

РАЗРАБОТКА РОБАСТНОГО АЛГОРИТМА ГАРАНТИРОВАННОГО ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ ОРИЕНТАЦИИ ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА ЗЕМЛИ

Аннотация. Разработан метод оценивания линейных многомерных динамических управляемых систем, возмущаемых только по одной фазовой координате. В системе также доступна измерению только одна фазовая координата, по которой не действует возмущение. Создан робастный алгоритм эллипсоидального оценивания, минимизирующий след матрицы эллипсоида, который аппроксимирует допустимое множество точечных оценок. Применение метода и работоспособность алгоритма показаны на примере оценивания курсового угла искусственного спутника Земли в процессе его движения по орбите. Для оценивания используются показания бортовых построителя местной вертикали и датчиков угловой скорости.

Ключевые слова: робастный алгоритм гарантированного эллипсоидального оценивания, ориентация искусственного спутника Земли, гироскопический датчик угловой скорости, инфракрасный построитель местной вертикали.

ВВЕДЕНИЕ

В статье приводится алгоритм гарантированного эллипсоидального оценивания состояний линейной динамической системы и показана его работа при оценивании ориентации искусственного спутника Земли. Условия, на основании которых применяется алгоритм: внешнее возмущение действует на систему по всем фазовым координатам либо только по одной из них; измерение, содержащее помеху, проводится только по одной фазовой координате; возмущаемая и измеряемая координаты в общем случае не совпадают. О возмущении и помехе известны только их граничные значения, а их статистические и динамические характеристики неизвестны. Система считается полностью управляемой и наблюдаемой. Разомкнутая система может быть неустойчивой, но в замкнутом состоянии становится устойчивой. Необходимо оценить возможное фазовое состояние системы. Для этого сначала строится множество достижимости возможных состояний системы [1], представляющее эллипсоидальную аппроксимацию суммы эллипсоида начального состояния системы (или очередной оценки) и эллипсоида помехи (либо в частном случае отрезка). Решение для частного случая, полученное в работе [2], оптимально по критерию минимума объема аппроксимирующего эллипсоида. Для невырожденного случая, когда оба множества являются эллипсоидами, решение приведено в [1]. В работе [3] получено решение по критерию суммы четвертых степеней полуосей результирующего эллипсоида.

Удобным критерием является минимизация следа матрицы результирующего эллипсоида, поскольку предложенный в данной работе алгоритм имеет прямую аналогию со статистическим оцениванием и, как будет показано далее, не требует сложных вычислений. Если это не приведет к большой потере точности оценки, то целесообразны некоторые упрощения алгоритма. В работе [4], например, был предложен упрощенный способ получения эллипсоида без трудоемкой процедуры обращения матрицы исходного эллипсоида. Это позволило упростить вычисления за счет незначительного отступления от оптимальности и использовать вырожденную матрицу.

Поскольку система наблюдаема, то возможно уточнение множества ее состояний по результатам измерений. Это уточнение представляет собой эллипсоидаль-

ную аппроксимацию пересечения множества достижимости и множества измерения и может проводиться по разным критериям, в том числе и по минимуму объема получаемого эллипсоида, и по минимуму следа его матрицы. Измерение одной фазовой координаты геометрически представляет множество — «гиперслой» в пространстве состояний, которому принадлежит вектор фазового состояния системы по результатам измерений. Если измеряется несколько фазовых координат, множество измерений представляет пересечение соответствующего числа гиперслоев. При пересечении множества измерений с множеством возможных состояний получим уточненное множество возможных состояний системы, которое также аппроксимируется эллипсоидом. Решение в аналитическом виде может быть получено лишь для частных случаев. Для случая, когда множество измерения представляет гиперслой, были найдены точные решения в классе эллипсоидов по критерию минимума объема и следа матрицы аппроксимирующего эллипсоида [5]. В общем случае решение задачи аппроксимации получают численными методами с требуемой степенью приближения [6–8].

Рассмотрим получение эллипсоида, аппроксимирующего пересечения эллипсоида состояний с гиперслоем изменения, оптимального по критерию минимума следа. Для этого необходимо решать кубическое уравнение, запись корней которого в явном виде представляется трудоемкой при анализе влияния параметров на получаемую оценку [9, 10]. Для практического программирования такого алгоритма простой вариант выражений может оказаться предпочтительнее, чем сохранение оптимальности получаемой оценки, тем более если получаемая субоптимальная оценка отличается незначительно от оптимальной. Таким образом, будем строить эллипсоидальную оценку состояния системы при описанных выше предположениях по критерию минимума следа матрицы эллипсоида. Для построения алгоритма используются результаты, полученные в [2, 11]. Для иллюстрации работы алгоритма рассмотрим задачу оценивания углов курса и крена искусственного спутника Земли по показаниям построителя местной вертикали (ПМВ) и датчика угловой скорости (ДУС) в процессе орбитального движения спутника.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭЛЛИпсоИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим линейную управляемую систему с аддитивной помехой, действующей на ее входе, и приблизительно известным начальным состоянием. Уравнение системы имеет вид

$$x_{j+1} = A_j x_j + w_j, j \in T_0. \quad (1)$$

Здесь $j \in T_0 = [0, 1, \dots, k]$ — дискретное время ($k < \infty$), $x_j \in R^n$ — вектор фазового состояния в j -й момент времени, $w_j \in R^n$ — вектор помехи, $A_j \in R^{n \times n}$.

