариант задачи о нападении на целевую функцию. Предположим, что атакующий стремится изменить коэффициенты целевой функции (4) с вероятностями $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y$, где Y — некоторое подмножество симплекса $\{y \in \mathrm{R}^n : y_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} y_j \le 1\}$. Тогда задача защищающейся стороны принимает вид оптимизации остаточного ожидаемого дохода:

$$\min_{y \in Y} [f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j (1 - y_j)] \to \max_{x \in X} . \tag{9}$$

По сути, задача (9) является частным случаем задачи (7), если положить $d_j = -c_j$. Если о намерениях нападающего ничего не известно, то множество Y имеет вид симплекса, $Y = \{y \in \mathrm{R}^n : y_j \ge 0, \sum_{j=1}^{n} y_j \le 1\}$, и задача (9) принимает вид

$$\left[\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \min_j (-c_j x_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \max_j c_j x_j \right] \to \max_{x \in X}$$

и сводится к задаче линейного программирования:

$$x_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max_{x \in X},$$

$$c_j x_j + x_0 \le 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Если множество Y задается линейными ограничениями, то путем перехода во внутренней задаче минимизации к двойственной в целом задача (9) также сводится к задаче линейного программирования.

В задаче (9) защищающаяся сторона оптимизирует меру риска вида $\varphi(x) = \min_{y \in Y} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j (1 - y_j)$ — минимальный средний ожидаемый доход. Для данной задачи можно применять и другие когерентные меры риска, обзор которых представлен в работе [29]. При этом возникающие максиминные задачи также сводятся к задачам линейного программирования.

2.3. Нападение на ресурсы. Нападение на ресурсы системы, которая описывается оптимизационной задачей (4), можно моделировать с помощью следующих объектов:

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j,$$

$$X(y) = \{x \in \mathrm{R}^n : \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \max\{0, b_i + d_i y_i\}, i = 1, \ldots, m;\ x_j \ge 0,\ j = 1, \ldots, n\},$$

где $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — вектор активностей нападающей стороны, $y \in Y$; $d_i \le 0$.

Рассмотрим штрафную функцию

$$F(x, y) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \min\left\{0, b_i + d_i y_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right\},$$

где λ_i — штрафные коэффициенты за нарушение ресурсных ограничений. Заметим, что функция $F(x, y)$ вогнута по совокупности переменных. Тогда задача защищающейся стороны может быть сформулирована в виде задачи (выпуклого) программирования

$$\min_{y \in Y} F(x, y) \to \max_{x \ge 0},$$

которая в случае конечного или полиэдрального множества Y сводится к задаче линейного программирования.

2.4. Нападение на транспортную задачу. Как известно, классическая транспортная задача формулируется следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min_{x = \{x_{ij}\} \in X}, \tag{10}$$

$$X = \left\{x_{ij} \ge 0 : \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i, i = 1, \ldots, m;\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j, j = 1, \ldots, n\right\}. \tag{11}$$

Здесь c_{ij} интерпретируются как стоимость доставки единицы груза из пункта i в пункт j; a_i — запас товара в пункте i; b_j — заявка на товар в пункте доставки j; x_{ij} — план перевозки товара из пункта i в пункт j. Задача (10), (11) может быть переформулирована с помощью штрафной функции следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \max\left\{0, b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right\} \to$$
$$\to \min_{\{x_{ij} \ge 0 :\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_{ij},\ i = 1, \ldots, m\}},$$

где $\lambda_j > 0$ — штрафные коэффициенты (достаточно большие).

Нападение на транспортную инфраструктуру может моделироваться аналогично нападению на структуру задачи линейного программирования. Так, для случая нападения (например, пиратов) на пути доставки товара задача защищающейся стороны имеет вид задачи минимизации общего ущерба от нападения:

$$\max_{y=\{y_{ij}\}\in Y} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \max\left\{0, b_j - \sum_{i=1}^{m} x_{ij}(1-y_{ij})\right\} \to$$

$$\to \min_{\{x_{ij}\geq 0: \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\leq a_{ij},\, i=1,\ldots,m\}},$$

а задача нападающей стороны состоит в захвате максимального количества товара:

$$\min_{x=\{x_{ij}\}\in X} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, y_{ij} \to \max_{y=\{y_{ij}\}\in Y},$$

где λ_j — штрафной коэффициент за недопоставку товара в пункт j, $y_{ij}\in\{0,1\}$ интерпретируется как индикатор нападения на путь (i, j), а Y — как множество возможных вариантов нападения.

