

## МНОГОМЕРНОЕ ШКАЛИРОВАНИЕ СРЕДСТВАМИ ПСЕВДООБРАТНЫХ ОПЕРАЦИЙ

**Аннотация.** Предложен метод многомерного шкалирования информации на основе результатов теории возмущения псевдообратных и проекционных матриц и решений систем линейных алгебраических уравнений. Разработан алгоритм кусочно-гиперплоскостной кластеризации с проверкой заданного критерия ее эффективности. Приведен пример использования метода шкалирования характеристических признаков для распознавания букв алфавита украинского жестового языка.

**Ключевые слова:** шкалирование, классификация, кластеризация, псевдообратные матрицы.

### ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В различных прикладных областях исследований проблем распознавания образов, когда необходимо работать с большими объемами информации, существенны как количество объектов исследования (наблюдений), так и признаков, характеризующих эти объекты. Строгие математические постановки предполагают выполнение двух взаимно дополняющихся операций:

— разбиение объектов по группам однородности — кластерам, когда объекты кластеризации представляются как точки в  $n$ -мерном пространстве признаков ( $n$  — количество признаков, характеризующих объекты), а сходство между объектами определяется через расстояния между точками вводимого абстрактного пространства (чем меньше расстояние между объектами, тем они более похожи и, значит, принадлежат одному кластеру). Методы кластерного анализа предназначены для осуществления классификации в условиях отсутствия модели исследуемого явления, представленного векторами в пространстве признаков. Преимущество кластерного анализа состоит в возможности проводить разбиение объектов множества  $m$  кластеров так, чтобы каждый объект принадлежал только одной группе разбиения;

— построение в  $n$ -мерном пространстве признаков дискриминантных поверхностей, разделяющих объекты, относящиеся к различным группам — классам (расстояния между точками одной группы минимально отличны от их среднего значения). Дискриминантный анализ включает методы классификации многомерных наблюдений в предположении, что исследователь имеет так называемые обучающие выборки.

В многочисленных публикациях о методах классификации и кластеризации информации исследованы проблемы минимизации размерности пространства признаков, выбора критериев оптимальности для получения робастных решений, применяемых на практике. Решение проблем классификации и кластеризации информации часто сопряжено с потребностями визуализации результатов для значительного усечения размерности пространства признаков, а именно классы и кластеры располагают на плоскости или в трехмерном пространстве. Например, метод многомерного шкалирования — это совокупность методов анализа эмпирических данных о близости объектов, с помощью которых определяется размерность пространства существенных для данной содержательной задачи характеристик измеряемых объектов и конструируется конфигурация точек (объектов) в нем. Это пространство — многомерная шкала значений существенных характеристик измеряемых объектов, которым соответствуют определенные позиции на осях пространства. Логику многомерного шкалирования часто рассматривают на примере матрицы попарных расстояний (т.е. сходства некоторых признаков)

между несколькими городами. Анализируя матрицу, необходимо располагать точки с координатами городов в двумерном пространстве, максимально сохраняя реальные расстояния между ними. В общем случае многомерное шкалирование позволяет таким образом расположить объекты в пространстве некоторой небольшой размерности, чтобы достаточно адекватно воспроизводить наблюдаемые расстояния между ними.

Математическая формулировка цели многомерного шкалирования — поиск и интерпретация в исходном пространстве признаков новых переменных, позволяющих исследователю определять степень сходства между объектами в пространстве признаков: расстояния или другие степени сходимости показателей объектов.

Многомерное шкалирование включает множество методов и моделей в различных прикладных исследованиях [1]. Существует также строгая математическая постановка задачи и вариант ее решения [2].

В работах [3–6] предложены идеи синтеза систем классификации, кластеризации сигналов, основанные на использовании в пространстве признаков гиперплоскостей решений (псевдорешений) специальных систем линейных алгебраических уравнений и на построении в пространстве признаков гиперплоскостных кластеров.