Помеха w_j действует аддитивно по отношению к управлению:

$$w_j = \rho f, f \in R^n, \|f\| = 1 \quad \forall j \in T_0 \quad |\rho| \leq d, d \geq 0, \text{ либо } w_j^T Q_j^{-1} w_j \leq 1 \quad \forall w_j \neq 0. \quad (2)$$

Пара (A_j, f) — управляема. Здесь f — единичный орт R^n , который в общем случае может иметь проекции на все фазовые координаты в пространстве состояний, а в частном случае проектируется только на определенную фазовую координату, по отношению к которой действует возмущение; $d \geq 0$ — заданная константа; $Q_j = Q_j^T > 0$ — известная положительно-определенная матрица, ограничивающая соответственно значение возмущающего воздействия.

Для множества реализаций помехи вида $w_j = \rho f$ запишем

$$\{w_j: |l^T w_j| \leq d \sqrt{l^T f f^T l} \quad \forall l \in R^n\}, \quad (3)$$

где $l \in R^n$ — произвольный вектор.

Вектор $x_0 \in R^n$ начального состояния задан приблизительно. Известно, что он может принимать значения из ограниченного эллипсоидального множества

$$E_0 = \{x_0: (x_0 - \tilde{x}_0)^T H_0^{-1} (x_0 - \tilde{x}_0) \leq 1\}, \quad (4)$$

где $\tilde{x}_0 \in R^n$ — центр эллипсоида, а $H_0 \in R^{n \times n}$ и $H_0^T = H_0 > 0$ — заданы.

Необходимо аппроксимировать сумму по Минковскому эллипсоида (4) и множества помехи (3) эллипсоидом, минимальным по заданному критерию.

В [2] для решения задачи использовалось неравенство

$$\|x\| + \|y\| \leq \sqrt{\gamma_1 x^T x + \gamma_2 y^T y}, \quad x, y \in R^n, \quad \gamma_1^{-1} + \gamma_2^{-1} = 1, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0. \quad (5)$$

Тогда матрицу эллипсоида, аппроксимирующего сумму двух эллипсоидов, запишем так:

$$H_{j+1}(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_{1,j} f f^T d^2 + \gamma_{2,j} H_{j+1|j}), \quad (6)$$

где $H_{j+1|j} = A H_j A^T$, а центр эллипсоида \tilde{x}_j вычисляется как $\tilde{x}_{j+1} = A \tilde{x}_j$.

Из (6) можно получить параметры оптимального эллипсоида по разным критериям. В [2] получены выражения для эллипсоида минимального объема. Следуя этому подходу, получим эллипсоид с минимальным следом его матрицы.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ СУММЫ ДВУХ ЭЛЛИПСОИДОВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СЛЕДА ЕГО МАТРИЦЫ

Утверждение 1. Матрица эллипсоида, аппроксимирующего сумму двух эллипсоидов (один из которых вырожден в отрезок), имеющая минимальный след, запишем в виде

$$H_{j+1}(\gamma_{1,j}^*, \gamma_{2,j}^*) = \bar{k}^{-1} (1 + \bar{k}) f f^T d^2 + (1 + \bar{k}) H_{j+1|j},$$

$$\bar{k}_j^2 = f^T f d^2 (\text{trace } H_{j+1|j})^{-1}. \quad (7)$$

Доказательство. Из (5) получим $\gamma_{1,j} = \gamma_{2,j} (\gamma_{2,j} - 1)^{-1}$ и запишем след матрицы (7) в виде

$$\text{trace } H_{j+1}(\gamma_{1,j}, \gamma_{2,j}) = \gamma_{2,j} (\gamma_{2,j} - 1)^{-1} f^T f d^2 + \gamma_{2,j} \text{trace } H_{j+1|j} \quad (8)$$

с учетом свойства $\text{trace}(AA^T) = \text{trace}(A^T A)$. Продифференцируем (8) по $\gamma_{2,j}$, приравняем его к нулю и умножим на $(\gamma_{2,j} - 1)^2$:

$$\text{trace } H_{j+1|j} \gamma_{2,j}^2 + 2\gamma_{2,j} (f^T f d^2 - \text{trace } H_{j+1|j}) - f^T f d^2 = 0. \quad (9)$$

Поскольку согласно условию $\text{trace } H_{j+1|j} > 0$, то разделим (9) на $\text{trace } H_{j+1|j}$ и перепишем результат в виде $\gamma_{2,j}^2 - 2\gamma_{2,j} + 1 - \bar{k}_j^2 = 0$, откуда получим решение: $\gamma_{2,j} = 1 \pm \bar{k}$. Согласно условию $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ из (5) берем знак + и запишем $\gamma_{2,j}^* = 1 + \bar{k}$; после подстановки в (6) получим (7).