Другой вариант нападения на транспортную инфраструктуру состоит в том, что нападающая сторона стремится увеличить время доставки товаров с баз хранения в пункты потребления. В задаче наискорейшей доставки товаров (вооружения, боеприпасов) целевая функция защищающейся стороны, подлежащая минимизации, может иметь вид

$$\max_{\{i=1,\ldots,m;\; j=1,\ldots,n\}} t_{ij}x_{ij}, \tag{12}$$

где t_{ij} — время доставки единицы товара из пункта i в пункт j. Пусть $y_{ij}\in\{0,1\}$ интерпретируется как индикатор нападения на путь (i, j), $y=\{y_{ij}, i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n\}\in Y$, Y — множество возможных вариантов нападения. Пусть также в результате нападения время доставки единицы товара из пункта i в пункт j увеличивается на величину τ_{ij}. Тогда задача защищающейся стороны принимает вид

$$\max_{y\in Y}\max_{\{i=1,\ldots,m;\; j=1,\ldots,n\}} (t_{ij}+\tau_{ij}y_{ij})x_{ij} \to \min_{x\in X},$$

где множество X задано формулой (11). В случае конечного или полиэдрального множества Y эта задача также сводится к задаче линейного программирования.

2.5. Модели блокировки транспортных и информационных сетей. Рассмотрим задачу блокировки транспортной сети, например, с целью затруднения доставки (удлинения путей доставки) нежелательных товаров (взрывчатки, наркотиков, запрещенных и контрабандных материалов). Можно интерпретировать эту задачу также как защиту медиапространства от распространения нежелательной информации в сети Интернет путем блокировки тех или иных сайтов. Еще одна интерпретация включает задачу перехвата сообщения (преступника), выходящего из узлов сети S и стремящегося наискорейшим образом попасть в другое множество вершин T (терминальных, безопасных). Сетевая модель может описывать всевозможные пути и способы проникновения террориста на военную базу (арсенал, критически важный объект), и задача состоит в том, чтобы максимально затруднить такое проникновение. Подобным задачам посвящена обширная литература [27, 28, 30–32].

Пусть $G(V, E)$ обозначает направленную сеть с множеством узлов V и дуг E; $O(i)$ — множество вершин $j\in V$ таких, что выходящие дуги $(i, j)\in E$; $I(i)$ — множество вершин $j\in V$ таких, что входящие $(j, i)\in E$; c_{ij} — длина дуги (i, j). Сеть может содержать дуги (i, j) и (j, i), т.е. быть ненаправленным графом. Предполагается, что цель нападающей стороны — наискорейшее попадание (товара, сообщения) из узлов $S\subset N$ в множество узлов $T\subset N$. Защищающаяся сторона предпринимает действия x_{ij}, затрудняющие (или блокирующие) прохождение дуги

(i, j), а именно длина дуги (стоимость или время прохождения дуги) (i, j) изменяется с c_{ij} до $c_{ij} + d_{ij}x_{ij}$ в результате действия $x_{ij} \in \{0, 1\}$, где d_{ij} — удлинение дуги (или подорожание прохождения дуги) (i, j) в случае действия x_{ij}. Отметим, что блокировка узла сети эквивалентна блокировке всех исходящих из него дуг.