В настоящей работе предлагается развитие аналогичных средств синтеза систем для решения задач визуализации информации относительно взаимного расположения объектов классификации и (или) кластеризации на последовательности двумерных (трехмерных) плоскостей в некотором пространстве, производном от исходного пространства признаков. При решении поставленных задач существенно используются результаты теории возмущения псевдообратных и проекционных матриц и решения систем линейных алгебраических уравнений [5–11].

## 1. ОСНОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА ПСЕВДООБРАЩЕНИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

В дальнейшем, кроме стандартного обозначения  $m \times n$  матрицы  $A = (a_{ij})$  по ее элементам, используется ее изображение по столбцам или строкам соответственно

$$A = (a(1) \dotscolumna(n)), a(j) \in R^n, j = \overline{1, n}, A = \begin{pmatrix} a_{(1)}^T \\ \dots \\ a_{(m)}^T \end{pmatrix}, a_{(i)}^T \in R^n, i = \overline{1, m},$$

где  $T$  — знак транспонирования.

**Сингулярное разложение матрицы.** Произвольную  $m \times n$  матрицу  $A$  ранга  $r \leq \min(m, n)$  можно представить в виде

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i u_i v_i^T.$$

Здесь  $\lambda_1^2 \geq \dots \geq \lambda_r^2 > 0$  — общий набор ненулевых собственных чисел матриц  $AA^T, A^T A$ ;  $v_i \in R^n, i = \overline{1, r}$ , — ортонормованный набор собственных векторов матрицы  $A^T A$ , которые соответствуют ненулевым собственным числам  $L^{(0)}(k), k = 1, 2, \dots$ :

$$A^T A v_i = \lambda_i^2 v_i, i = \overline{1, r}, v_i^T v_j = \delta_{ij};$$

$u_i \in R^m, i = \overline{1, r}$ , — ортонормованный набор собственных векторов матрицы  $AA^T$ , которые также соответствуют ненулевым собственным числам  $\lambda_i^2, i = \overline{1, r}$ :

$$AA^T u_i = \lambda_i^2 u_i, i = \overline{1, r}, u_i^T u_j = \delta_{ij}.$$

**Оптимизационная форма определения псевдообратной матрицы.** Для матрицы  $A \in R^{m \times n}$  псевдообратная по Пенроузу [12] матрица  $A^+ \in R^{n \times m}$  определяется соотношением

$$\forall b \in R^m \quad A^+ b = \arg \min_{x \in \Omega_A(b)} \|x\|^2,$$

где  $\Omega_A(b) = \arg \min_{x \in R^n} \|Ax - b\|^2$ .

**Сингулярное представление псевдообратной матрицы.** Используя сингулярное представление матрицы  $A \in R^{m \times n}$ , псевдообратную матрицу  $A^+ \in R^{n \times m}$  можем представить в виде [13]

$$A^+ = \sum_{j=1}^r v_j u_j^T \lambda_j^{-1}.$$

**Основные матрицы, связанные с псевдообратной матрицей.** В практике применения псевдообращения к задачам кластеризации важными являются матрицы, которые определяются и вычисляются с использованием матриц  $A$  и  $A^+$ :

— проекционная матрица  $P(A) = A^+ A \equiv \sum_{j=1}^r x_j x_j^T$  — ортогональный проектор

на подпространство  $L_{A^T}$ , порожденное вектор-строками матрицы  $A$ , т.е. на подпространство значений  $A^T$ ;

— проекционная матрица  $Z(A) = I_n - P(A)$  — ортогональный проектор на подпространство, ортогональное подпространству  $L_{A^T}$ ;

— матрица  $R(A) = A^+ (A^+)^T \equiv \sum_{j=1}^r x_j x_j^T \lambda_j^{-2}$ .