Замечание 1. Для ограничения вида $w_j^T Q_j^{-1} w_j \leq 1 \quad \forall w_j \neq 0$ имеем $\bar{k}_j^2 = \text{trace } Q_j (\text{trace } H_{j+1|j})^{-1}$.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА И ГИПЕРСЛОЯ

Пусть имеется измерительное устройство, описываемое уравнением

$$y_j = h^T x_j + \xi_j, |\xi_j| \leq c, j=1,2,\dots, \quad (10)$$

где $y_j \in R^1$; $h \in R^n$, $\|h\|=1$ — параметр измерительного устройства; $\xi_j \in R^1$ — ограниченная помеха измерений; $c \geq 0$ — заданная константа. Уравнение измерений (10) в пространстве R^n определяет гиперслоем

$$S(y_j, x_j) = S_j = \{x_j: (y_j - h^T x_j)^2 \leq c^2\}. \quad (11)$$

На основании (7) и (11) строится гарантированная эллипсоидальная оценка (аппроксимирующий эллипсоид), меньшая по следу матрицы, чем матрица (7) исходного эллипсоида:

$$E_{j+1} \supset E_j \cap S_j, E_{j+1} = \{x_{j+1}: (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T H_{j+1}^{-1} (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1}) \leq 1\}; \quad (12)$$

для вырожденного эллипсоида E_{j+1} запишем

$$E_{j+1} \supset E_j \cap S_j, E_{j+1} = \{x_{j+1}: (x_{j+1} - \bar{x}_{j+1})^T l \leq \sqrt{l^T H_{j+1} l} \forall l \in R^n, l \neq 0\}. \quad (13)$$

Если след полученной матрицы больше, то оставляется исходный эллипсоид.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ЭЛЛИПСОИДА И ГИПЕРСЛОЯ

Для решения задачи воспользуемся соотношениями из работы [11]:

$$\bar{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + \tau_j e_j^{-1} H_j h_j \sigma_j, \quad (14)$$

$$H_{j+1} = (H_j - \tau_j e_j^{-2} H_j h h^T H_j) \gamma_j^2, \quad (15)$$

$$\gamma_j^2 = 1 + \tau_j (\chi_j^2 (1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2), \quad (16)$$

$$e_j^2 = h_j^T H_j h_j, \sigma_j = \Delta_j e_j^{-1}, \chi_j^2 = c^2 e_j^{-2}, \tau_j \leq e_j^2 (q_j^{-1} + e_j^2)^{-1},$$

$$0 \leq \tau_j < 1, q_j^{-1} \geq c e_j, \quad (17)$$

где \tilde{x}_j — центр эллипсоида, аппроксимирующего множество достижимости системы; \bar{x}_{j+1} — центр эллипсоида, аппроксимирующего множество возможных состояний системы после учета множества измерения; при повторении цикла в (4) принимаем $\tilde{x}_{j+1} \equiv \bar{x}_{j+1}$; $\Delta_j = y_j - h_j^T \tilde{x}_j$ — расстояние от центра исходного эллипсоида до середины гиперслоя; τ_j — шаг алгоритма; $q_j^{-1} \geq c e_j$ — подстроечный параметр, где равенство означает касание гиперслоя и исходного эллипсоида, а неравенство означает пересечение [11].

Запишем условие информативности наблюдений — условие уменьшения следа матрицы полученного эллипсоида по сравнению с исходным. Из (15) имеем

$$\text{trace } H_{j+1} = (\text{trace } H_j - \tau_j e_j^{-2} h^T H_j^2 h) \gamma_j^2. \quad (18)$$

Наблюдение будет информативным, если

$$(\text{trace } H_j)^{-1} \text{trace } H_{j+1} = \gamma_j^2 (1 - \tau_j \tilde{e}_j^2) < 1, \quad (19)$$

где $\tilde{e}_j^2 = e_j^{-2} h^T H_j^2 h (\text{trace } H_j)^{-1}$.

Необходимо найти $0 \leq \tau_j < 1$ такое, чтобы левая часть (19) была как можно меньше. Для точного решения задачи рассматриваемого случая необходимо найти действительный корень кубического уравнения [5], удовлетворяющий ограничению $0 \leq \tau_j < 1$:

$$2\tilde{e}_j^2 \sigma_j^2 \tau_j^3 + (\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1) - \sigma_j^2 (4\tilde{e}_j^2 + 1)) \tau_j^2 + 2((\sigma_j^2 - \chi_j^2 + 1)\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2) \tau_j + \chi_j^2 - \sigma_j^2 - \tilde{e}_j^2 = 0. \quad (20)$$

Его можно получить, продифференцировав по τ_j выражение $\gamma_j^2 (1 - \tau_j \tilde{e}_j^2)$ из (19) и приравняв производную к нулю.