Определим множество возможных решений защищающейся стороны:

$$X = \{x : Rx \le r,\ x \in \{0, 1\}^{|E|}\}$$

в дискретном случае или

$$\hat{X} = \{x : Rx \le r,\ x \in [0, 1]^{|E|}\}$$

в непрерывном случае, где $|E|$ — число дуг в графе, r — вектор ресурсов защищающейся стороны, $R = \{e_{(i, j)k}\}$ — матрица затрат защитных ресурсов, $e_{(i, j)k}$ — затраты ресурса k на защиту дуги (i, j). Множество решений нападающей стороны имеет вид

$$Y_{ST} = \begin{cases} \{y_{ij} \ge 0\}_{(i, j)\in E} : \sum\limits_{j\in O(i)} y_{ij} - \sum\limits_{j\in I(i)} y_{ji} = 0,\ i \in V \setminus \{S, T\}; \\ \sum\limits_{i\in S,\, j\in O(i)} y_{ij} - 1 = 0; \quad 1 - \sum\limits_{i\in T,\, j\in I(i)} y_{ji} = 0. \end{cases}$$

Задача поиска кратчайшего пути из множества вершин S в множество вершин T в условиях противодействия $x \in X$ имеет вид

$$\varphi(x) = \min_{y\in Y_{ST}} \sum_{(i, j)\in E} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij}) y_{ij}\ . \tag{13}$$

Если кратчайший путь из S в T единственный, то он будет найден в результате решения задачи (13) как путь с $\{y_{ij} > 0\}$. Функция Лагранжа задачи (13) с двойственными переменными $\pi = (\{\pi_i,\ i \in V \setminus \{S, T\}\}, \pi_S, \pi_T)$ имеет вид

$$\begin{aligned} L(x, y, \pi) &= \sum_{(i, j)\in E} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij}) y_{ij} + \sum_{i\in V\setminus\{S, T\}} \pi_i \left(\sum_{j\in O(i)} y_{ij} - \sum_{j\in I(i)} y_{ji} \right) + \\ &+ \pi_S \left(\sum_{i\in S,\, j\in O(i)} y_{ij} - 1 \right) + \pi_T \left(1 - \sum_{i\in T,\, j\in I(i)} y_{ji} \right) = \\ &= \pi_T - \pi_S + \sum_{(i, j)\in E,\, i\notin S,\, j\notin T} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_i - \pi_j) y_{ij} + \\ &+ \sum_{i\in S,\, j\in O(i)} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_S - \pi_j) y_{ij} + \sum_{i\in T,\, j\in I(i)} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_i - \pi_T) y_{ij}. \end{aligned}$$

Поэтому двойственная к (13) задача имеет вид

$$\varphi(x) = \max_{\pi\in\Pi} (\pi_T - \pi_S), \tag{14}$$

где множество Π задается ограничениями:

$$\begin{gathered} c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_i - \pi_j \ge 0,\ (i, j) \in E,\ i \notin S,\ j \notin T; \\ c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_S - \pi_j \ge 0,\ i \in S,\ j \in O(i); \\ c_{ij} + d_{ij}x_{ij} + \pi_i - \pi_T \ge 0,\ j \in T,\ i \in I(j). \end{gathered}$$

Задача охраны (превентивного нападения) имеет вид

$$z_* = \max_{x\in X} \varphi(x) = \max_{x\in X} \min_{y\in Y_{ST}} \sum_{(i, j)\in E} (c_{ij} + d_{ij}x_{ij}) y_{ij}\ ; \tag{15}$$

с помощью двойственной задачи (14) она сводится к задаче линейного частично целочисленного программирования. При этом задача контрабандиста (или пропагандиста) имеет вид

$$z^* = \min_{y \in Y_{ST}} \max_{x \in X} \sum_{(i,\,j) \in E} (c_{ij} + d_{ij} x_{ij}) y_{ij}.$$

В случае непрерывного множества $\hat{X}$ задачу (15), т.е. задачу $z_* = \max_{x \in \hat{X}} \varphi(x)$, можно решать методами негладкой оптимизации [33]. Субградиент выпуклой функции $\varphi(x)$ в точке x вычисляется следующим образом. Для данного x решается задача поиска кратчайшего пути $\{y_{ij}^*(x)\} \in Y_{ST}$ из S в T, например, волновым алгоритмом. Тогда компоненты $\partial_{ij} \varphi(x)$ субградиента $\partial\varphi(x)$ имеют вид $\partial_{ij} \varphi(x) = d_{ij} y_{ij}^*(x)$.