Связь между  $P$ - и  $Z$ -проекторами определяется соотношениями

$$P(A) + Z(A) = I_n, \quad P(A) = A^+ A, \quad P(A) = \sum_{i=1}^r v_i v_i^T, \quad Z(A) = \sum_{i=r+1}^n v_i v_i^T.$$

Кроме  $P$ - и  $Z$ -проекторов, связанных с базовыми подпространствами матрицы  $A$ , важно также применение операторов  $R(A)$ , которые определяются

$$R(A) = A^+ (A^+)^T, \quad R(A) = \sum_{i=1}^r \lambda_i^{-2} v_i v_i^T.$$

Свести вычисления псевдообратной матрицы для произвольной матрицы к вычислению соответствующей ей некоторой обратной квадратной матрицы с размерностью  $\min(m, n)$  позволяют соотношения

$$A^+ = (A^T A)^+ A^T = A^T (A A^T)^+, \quad A^+ = R(A) A^T.$$

В практических приложениях, связанных с использованием псевдообращения, особое значение имеют прямые и обратные формулы [14–17]. Прямые формулы — это соотношения, которые связывают псевдообратную матрицу, расширенную введением дополнительной строки или столбца, с псевдообратной исходной матрицей. Обратные формулы — это соотношения, в которых псевдообратная матрица для исходной матрицы вычисляется с использованием псевдообратной матрицы, полученной из исходной матрицы удалением строки или столбца.

**Прямые формулы.** Предполагается, что расширение матрицы  $A$  происходит в результате появления новой строки  $a^T \in R^n$  после  $(i-1)$ -й строки ( $i=2, m+1$ ), т.е. образуется матрица

$$A(i, a) = (a_{(1)} \dots a_{(i-1)} : a : a_{(i)} \dots a_{(m)})^T \in R^{(m+1) \times n}.$$

Тогда при известной псевдообратной матрице  $A^+ \in R^{n \times m}$  для рекуррентного вычисления псевдообратной матрицы  $A^+(i, a) \in R^{n \times (m+1)}$  имеют место соот-

ношения [14–16]. Если искомую псевдообратную матрицу  $A^+(i, a)$  представить в виде

$$A^+(i, a) = (p(1) \dots p(i-1) \vdots p(i) \vdots p(i+1) \dots p(m+1)) \in R^{n \times (m+1)},$$

где  $P_i = (p(1) \dots p(i-1) \vdots p(i+1) \dots p(m+1))$ , т.е. считать, что матрицу  $A^+(i, a)$  можно получить из матрицы  $P_i \in R^{n \times m}$  вставкой после  $(i-1)$ -го столбца вектора  $p(i)$ , то для матрицы  $P_i$  справедлива формула

$$P_i = (1 - p(i)a^T)A^+. \quad (1)$$

Неизвестный вектор  $p(i)$  определяется с учетом свойства линейной зависимости вектора от векторов подпространства вектор-строк матрицы  $A$ :

— если вектор  $a$  линейно независим от векторов подпространства вектор-строк матрицы  $A$ , т.е.  $a^T Z(A)a > 0$ , то  $p(i) = Z(A)a \|Z(A)a\|^{-2}$ ;

— если вектор  $a$  линейно зависим от векторов подпространства вектор-строк матрицы  $A$ , т.е.  $a^T Z(A)a = 0$ , то  $p(i) = R(A)a(1 + a^T R(A)a)^{-1}$ .

В силу того, что операция псевдообращения эквивалентна для транспонированной матрицы  $A^T$ , прямые формулы (1) аналогично выводятся для варианта расширения исходной матрицы  $A$  столбцом.

**Обратные формулы.** Если для матрицы  $A(i, a) \in R^{(m+1) \times n}$  (после  $(i-1)$ -й строки  $(i = 2, m+1)$  матрицы  $A$  вставлена вектор-строка  $a^T$ ) известна ее псевдообратная матрица  $A^+(i, a) \in R^{n \times (m+1)}$ , то для определения псевдообратной матрицы  $A^+ \in R^{n \times m}$ , т.е. строка  $a^T$  из матрицы  $A(i, a)$  удаляется, справедливы обратные формулы:

— для случая линейной зависимости удаляемой вектор-строки  $a^T$  от векторов подпространства вектор-строк матрицы  $A(i, a)$ , что определяется выполнением  $a^T p(i) < 1$ , псевдообратная матрица  $A^+ \in R^{n \times m}$  имеет вид

$$A^+ = (I_n + p(i)a^T (1 - a^T p(i))^{-1})P_i, \quad (2)$$

тогда ранг псевдообратной матрицы не изменяется, т.е.  $\text{rank } A = \text{rank } (A^T : a)^T$ ;