Известно, что полное кубическое уравнение имеет три корня, которые могут быть либо действительными, либо один из них будет действительным, а два — комплексно-сопряженными. Последний случай достаточно прост: для анализа решения на ограничение $0 \leq \tau_j < 1$ проверяется только действительный корень. Если корень удовлетворяет этому ограничению, то он используется для получения оценок (14), (15). Иначе полагают $\tau_j = 0$ и соответственно $H_{j+1} \equiv H_j$, $\bar{x}_{j+1} \equiv \tilde{x}_j$. Если три корня действительны, то может оказаться, что все они удовлетворяют условию $0 \leq \tau_{j(i)} < 1$, $i = 1, 2, 3$. Во избежание этого необходимо предусмотреть ограничения на параметры уравнения (20): \tilde{e}_j^2 , σ_j^2 , χ_j^2 и на их соотношение. Найдем решение (20) при $\sigma_j^2 = 1$, $\chi_j^2 \rightarrow 0$. Это означает, что $E_j \cap S_j \rightarrow \{\tilde{x}_{j+1}\}$, т.е. множество пересечения вырождается в точку. В результате имеем $\tau_{j(1,2,3)} = 1, 5; 1; 1$. Выбрав аналитическую запись решения, соответствующую $\tau_j = 1$, подставив ее в (16) и устремив $\chi_j^2 \rightarrow 0$, получим $\tau_j \rightarrow 1$, $\gamma_j^2 \rightarrow 0$. Тогда согласно (14), (15) имеем $\bar{x}_{j+1} = \tilde{x}_j + H_j h_j e_j^{-1}$; $H_{j+1} = 0$. Эллипсоид, определяемый выражением (15), при этом вырождается в точку, но остается пригодным для дальнейших операций с ним по формуле (7). В этом состоит преимущество критерия минимизации суммы квадрата полуосей (минимума следа) по отношению к критерию минимизации произведения длин полуосей (объема) аппроксимирующего эллипсоида. В последнем критерии случай вырождения матрицы приводит к нулевому значению критерия вне зависимости от длин остальных полуосей. Если необходимо получать невырожденную матрицу (15), то при $\chi_j^2 < \delta_\chi$, где δ_χ — некоторая константа, полагаем $\chi_j^2 = \delta_\chi$ и продолжаем вычисления по формуле (16).

Положим $\sigma_j^2 = 0$. Тогда $\bar{x}_{j+1} = \tilde{x}_j$ и кубическое уравнение (20) станет квадратным:

$$\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1) \tau_j^2 - 2\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1) \tau_j + \chi_j^2 - \tilde{e}_j^2 = 0. \quad (21)$$

Записав решение (21) в явном виде, подставим его в (16) и при $\chi_j^2 \rightarrow 0$ получим $\tau_j \rightarrow 1$, $\gamma_j^2 \rightarrow 1$. Эллипсоид, определяемый (15), при этом становится на одну размерность меньше.

Для получения соотношений параметров, при которых $\tau_j = 0$, запишем решение уравнения (21):

$$\tau_{j(1,2)} = \left(2(\chi_j^2 - 1)\tilde{e}_j^2 \pm \sqrt{(2\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1))^2 - 4\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1)(\chi_j^2 - \tilde{e}_j^2)} \right) (2\tilde{e}_j^2 (\chi_j^2 - 1))^{-1}. \quad (22)$$

Из (22) следует условие $\chi_j^2 \neq 1$. Если $\chi_j^2 \geq 1$, то из (17) следует, что исходный эллипсоид полностью содержится в гиперслое S_j (11). Тогда полагаем $E_{j+1} \equiv E_j$, $H_{j+1} \equiv H_j$, $\bar{x}_{j+1} \equiv \bar{x}_j$. Приравняв первый сомножитель в (22) к нулю, получим $\chi_j^2 = \tilde{e}_j^2$ при условии $\tau_j = 0$, $\gamma_j^2 = 1$.

Ввиду сложности решения кубического уравнения [9, 10] необходимо проследить выполнимость условий $\sigma_j^2 > \delta_\sigma$ и $\delta_\chi < \chi_j^2 < 1$ для своевременного перехода от уравнения (20) к уравнению (21) и соответственно избегать деление на ноль в выражениях (22) и (16). Если $\sigma_j^2 \rightarrow 0$, $\chi_j^2 \rightarrow 0$, то корни уравнений (20) или (21), а также значение (16) (для случая $\chi_j^2 \rightarrow 0$) будут вычисляться с большой погрешностью, поэтому найденное значение τ_j существенно будет отличаться от его оптимального значения. Чтобы этого избежать, будем искать приближенное, но и более простое для программирования решение.