2.6. Стохастические модели блокировки транспортных и информационных сетей. Пусть в задаче (13) коэффициенты целевой функции c_{ij}^{ω} и d_{ij}^{ω} зависят от случайных параметров, т.е. имеют еще один индекс ω, где $\omega \in \Omega$ — элементарное событие в некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Sigma, \mathrm{P})$. В случае конечного вероятностного пространства событие ω называется сценарием, его вероятность равна $p_\omega > 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Предположим, что граф (V, E) является неслучайным, хотя множества $S^{\omega} \subset V$ и $T^{\omega} \subset V$ могут быть случайными, поэтому и множество Y_{ST}^{ω} также случайно:

$$Y_{ST}^{\omega} = \begin{cases} \{y_{ij} \ge 0\}_{(i,\,j) \in E} \colon \displaystyle\sum_{j \in O(i)} y_{ij} - \sum_{j \in I(i)} y_{ji} = 0, \; i \in V \setminus \{S^{\omega}, T^{\omega}\}; \\ \displaystyle\sum_{i \in S^{\omega},\, j \in O(i)} y_{ij} - 1 = 0; \quad 1 - \sum_{i \in T^{\omega},\, j \in I(i)} y_{ji} = 0. \end{cases}$$

В этом случае задача пассивной защиты принимает вид следующей задачи стохастического программирования:

$$z_* = \max_{x \in X} \mathrm{E}\varphi^{\omega}(x) = \max_{x \in X} \mathrm{E} \min_{y^{\omega} \in Y_{ST}^{\omega}} \sum_{(i,\,j) \in E} (c_{ij}^{\omega} + d_{ij}^{\omega} x_{ij}) y_{ij}^{\omega}, \quad (16)$$

где E — знак математического ожидания, а функция $\varphi^{\omega}(x)$ является оптимальным значением задачи

$$\varphi^{\omega}(x) = \min_{y^{\omega} \in Y_{ST}^{\omega}} \sum_{(i,\,j) \in E} (c_{ij}^{\omega} + d_{ij}^{\omega} x_{ij}) y_{ij}^{\omega}. \quad (17)$$

В случае конечного множества Ω сценариев ω, имеющих вероятности p_ω, задача (16) сводится к задаче максимизации

$$z_* = \max_{x \in X} \mathrm{E}\,\varphi^{\omega}(x) = \max_{x \in X} \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \varphi^{\omega}(x)$$

путем замены внутренней оптимизационной задачи (17) двойственной задачей

$$\varphi^{\omega}(x) = \max_{\pi^{\omega} \in \Pi^{\omega}} (\pi_{T^{\omega}}^{\omega} - \pi_{S^{\omega}}^{\omega}),$$

где множество Π^{ω} задается ограничениями:

$$c_{ij}^{\omega} + d_{ij}^{\omega} x_{ij} + \pi_i^{\omega} - \pi_j^{\omega} \ge 0, \; (i, j) \in E, \; i \notin S^{\omega}, \; j \notin T^{\omega};$$

$$c_{ij}^{\omega} + d_{ij}^{\omega} x_{ij} + \pi_{S^{\omega}}^{\omega} - \pi_j^{\omega} \ge 0, \; i \in S^{\omega}, \; j \in O(i);$$

$$c_{ij}^{\omega} + d_{ij}^{\omega} x_{ij} + \pi_i^{\omega} - \pi_{T^{\omega}}^{\omega} \ge 0, \; j \in T^{\omega}, \; i \in I(j).$$

В случае бесконечного множества Ω сценариев ω задача (16) может быть решена методом стохастических квазиградиентов [20]. Стохастический квазиградиент функции $E\varphi^{\omega}(x)$ в данном случае является субградиентом функции $\varphi^{\omega}(x)$ и вычисляется следующим образом [20]. Для произвольного ω решается задача (17), например волновым алгоритмом, и находится ее решение $\{y_{ij}^{\omega}(x)\}$. Тогда субградиент функции $\varphi^{\omega}(x)$ в точке x задается матрицей $\{d_{ij}^{\omega} y_{ij}^{\omega}(x)\}$.