— для случая линейной независимости удаляемой вектор-строки  $a^T$  от векторов подпространства вектор-строк матрицы  $A(i, a)$ , что определяется выполнением условия  $a^T p(i) = 1$ , псевдообратная матрица  $A^+ \in R^{n \times m}$  имеет вид

$$A^+ = (I_n - p(i)p^T(i) \|p(i)\|^{-2})P_i. \quad (3)$$

При этом ранг псевдообратной матрицы изменяется, т.е.  $\text{rank } A = \text{rank } (A^T : a)^T - 1$ .

Имеют место соотношения  $\|p(i)\|^2 = R_{ii}(A^T(i, a))$ ,  $1 - p^T(i)a = Z_{ii}(A^T)$ .

Используя прямые и обратные формулы (1)–(3) для представления псевдообратных матриц, получим эффективные для практических применений формулы экономного вычисления возмущенных проекционных матриц.

## 2. СИНТЕЗ КУСОЧНО-ГИПЕРПЛОСКОСТНОГО КЛАСТЕРА. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Под задачей синтеза кусочно-гиперплоскостного кластера для обучающей выборки векторов  $\Omega^0 = \{x : x(j) \in R^m, j = \overline{1, n}\}$  в пространстве признаков понимается нахождение кусочно-гиперплоскостного кластера так, чтобы точки обучающей выборки были расположены близко (в смысле критерия расстояния определенной выбранной метрики) к некоторой совокупности гиперплоскостей, которая порождается этой выборкой. Особенностью постановки рассматриваемой задачи является то, что для задачи кластеризации заранее не известны составляющие совокупностей гиперплоскостей. Это

означает, что в начале процесса кусочно-гиперплоскостной кластеризации предполагается, что векторы  $x(1), \dots, x(n)$  из пространства признаков  $R^m$  могут принадлежать одной из нескольких гиперплоскостей  $L(A(k), b(k))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , некоторой фиксированной размерности  $s$  ( $s < m$ ). Здесь использована идея представления гиперплоскостей как множества решений (псевдорешений) систем алгебраических уравнений

$$A(k)x = b(k), \quad A(k) \in R^{s \times m}, \quad b(k) \in R^s, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$L(A(k), b(k)) = \{x \in R^n : x = A^+(k)y + Z(A(k))z, \quad z \in R^n\},$$

где  $A(k)$  и  $b(k)$  являются соответственно матричным и векторным параметрами определенной гиперплоскости  $L(A(k), b(k))$ .

Расстояние  $\rho(x(j), L(A, b))$  от точки  $x(j)$  до гиперплоскости  $L(A, b)$  в евклидовом пространстве определяется в соответствии с соотношением

$$\rho^2(x(j), L(A, b)) = \|A^+(b - Ax(j))\|^2, \quad \|x\|^2 = x^T x.$$

Сумма квадратов расстояний множества точек  $x(j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , до гиперплоскости  $L(A, b)$  вычисляется формулой [4]

$$\begin{aligned} \rho^2(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b)) &= \sum_{j=1}^n (b - Ax(j))^T R(A^T)(b - Ax(j)) = \\ &= \text{tr} R(A^T) \sum_{j=1}^n (b - Ax(j))(b - Ax(j))^T. \end{aligned}$$

Тогда при заданных значениях  $A, x(j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , имеет место соотношение для оптимального значения вектора правой части системы уравнений, определяющей гиперплоскость  $b_{\text{opt}} = A\hat{x} = \arg \min_{b \in R^s} \rho^2(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b))$ , где  $\hat{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j)$ .