Лемма 1 (о выборе шага τ_j). Получим выражение для шага τ_j следующим образом. Подставив (16) в выражение $\gamma_j^2(1 - \tau_j \tilde{e}_j^2) < 1$ из (19), прологарифмируем полученное неравенство: $\ln(1 + \tau_j(\chi_j^2(1 - \tau_j)^{-1} - \sigma_j^2)) < -\ln(1 - \tau_j \tilde{e}_j^2)$. Воспользовавшись неравенством [12] $\ln(1 + \tau) \leq \tau \forall \tau > -1$, получим $\tau_j((1 - \tau_j)^{-1} \chi_j^2 - \sigma_j^2) \leq \tau_j \tilde{e}_j^2$, откуда имеем $(1 - \tau_j)^{-1} \leq (\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2) \chi_j^{-2}$ и далее $1 - \tau_j \geq \chi_j^2 (\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2)^{-1}$. Отсюда, выбрав равенство, получим

$$\tau_j = 1 - \chi_j^2 (\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2)^{-1}. \quad (23)$$

При прохождении гиперплоскости, являющейся серединой гиперслоя, через центр исходного эллипсоида при условии $\chi_j^2 = \tilde{e}_j^2$ измерение S_j становится неинформативным при вычислении τ_j согласно (22). Это доказывается приравнением (22) и (23) к нулю. Подставим выражение (23) в (16):

$$\gamma_j^2 = 1 + \tilde{e}_j^2 - \chi_j^2 \tilde{e}_j^2 (\tilde{e}_j^2 + \sigma_j^2)^{-1}. \quad (24)$$

Отсюда видно, что при условии $\text{trase } H_j \neq 0$ (условие $H_j = 0$ на практике невозможно, поскольку погрешность измерения имеет место всегда) выражения (23), (24) всегда имеют смысл.

Пусть $\sigma_j^2 = 0$, $\chi_j^2 = 0$. Тогда в (23) $\tau_j = 1$, а в (24) $\gamma_j^2 = 1 + \tilde{e}_j^2$. При возрастании размерности пространства состояний n параметр \tilde{e}_j^2 уменьшается и $\gamma_j^2 \rightarrow 1$.

Далее подставим в явном виде решение уравнений (20) или (21) в выражение (16). При $\chi_j^2 \rightarrow 0$ получим в пределе неопределенность: $0/0$. Таким образом, выражения (23), (24) намного удобнее для практического использования, чем решение (20).

КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОЦЕНИВАНИЯ ОРИЕНТАЦИИ СПУТНИКА ВО ВРЕМЯ ЕГО ОРБИТАЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

В уравнении (1) приняты следующие переменные и параметры [13]: $x_j = [\varphi_j, \psi_j]^T$, где φ_j — крен, ψ_j — курс; матрица $A = e^{\Omega \Delta t}$, где

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{\text{ORS}} \\ \omega_{\text{ORS}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega_{\text{ORS}} \text{ — угловая скорость вращения орбитальной системы координат (ORS) относительно инерциальной системы координат вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты.}$$

Далее введем Δt — временной интервал, в котором момент управления движением спутника вокруг его центра масс остается постоянным. Модель помехи (2): $f = [0, 1]^T$, т.е. действие возму-

щения направлено только на неизмеряемую переменную, поскольку величина возмущения по переменной φ_j всегда ограничена погрешностью измерителя этого угла; $\rho = d = \omega_{\text{drift}} \Delta t = \text{const}$, где ω_{drift} — «сдвиг нуля» ДУС по каналу курса. В уравнении измерительного устройства (10) $h = [1, 0]^T$ измеряется только φ_j с погрешностью ξ_j . Характеристики спутника были взяты из работ [14, 15], основное отличие которых (что важно для моделирования) — это разные законы управления угловым движением спутника. Моделирование показало, что закон управления не влияет на точность ориентации при принятых

параметрах. Спутник с расчетным $J = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 90 \end{bmatrix}$ и фактическим

$J_p = \begin{bmatrix} 90 & -0,2 & 0,2 \\ -0,2 & 60 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 90 \end{bmatrix}$ тензорами инерции (размерность элементов в кг/м²)

вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом $R_{\text{orb}} = 6878$ км. На спутник в его угловом движении вокруг собственного центра масс действует неизвестный, но ограниченный по величине возмущающий момент M_{dst} , заданный

компонентами: $M_{\text{dst},i} = b_i \sin(\omega_{\text{dst}} t + \beta_i)$; $b_i = 10^{-4}$, $i = 1, 2, 3$; $\omega_{\text{dst}} = 6\text{с}^{-1}$; $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \pi/4$, $\beta_3 = \pi/2$.