В литературе [30–32] рассматриваются постановки пассивной защиты, состоящие в максимизации вероятности обнаружения противника на его пути из S в T (например, подводных лодок, диверсантов-аквалангистов, контрабандистов [7–9]):

$$\max_{x\in X} \min_{P} \Pi_{(i,\,j)\in P} (p_{ij}(1-x_{ij})+q_{ij}x_{ij}),$$

где P — множество путей из S в T; p_{ij} — вероятность обнаружения противника на дуге (i, j) в случае отсутствия сенсора; q_{ij} — вероятность обнаружения противника на дуге (i, j) при наличии сенсора. Данная задача сводится к виду (15):

$$\max_{x\in X} \min_{y\in Y_{ST}} \sum_{(i,\,j)\in E} (\ln p_{ij} + \ln(q_{ij}/p_{ij})x_{ij})\, y_{ij}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье рассмотрены возможности применения известных моделей и методов теории исследования операций к планированию антитеррористических операций, а также к планированию защиты территории и критической инфраструктуры. Адаптация этих моделей включает систематический учет стохастической, информационной и поведенческой неопределенности террористов. В частности, рассмотрены соответствующие обобщения задач о минимальном покрытии графа, минимизации максимального потока на графе, антагонистической игры нападения и защиты, блокировки транспортных сетей, а также предложены методы решения возникающих оптимизационных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wright P.D., Liberatore M.J., Nydick R.L. A survey of operations research models and applications in homeland security. *Interfaces*. 2006. Vol. 36, N 6. P. 514–529.

2. Herrmann J.W. Using operations research methods for homeland security problems. *Handbook of Operations Research for Homeland Security*. Herrmann J.W. (Ed.) *International Series in Operations Research & Management Science.* New York: Springer. 2013, Vol. 183. P. 1–24.

3. Гайворонский А.А., Ермольев Ю.М., Кнопов П.С., Норкин В.И. Математическое моделирование распределенных катастрофических и террористических рисков. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 1. С. 97–110.

4. Норкин В.И., Гайворонский А.А., Заславский В.А., Кнопов П.С. Модели оптимального распределения ресурсов для защиты объектов критической инфраструктуры. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. Т. 54, № 5. С. 13–26.

5. Еремеев А.В., Заозерская Л.А., Колоколов А.А. Задача о покрытии множества: сложность, алгоритмы, экспериментальные исследования. *Дискретный анализ и исследование операций*. 2000. Т. 7, № 2. С. 22–46.

6. Кормен Т.Х., Лейзерсон Ч.И., Ривест Р.Л., Штайн К. Алгоритмы: построение и анализ. 2-е изд. Пер. с англ. Москва: Издательский дом «Вильямс», 2005. 1296 с.

7. Pashko S., Molyboha A., Zabarankin M., Gorovyy S. Optimal sensor placement for underwater threat detection. *Naval Research Logistics*. 2008. Vol. 55, N 7. P. 684–699.

8. Molyboha A., Zabarankin M. Stochastic optimization of sensor placement for diver detection. *Operations Research*. 2012. 60(2). P. 292–312. DOI: http://dx.doi.org/10.1287/opre.1110.1032.

9. Пашко С.В. Оптимальне розміщення багатосенсорної системи для виявлення загрози. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 2. С. 85–94.

10. Beraldi P., Ruszczyński A. The probabilistic set covering problem. *Operations Research*. 2002. Vol. 50, N 6. P. 956–967.

11. Prékopa A. Stochastic programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. 600 p.

12. Ruszczyński A. Probabilistic programming with discrete distributions and precedence constrained knapsack polyhedral. *Math. Program*. 2002. Vol. 93. P. 195–215.

13. Saxena A., Goyal V., Lejeune M.: MIP reformulations of the probabilistic set covering problem. *Math. Program*. 2009. Vol. 121. P. 1–31.

14. Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G. An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints. *Math. Program.* 2010. Vol. 122, N 2. P. 247–272.

15. Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования. *Автоматика и телемеханика*. 2013. № 6. С. 66–86.

16. Luedtke J. A branch-and-cut decomposition algorithm for solving chance-constrained mathematical programs with finite support. *Math. Program.* 2014. Vol. 146, Iss. 1–2. P. 219–244.

17. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. Пер. с франц. Москва: Мир, 1988. 264 с.