Расстояние  $\rho(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b))$  множества точек  $x(j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ , до гиперплоскости при оптимальном выборе вектора  $b$  вычисляется так:

$$\rho(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b_{\text{opt}}(A))) = (\text{tr} A^+ A \tilde{X} \tilde{X}^T)^{1/2},$$

где  $\tilde{X} = (\tilde{x}(1) : \dots : \tilde{x}(n))$ ,  $\tilde{x}(j) = x(j) - \hat{x}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Оптимальный выбор матрицы  $A \in R^{s \times m}$  определяется как решение задачи

$$A_{\text{opt}} = \arg \min_{AA^T = I_s, A \in R^{s \times m}} \rho^2(\{x : x(j), j = \overline{1, n}\}, L(A, b_{\text{opt}}(A))) = \begin{pmatrix} u_{m-s+1}^T \\ \vdots \\ u_m^T \end{pmatrix},$$

при этом  $\text{tr} A_{\text{opt}}^+ A_{\text{opt}} \tilde{X} \tilde{X}^T = \sum_{j=m-s+1}^r \lambda_j^2$ ,  $(u_1, \dots, u_m)^T (u_1, \dots, u_m) = I_m$ .

Если гиперплоскости определены с помощью векторов сингулярного разложения матрицы  $\tilde{X} = \sum_{i=1}^r u_i \lambda_i v_i^T$ ,  $U_s = (u_1 : \dots : u_s)$ , где  $s \leq \min(r_1, r_2)$  — количество

старших  $u$ -векторов (соответствующих большим сингулярным числам) сингулярного разложения, то расстояние  $\rho(x(i), L(A, b))$  определяется соотношениями [6]

$$\begin{aligned} \rho(x(i), L(A, b)) &= (x(i) - \hat{x})^T Z(U_s^T)(x(i) - \hat{x}) = \\ &= \|x(i) - \hat{x}\|^2 + (x(i) - \hat{x})^T \sum_{j=1}^s u_j u_j^T (x(i) - \hat{x}). \end{aligned}$$

**Алгоритм кусочно-гиперплоскостной кластеризации.** Данный алгоритм заключается в последовательном выполнении рекуррентных шагов, на каждом из которых определяются параметры гиперплоскостей  $L(A(k), b(k))$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , строящихся в рамках требований критерия эффективности осуществляемой гиперплоскостной кластеризации (формально выраженной компактности кластера в том или ином виде). В начале процесса кусочно-гиперплоскостной кластеризации предполагается, что все векторы обучающей выборки  $x(1), \dots, x(n)$  из пространства признаков  $R^m$  оптимально приближаются гиперплоскостью  $L(A_{\text{opt}}(1), b_{\text{opt}}(1))$ . Далее проверяется выполнение критерия эффективности осуществляемой гиперплоскостной кластеризации. Если он выполнен, то результат достигнут построением кластера одной гиперплоскостью. Если условия критерия эффективности для первой гиперплоскости не выполнены, то переходят к построению второй гиперплоскости кластера. Для этого из обучающей выборки исключаются векторы, обуславливающие невыполнение критерия эффективности, т.е. формируется подмножество  $\Omega^1 = \{x : x(j_1) \in R^m, j_1 = \overline{1, n_1}\}$ . Повторяются действия для оптимального приближения подмножества  $\Omega^1$  гиперплоскостью  $L(A_{\text{opt}}(2), b_{\text{opt}}(2))$ . Очевидно, что этот конечный рекуррентный процесс обеспечивает построение оптимального кусочно-гиперплоскостного кластера.

**Алгоритм синтеза кусочно-гиперплоскостных кластеров.** На основании изложенной идеи синтеза кусочно-гиперплоскостных кластеров алгоритм такого синтеза можно представить в виде последовательности действий.

**Формирование первого звена кластера.**

1. Векторы обучающей выборки  $\Omega(0) = \{x : x(j) \in R^m, j = \overline{1, n}\}$  из пространства признаков оптимально приблизить гиперплоскостью  $L(A_{\text{opt}}(1), b_{\text{opt}}(1))$ , определяемой как множество решений (псевдорешений) систем алгебраических уравнений

$$A(k)x(k) = b(k), \quad A(k) \in R^{s \times m}, \quad b(k) \in R^s, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$L(A(k), b(k)) = \{x(k) \in R^m : x(k) = A^+(k)b(k) + Z(A(k))v(k) \quad \forall v(k) \in R^n\}.$$