На борту спутника имеются ПМВ, измеряющий углы крена φ_j и тангажа θ_j , и ДУС [16]. Рассмотрим два варианта размещения ДУС: либо один ДУС низкого класса точности 3-степенной, измеряющий проекцию абсолютной угловой скорости на две ортогональные оси, либо два прецизионных 2-степенных ДУС, каждый из которых измеряет проекцию угловой скорости на свою измерительную ось. В качестве измерительного устройства взята упрощенная модель ПМВ из работы [17]. Было учтено запаздывание показаний ПМВ и принята частота (1 Гц) выдачи информации об углах крена φ и тангажа θ . Точность ориентации по курсу моделировалась для двух вариантов: до инструментальной погрешности — $\pm 4'$ и с учетом алгоритмической компенсации — до $1'$. Погрешность измерения ξ_j задавалась

в виде шума, равномерно распределенного в диапазонах $\pm 4'$ либо $\pm 1'$ соответственно. Точностные характеристики ДУС были взяты от 3-степенного ИУС-2М и от 2-степенного ДУС-Л-9Д [18]. Погрешность их показаний моделировалась постоянным сдвигом нулевого сигнала $0,02^\circ/\text{с}$ для ИУС-2М и $0,0001^\circ/\text{с}$ для ДУС-Л-9Д. Частота изменения управляющего момента — $0,5$ Гц, соответственно $\Delta t = 2$ с. Моделировалась стабилизация спутника в орбитальной системе координат [14] за один оборот спутника по орбите вокруг Земли. В матрицу Ω подставлялось не расчетное значение ω_{ORS} , а угловая скорость, измеренная ДУС по каналу тангажа. Время оборота — 5677с . Наблюдатель (14) структурно подобен наблюдающему устройству для такого же объекта, приведенного в работе [13], с соответствующим представлением их описания в дискретном виде. Однако матрица эллипсоидального множества состояний системы и ковариационно-дисперсионная матрица в фильтре Калмана по структуре не соответствуют одна другой. Иными словами, дискретный наблюдатель состояния системы ориентации при наблюдении двух переменных и измерении одной переменной имеет вид

$$\bar{x}_{j+1} = e^{A\Delta t_j} \bar{x}_j + \tau_j e_j^{-1} H_j h (y_j - h^T e^{A\Delta t_j} \bar{x}_j).$$

Выражение (7) для матрицы эллипсоида множества достижимости принимает вид

$$H_{j+1} = (1 + \bar{k})(\bar{k}^{-1} f f^T (d\Delta t_j)^2 + e^{A\Delta t_j} H_j e^{A^T \Delta t_j}),$$

$$\bar{k}_j^2 = f^T f (d\Delta t_j)^2 \text{trace}(e^{A\Delta t_j} H_j e^{A^T \Delta t_j})^{-1}. \quad (25)$$

В случае ограничений возмущения (2) вида $w_j^T Q_j^{-1} w_j \leq 1 \quad \forall w_j \neq 0$ запишем (25) в виде

$$H_{j+1} = (1 + \bar{k})(\bar{k}^{-1} Q(\Delta t_j)^2 + e^{A \Delta t_j} H_j e^{A^T \Delta t_j}),$$

$$\bar{k}_j^2 = \text{trace}(e^{A \Delta t_j} H_j e^{A^T \Delta t_j})^{-1} (\Delta t_j)^2 \text{trace} Q.$$

Начальное значение $H_0 = (3c)^2 I_2$, где I_2 — единичная 2×2 -матрица; c — максимальное значение погрешности определения углов крена и тангажа ПМВ для двух вариантов моделирования: $\pm 4'$ и $\pm 1'$. Начальное значение $\bar{x}_0^T = [0, 0]$.

Моделирование выполнялось в среде MATLAB. Для интегрирования уравнений выбран метод Рунге–Кутты 4-го и 5-го порядков постоянно-го шага [19].

На рис. 1 представлены графики зависимости углов ψ , φ , θ от времени t при постоянной «неизвестной» погрешности ДУС $\omega_{\text{drift}} = 0,02^\circ/\text{с}$ и точности определения угла крена φ , равного $\pm 1'$. При моделировании время одного витка спутника по орбите составляет 5678 с. При завершении оборота курсовой угол равен приблизительно $0,7^\circ$. При умножении $\omega_{\text{drift}} = 0,02^\circ/\text{с}$ на 5678 с имеем 114° , что свидетельствует об эффективной работе наблюдателя.

На рис. 2 представлен результат моделирования при тех же условиях, но погрешность измерения угла φ составляет $\pm 4'$. При завершении оборота курсовой угол равен приблизительно 13° . Уменьшение погрешности ДУС не привело к заметному улучшению и здесь не отражено. Отсюда следует, что точность угловых измерений играет основную роль при оценивании ψ .