18. Данскин Дж. М. Теория максимина и ее приложение к задачам распределения вооружения. Москва: Сов. радио, 1970. 200 с.

19. Федоров В.В. Численные методы максимина. Москва: Наука, 1979. 280 с.

20. Ермольев Ю.М. Модели и методы стохастического программирования. Москва: Наука, 1976. 280 с.

21. Нурминский Е.А. Численные методы решения детерминированных и стохастических минимаксных задач. Киев: Наук. думка, 1979. 161 с.

22. Dempe S. Foundations of bilevel programming. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 306 p.

23. Dempe S., Zemkoho A.B. The bilevel programming problem: Reformulations, constraint qualications and optimality conditions. *Mathematical Programming*. 2013. Vol. 138, N 1. P. 447–473.

24. Ermoliev Y., von Winterfeldt D. Systemic risks and security management. managing safety of heterogeneous systems. *Decisions under Uncertainty and Risks.* Ermoliev Y., Makowski M., Marti K. (Eds.). *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2012. Vol. 658. P. 19–49.

25. Норкин В.И. О методе Пиявского для решения общей задачи глобальной оптимизации. *Журн. вычисл. математики и мат. физики*. 1992. Т. 32, № 7. С. 992–1007.

26. Норкин В.И., Онищенко Б.О. Минорантные методы стохастической глобальной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2005. № 2. С. 56–70.

27. Brown G., Carlyle M., Salmeryn J., Wood K. Defending critical infrastructure. *Interfaces*. 2006. Vol. 36, N 6. P. 530–544.

28. Cormican K.J., Morton D.P., Wood R.K. Stochastic network interdiction. *Oper. Res*. 1998. Vol. 46. P. 184–197.

29. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение–риск. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 85–103.

30. Morton D.P. Stochastic network interdiction. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science.* Cochran J.J. (Ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2010. P. 1–15.

31. Dimitrov N.B., Morton D.P. Interdiction models and applications. *Handbook of Operations Research for Homeland Security.* Herrmann J.W. (Ed.). *International Series in Operations Research & Management Science*. New York: Springer. 2013. Vol. 183. P. 73–103.

32. Towle E., Luedtke J. New solution approaches for the maximum-reliability stochastic network interdiction problem. arXiv: 1708.04261v1 [math.OC] 14 Aug 2017.

33. Стецюк П.И. Теория и программные реализации r-алгоритмов Шора. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 5. С. 43–57.

Надійшла до редакції 09.02.2018

В.І. Норкін

ОПТИМІЗАЦІЙНІ МОДЕЛІ АНТИТЕРОРИСТИЧНОГО ЗАХИСТУ

Анотація. Наведено огляд математичних моделей і задач з планування антитерористичних та спеціальних операцій: задач контролю території, задач захисту критичної інфраструктури (описуваної оптимізаційними моделями), блокування транспортних та інформаційних мереж. Показано, що багато задач контролю території зводяться до відомих оптимізаційних задач теорії графів, пошуку найкоротших шляхів і мінімальних покриттів. Задачі захисту критичної інфраструктури і блокування мереж зводяться до розв'язання ігрових стохастичних мінімаксних задач.

Ключові слова: антитерористичні операції, контроль території, захист критичної інфраструктури, блокування мереж, стохастична оптимізація, оптимізація на графах, мінімаксні задачі.

V.I. Norkin

OPTIMIZATION MODELS OF ANTI-TERRORIST PROTECTION

Abstract. The paper gives an overview of a number of mathematical models and problems on planning anti-terrorist and special operations. These are problems of monitoring a territory, protecting critical infrastructure (described by optimization models), interdicting transport and information networks. It is shown that many territory control problems are reduced to well-known optimization problems on graphs, shortest paths search, and minimal coverages on graphs. The problems of protecting critical infrastructure and interdicting networks are reduced to stochastic minimax game problems.

Keywords: anti-terrorist operations, territory control, critical infrastructure protection, network interdiction, stochastic optimization, optimization on graphs, minimax problems.

Норкин Владимир Иванович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев; профессор кафедры Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», e-mail: vladimir.norkin@gmail.com.