2. Сформировать множество  $\Omega(1) = \{x : x(j_1) \in R^m, j_1 = \overline{1, n_1}\}$  из точек  $\Omega(0)$ , для которых выполняется условие

$$(b_{1\text{opt}}(1) - A_{1\text{opt}}(1)x(j_1))^T R(A_{1\text{opt}}^T(1))(b_{1\text{opt}}(1) - A_{1\text{opt}}(1)x(j_1)) > h_{\min},$$

где  $h_{\min}$  — допустимое расстояние векторов от составляющих кластера гиперплоскостей. Линейная зависимость или независимость векторов, которые могут быть изъяты из множества, дает возможность упростить вид формул для расстояний этих векторов от соответствующих гиперплоскостей, поэтому целесообразно использовать соотношения, полученные в виде формул (1)–(3).

3. Завершить работу алгоритма на этапе формирования первого звена кластера можно после того, как расстояние каждого вектора обучающей выборки  $\Omega(0) = \{x : x(j) \in R^m, j = \overline{1, n}\}$  от гиперплоскости  $L(A_{\text{opt}}(1), b_{\text{opt}}(1))$  не будет превышать его допустимого значения.

4. Если во множестве  $\Omega(1) = \{x : x(j_1) \in R^m, j_1 = \overline{1, n_1}\}$  имеется не менее двух векторов, то перейти к формированию второго звена кластера.

**Формирование второго звена кластера.**

1. Из полученного в процессе построения первого звена кластера множества  $\Omega(1) = \{x : x(j_1) \in R^m, j_1 = \overline{1, n_1}\}$  построить гиперплоскость  $L(A_{\text{opt}}(2), b_{\text{opt}}(2))$ , которая определяется как множество решений (псевдорешений) системы алгебраических уравнений

$$A_k(2)x = b_k(2), \quad k = 1, 2, \dots \quad (4)$$

2. Вычислить оптимальные  $A_{k\text{opt}}(2), b_{k\text{opt}}(2)$  для  $L(A_k(2), b_k(2))$ ,  $k = 1, 2, \dots$

3. Сформировать множество  $\Omega_k^0(2)$ ,  $k=1,2,\dots$ , по расстоянию вектора  $x(j) \in \Omega^0(2)$  от каждой гиперплоскости (4)

$$\begin{aligned} & \rho^2(x : x(j), L(A_{\text{копт}}(2), b_{\text{копт}}(2))) = \\ & = (b_{\text{копт}}(2) - A_{\text{копт}}(2)x(j))^T R^T(A_{\text{копт}}(2))(b_{\text{копт}}(2) - A_{\text{копт}}(2)x(j)) \end{aligned}$$

(действия аналогичные п. 3 построения первого звена кластера).

4. Перейти к выполнению п. 2 с новыми подмножествами  $\Omega_1^j(1)$ ,  $\Omega_2^j(1)$ ,  $j=1,2,\dots$ ,  $j$  — количество итераций на этапе формирования второго звена кластера.

Алгоритм завершает работу, когда расстояния каждого вектора определенного элемента разбиения от соответствующей гиперплоскости больше не увеличиваются.

Проверяется критерий эффективности проведенной гиперплоскостной кластеризации (например, требование уровня компактности звеньев кластера). При выполнении критерия построение кластера завершается, а при невыполнении осуществляется переход к формированию третьего звена кластера.

### 3. РАСПОЗНАВАНИЕ БУКВ АЛФАВИТА УКРАИНСКОГО ЖЕСТОВОГО ЯЗЫКА

Эффективность описанного метода шкалирования информации продемонстрирована на распознавании дактилем украинского жестового языка [18, 19], где в качестве характеристических выбирались 52 признака, разделенные на шесть групп в зависимости от способа их получения. Эксперименты проводились с группами признаков, характеризующих геометро-топологические параметры кисти руки человека при показе букв дактильной азбуки, для которых получили приемлемое качество распознавания [18]. На примере классификации девяти дактилем (А, Б, В, Г, Ж, И, Е, Ы, Й) по трем и пяти характеристическим признакам получили их разделение на плоскости шкалирования. В качестве трех характеристических признаков выбирались компактность, направленность и вытянутость, а в экспериментах с пятью признаками — отношение ширины к высоте, четыре значения углов между векторами, проведенными из центра кисти руки к крайним ее точкам. Экспериментальные данные использования трех и пяти характеристических признаков приведены в табл. 1 и 2 соответственно. При проведении экспериментов дактилему А помещали в начало координат.