При моделировании перехода с теневой на освещенную сторону Земли получен следующий результат: изменилась погрешность выдачи углов φ , θ ПМВ с $\pm 1'$ до $\pm 4'$. Это произошло на 2000-й секунде. Вследствие этого после нескольких циклов оценивания наступила «несовместность» [11]: $E_j \cap S_j = \emptyset$. В данном методе оценивания предусмотрена проверка условия: $1 + \chi_j \geq \sigma_j$. Если это условие

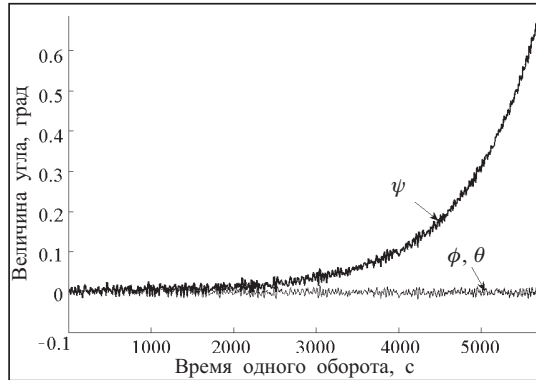


Рис. 1

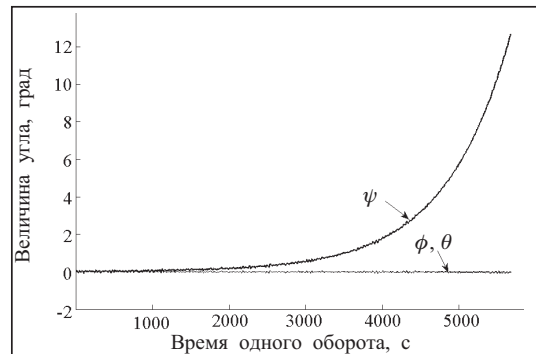


Рис. 2

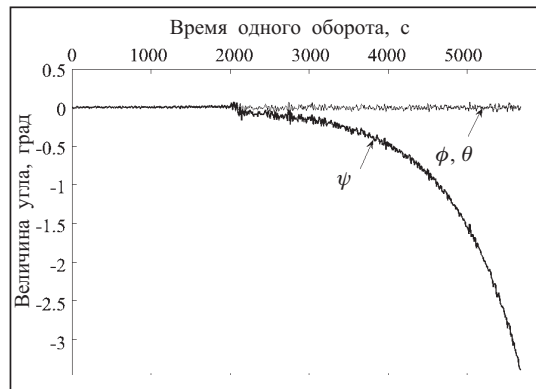


Рис. 3

нарушается, то имеет место несовместность и в алгоритме переопределяется параметр $\chi_j^2 = \sigma_j^2$ [4], и далее происходит процесс масштабирования принятого максимального значения помехи измерения до тех пор, пока не наступит устойчивая совместность. Результат моделирования показал, что наблюдение за состоянием системы восстановилось (рис. 3).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты моделирования показали с практической точки зрения полное соответствие модели движения спутника реальному движению, работоспособность выбранного комплекта приборов ориентации и надежную работу алгоритма оценивания курсового угла спутника. Если возмущение действует по каналам крена и курса, т.е. имеет место ограничение вида $w_j^T Q_j^{-1} w_j \leq 1$ $\forall w_j \neq 0$, то точность оценки ухудшается. Результаты этого моделирования здесь не приводятся. К сожалению, имеющаяся чувствительность к начальной оценке курсового угла, обусловленная уравнениями, описывающими угловое движение твердого тела, имеет место и в процессе оценивания робастным алгоритмом. Начальная ошибка в оценке курсового угла и значительные ошибки в измерении угла крена могут привести к потере устойчивости управляемого движения спутника вокруг его центра масс вследствие экспоненциального роста ошибки оценивания курсового угла. Также очевидно, что с увеличением радиуса орбиты спутника возрастают требования к точности приборов ПМВ и ДУС, поскольку время одного витка увеличивается. Таким образом, при заданной погрешности нахождения ψ можно определить требование к классу точности ПМВ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Москва: Наука, 1988. 320 с.
2. Бакан Г. М., Шолохов А.В. К задаче гарантированного оценивания точности управляемой линейной системы. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2005. № 4. С. 44–51.
3. Хонин В.А. Гарантированные оценки состояния линейных систем с помощью эллипсоидов. Эволюционные системы в задачах оценивания. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1985. С. 104–123.
4. Шолохов А. В. К эллипсоидальному оцениванию состояния линейной динамической системы по скалярному наблюдателю. *Системні дослідження та інформаційні технології*. 2008. № 3. С. 78–87.
5. Волосов В.В. Об одном способе построения эллипсоидальных оценок в задачах нестохастической фильтрации и идентификации параметров управляемых систем. *Автоматика*. 1991. № 3. С. 24–32.
6. Шор Н.З., Березовский О.А. Алгоритмы построения инвариантного эллипсоида минимального объема для устойчивой динамической системы. *Кибернетика и системный анализ*. 1995. № 3. С. 130–137.
7. Черноусько Ф.Л. Об оптимальном эллипсоидальном оценивании для динамических систем, подверженных неопределенным возмущениям. *Кибернетика и системный анализ*. 2002. № 2. С. 85–95.
8. Стецюк П. И. Приближенный метод эллипсоидов. *Кибернетика и системный анализ*. 2003. № 3. С. 141–146.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т.1. Москва: Наука, 1974. 479 с.
10. Несмеев Ю.А. Алгоритм решения кубического уравнения. *Вестник Томского ГУ. Сер. Математика и механика*. 2014. № 5 (31). С. 30–39.
11. Бакан Г.М., Шолохов А.В. К построению робастного алгоритма гарантированного оценивания состояния линейной управляемой системы. *Проблемы управления и информатики*. 2007. № 1. С. 16–25.
12. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами. Абрамовиц М., Стиган И. (ред.) Москва: Наука, 1979. 832 с.
13. Кузовков Н.Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. Москва: Машиностроение, 1976. 184 с.
14. Волосов В.В., Куценко И.А., Селиванов Ю.А. Разработка и исследование робастных алгоритмов эллипсоидального оценивания инерционных характеристик космического аппарата, управляемого силовыми гироскопами. *Проблемы управления и информатики*. 2005. № 4. С. 124–139.