Отметим, что использование пяти характеристических признаков позволило получить более четкую отделимость (расстояния дактилем от плоскости шкалирования в пределах 0.1580–0.3828), тогда как при использовании трех признаков расстояния от плоскости шкалирования были значительно (в три-пять раз) меньше (в пределах 0.0306–0.1274). Исключение составляла дактилема Б в случае ис-

**Таблица 1**

Буквы алфавита (дактилемы)	Координата X на плоскости шкалирования	Координата Y на плоскости шкалирования	Расстояние дактилем от плоскости шкалирования
А	0.0000	0.0000	0.0354
Б	0.7196	0.9517	0.0073
В	0.4579	0.6644	0.0519
Г	0.4495	0.6088	0.1107
Ж	0.4547	0.7062	0.0536
И	0.3257	0.4415	0.0306
Е	0.2998	0.5237	0.1274
Ы	0.4083	0.5908	0.0643
Й	0.4067	0.6252	0.0707

Таблица 2

Буквы алфавита (дактилемы)	Координата X на плоскости шкалирования	Координата Y на плоскости шкалирования	Расстояние дактилем от плоскости шкалирования
А	0.0000	0.0000	0.2719
Б	1.0345	0.6393	0.0177
В	0.5065	0.4320	0.3419
Г	0.5271	0.3670	0.3828
Ж	0.3878	0.3289	0.2511
И	0.5353	0.4159	0.1825
Е	0.3718	0.2753	0.1976
Ы	0.5851	0.4470	0.1580
Й	0.4585	0.2876	0.1647

пользования пяти характеристических признаков (0.0177) и трех характеристических признаков (0.0073), отделимость от плоскости шкалирования была незначительной, что подтверждает сложность распознавания именно этой дактилемы по данным характеристическим признакам.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения задач классификации и кластеризации информации предложена технология многомерного шкалирования с использованием алгоритмов построения средствами псевдообращения матриц кусочно-гиперплоскостных кластеров. Приведенный подход позволяет провести предварительный анализ информации при значительном числе трудноразделимых классов. Дальнейшие исследования будут направлены на усовершенствование предложенного метода и его применение ко всем буквам украинского жестового языка в целях получения оптимального числа характеристических признаков для эффективного распознавания.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Девисон М. Многомерное шкалирование. Методы наглядного представления данных. Москва: Финансы и статистика, 1988. 254 с.
2. Воронцов К.В. Лекции по алгоритмам кластеризации и многомерного шкалирования. URL: <http://www.ccas.ru/voron/download/Clustering.pdf> (дата обращения 23.03.2018).
3. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия. Москва: Финансы и статистика, 1988. 342 с.
4. Kirichenko N.F., Krivonos Yu.G., Lepekha N.P. Optimization of the synthesis of hyperplane clusters and neurofunctional transforms in signal classification system. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, Iss. 6. P. 832–839.
5. Kirichenko N.F., Krivonos Yu.G., Lepekha N.P. Synthesis of systems of neurofunctional transformations in classification problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, Iss. 3. P. 353–361.
6. Kirichenko N.F., Donchenko V.S. Pseudoinverse in clustering problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2007. Vol. 43, Iss. 4. P. 527–541.
7. Kirichenko N.F., Kudin G.I. Analysis and synthesis of signal classification systems by perturbing pseudoinverse and projection operations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, Iss. 4. P. 613–622.
8. Krak Iu.V., Kryvonos Iu.G., Barmak O.V., Ternov A.S. An approach to the determination of efficient features and synthesis of an optimal band-separating classifier of dactyl elements of sign language. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. Vol. 52, Iss. 2. P. 173–180.
9. Sergienko I.V., Khimich A.N., Yakovlev M.F. Methods for obtaining reliable solutions to systems of linear algebraic equations. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2011. Vol. 47, Iss. 1. P. 62–73.
10. Khimich A.N., Nikolaevskaya E.A. Reliability analysis of computer solutions of systems of linear algebraic equations with approximate initial data. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2008. Vol. 44, Iss. 6. P. 863–874.
11. Nikolaevskaya E.A., Khimich A.N. Error estimation for a weighted minimum-norm least squares solution with positive definite weights. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2009. Vol. 49, Iss. 3. P. 409–417.



12. Penrose R. A generalized inverse for matrices. *Proc. of the Cambridge Philosophical Society*. 1955. Vol. 51. P. 406–413.
13. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. Москва: Мир, 1980. 280 с.
14. Ben-Israel A., Greville T.N.E. Generalized inverse: Theory and Applications. (2-nd Ed.). New York: Springer-Verlag, 2003. 420 p.
15. Kirichenko N.F. Analytical representation of perturbations of pseudoinverse matrices. *Cybernetics and Systems Analysis*. 1997. Vol. 33, Iss. 2. P. 230–238.
16. Кривонос Ю.Г., Кириченко М.Ф., Крак Ю.В., Донченко В.С., Куляс А.І. Аналіз і синтез ситуацій в системах прийняття рішень. Київ: Наук. думка, 2009. 365 с.
17. Kirichenko N.F., Krak Yu.V., Polishchuk A.A. Pseudoinverse and projection matrices in problems of synthesis of functional transformers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2004. Vol. 40, Iss. 3. P. 407–419.
18. Kryvonos Iu.G., Krak Iu.V., Barmak O.V., Shkilniuk D.V. Construction and identification of elements of sign communication. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2013. Vol. 49, Iss. 2. P. 163–172.
19. Kryvonos Iu.G., Krak Yu.V., Barchukova Yu.V., Trotsenko B.A. Human hand motion parametrization for dactylomes modeling. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2011. Vol. 43, Iss. 12. P. 1–11.

*Надійшла до редакції 20.06.2018*

**Ю.В. Крак, Г.І. Кудін, А.І. Куляс**  
**БАГАТОВИМІРНЕ ШКАЛЮВАННЯ ЗАСОБАМИ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ ОПЕРАЦІЙ**

**Анотація.** Запропоновано метод багатовимірного шкалювання інформації на основі результатів теорії збурення псевдообернених та проєкційних матриць і розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Розроблено алгоритм кусково-гіперплощинної кластеризації з перевіркою заданого критерію ефективності здійснення такої кластеризації. Наведено приклад використання методу шкалювання характеристичних ознак для розпізнавання букв абетки української жестової мови.

**Ключові слова:** шкалювання, класифікація, кластеризація, псевдообернені матриці.

**Iu.V. Krak, G.I. Kudin, A.I. Kulyas**  
**MULTIVARIATE SCALING BASED ON PSEUDO-INVERSE OPERATIONS**

**Abstract.** The method of multidimensional information scaling based on the results of the theory of perturbation of pseudo-inverse and projective matrices and solutions of systems of linear algebraic equations is proposed in the paper. The algorithm of piecewise hyperplane clusterization with the verification of a given criterion for efficiency of such a clusterization is developed. An example of using the method of scaling characteristic features to recognize letters of the Ukrainian sign language alphabet is given..

**Keywords:** scaling, classification, clusterization, pseudo-inverse matrices.

**Крак Юрий Васильевич,**  
 чл.-кор. НАН Украины, доктор физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, старший научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: krak@univ.kiev.ua.

**Кудин Григорий Иванович,**  
 кандидат физ.-мат. наук, доцент, заведующий лабораторией Киевского национального университета имени Тараса Шевченко, e-mail: kudin@unicyb.kiev.ua.

**Куляс Анатолий Иванович,**  
 кандидат техн. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: kulyas@nas.gov.ua.