15. Волосов В.В., Хлебников М.В., Шевченко В.Н. Алгоритм прецизионного управления ориентацией космического аппарата при действии неконтролируемого возмущения. *Проблемы управления и информатики*. 2011. № 2. С. 114–121.
16. Бельский А.Д., Васильев В.Н., Семенов М.Е. Исследование динамики ориентации и стабилизации по курсу космического аппарата «Метеор-М» при использовании информации инфракрасной вертикали и датчиков угловой скорости. *Вопросы электромеханики*. 2008. Т. 107. С. 38–45.
17. Гандлевский Ю.М., Михайлов Е.Н., Мосолова Ю.С., Рабовский А.Е. Оценка точности инфракрасных построителей местной вертикали по результатам летных испытаний. *Вопросы электромеханики*. 2014. Т.141. С. 31–38.
18. Розрахунок і проектування гіростабілізаторів. Методичні вказівки до вивчення дисципліни «Гіроскопічні системи стабілізації та орієнтації». Укладачі О.І. Нестеренко, А.В. Шевчук. Київ, 2003. 76 с.
19. Лазарев Ю.Ф. MATLAB 6.5. Математическое моделирование физических процессов и технических систем. Учебный курс. Киев: Политехника, 2004. 474 с.

Надійшла до редакції 17.09.2018

Н.Д. Панкратова, О.В. Шолохов

**РОЗРОБКА РОБАСТНОГО АЛГОРИТМУ ГАРАНТОВАНОГО
ЕЛІПСОЇДАЛЬНОГО ОЦІНЮВАННЯ І ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ
ДЛЯ ОРІЄНТАЦІЇ ШТУЧНОГО СУПУТНИКА ЗЕМЛІ**

Анотація. Розроблено метод оцінювання лінійних багатовимірних динамічних керованих систем, які збурюються тільки за однією фазовою координатою. У системі доступна вимірюванню також тільки одна фазова координата, вздовж якої не діє збурення. Створено робастний алгоритм еліпсоїдального оцінювання, який мінімізує слід матриці еліпсоїда, що апроксимує допустиму множину точкових оцінок. Застосування методу і працездатність алгоритму показано на прикладі оцінювання курсового кута штучного супутника Землі в процесі його руху по орбіті. Для оцінювання використовуються показання бортових побудовувача місцевої вертикалі і датчиків кутової швидкості.

Ключові слова: робастний алгоритм гарантованого еліпсоїдального оцінювання, орієнтація штучного супутника Землі, гіроскопічний датчик кутової швидкості, інфрачервоний побудовувач місцевої вертикалі.

N.D. Pankratova, O.V. Sholokhov

**DEVELOPMENT OF THE ROBUST ALGORITHM OF THE GUARANTEED
ELLIPSOIDAL ESTIMATION AND ITS APPLICATION FOR ORIENTATION
OF THE EARTH ARTIFICIAL SATELLITE**

Abstract. The method of estimation of linear multidimensional dynamic control systems perturbed by only one of the phase coordinates is developed in the paper. Only one phase coordinate on which perturbation is not operated is available for measurement in the system. A robust algorithm for ellipsoidal estimation is developed, which minimizes the trace of the matrix of ellipsoid that approximates admissible set of point estimates. Application of the method and efficiency of the algorithm are shown on the example of estimating the heading angle of an artificial Earth satellite during its orbital motion. The onboard builder of local vertical and angular velocity sensors are used for the estimation.

Keywords: robust algorithm of guaranteed ellipsoidal estimation, orientation of artificial Earth satellite, gyroscopic thahometer, infrared builder of local vertical.

Панкратова Наталья Дмитриевна,

чл.-кор. НАН України, доктор техн. наук, професор, завідувача відомом, заступник директора Інститута прикладного системного аналізу НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: natalidmp@gmail.com.

Шолохов Алексей Викторович,

асистент кафедри Інститута прикладного системного аналізу НТУУ «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», e-mail: gyroalex@ukr.net.