УДК 519.1

А.Л. ГУРИН

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О МАТЕМАТИЧЕСКИХ СЕЙФАХ НА МАТРИЦАХ С РАЗНЫМИ ТИПАМИ ЗАМКОВ

Аннотация. Рассматривается задача о математических сейфах на матрицах с замками различных типов. Для исследования применяется метод выделения подсистем, разработанный и обоснованный в предыдущих работах автора для более простых сейфов. Исследуется задача для сейфов с замками двух типов. Приводятся примеры решения такой задачи.

Ключевые слова: матрица состояний, матрица решения, подсистемы первого и второго родов, обратная матрица, однотипные сейфы, простой модуль, составной модуль.

Понятие математического сейфа было введено в [1]. Используем некоторые определения из этой работы. Математическим сейфом на матрице называется система замков $Z=(z_{ij})_{mn}$ такая, что если осуществляется поворот ключа в замке z_{kl}, то такой же поворот происходит во всех замках, находящихся в k-й строке и l-м столбце. Для каждого математического сейфа существует начальное состояние, которое задается матрицей $B=(b_{ij})_{mn}$, где $0 \le b_{ij} \le k_{ij}-1$, при этом k_{ij} соответствует числу состояний замка z_{ij}. Задача состоит в том, что исходя из начального состояния сейфа найти такую матрицу $X=(x_{ij})_{mn}$, чтобы после выполнения x_{ij} поворотов в соответствующих замках сейф пришел в состояние $B_{\text{fin}}=(b_{ij}=0)_{mn}$.

Если все k_{ij} равны, т.е. $k_{ij}=K$, то сейфы называются сейфами с однотипными замками. Такие сейфы рассматривались в работе [2] для $K=2$ и в работе [3] для произвольных простых K.

Введем обозначения $\boldsymbol{b}=(b_{11}, b_{12}, \ldots, b_{1n}, \ldots, b_{21}, b_{22}, \ldots, b_{2n}, \ldots, b_{p1}, b_{p2}, \ldots$ $\ldots, b_{pn}, \ldots, b_{m1}, b_{m2}, \ldots, b_{mn})$, $\boldsymbol{x}=(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, x_{m2}, \ldots$ $\ldots, x_{mn})$. Решение задачи о сейфе с однотипными замками сводится к решению системы линейных уравнений

$$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\,(\operatorname{mod} K)\,. \tag{1}$$

Матрица A размера $mn\times mn$ имеет особый вид и состоит из m^2 клеток:

$$A=\begin{pmatrix} \Im_n & E_n & E_n & \ldots & \ldots & E_n \\ E_n & \Im_n & E_n & \ldots & \ldots & E_n \\ E_n & E_n & \Im_n & \ldots & \ldots & E_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ E_n & E_n & E_n & \ldots & \ldots & \Im_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $\Im_n$ – матрица размера $n\times n$, состоящая из единиц, E_n – единичная матрица размера $n\times n$.

Проблема решения задачи состоит в нахождении матрицы, обратной к A. В работе [4] благодаря специфике матрицы A удалось найти непосредственно ее обратное выражение $A^{-1}=T_{m,n}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ в виде так называемой T-матрицы, состоящей из m^2 подматриц:

$$T_{m,n}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\begin{pmatrix} H_n(\alpha,\beta) & H_n(\gamma,\delta) & \ldots & H_n(\gamma,\delta) \\ H_n(\gamma,\delta) & H_n(\alpha,\beta) & \ldots & H_n(\gamma,\delta) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_n(\gamma,\delta) & H_n(\gamma,\delta) & \ldots & H_n(\alpha,\beta) \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где H – квадратная подматрица размера $n \times n$ вида

$$H_n(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta & \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}.$$

Так как $AA^{-1} = E_{mn}$, то в результате перемножения этих матриц можно выделить четыре независимых уравнения в виде системы

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + (m-1)\alpha_3 & \equiv 1 \\ \alpha_1 + (n-1)\alpha_2 + \quad \dots \quad + (m-1)\alpha_4 & \equiv 0 \\ \alpha_1 + \quad \dots \quad + (m-1)\alpha_3 + (n-1)\alpha_4 & \equiv 0 \\ \quad + \alpha_2 \quad + \alpha_3 \quad + (m+n-3)\alpha_4 & \equiv 0 \end{array}\right\} (\operatorname{mod} K). \tag{4}$$

Нетрудно подсчитать, что детерминант матрицы этой системы равен $-(m-1)(n-1)(m+n-1)(\operatorname{mod} K)$. Отсюда получаем необходимое условие разрешимости системы (1): $m \neq 1 (\operatorname{mod} K)$; $n \neq 1 (\operatorname{mod} k)$; $m + n \neq 1 (\operatorname{mod} K)$.

В результате решения системы (4) получим

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 \equiv \dfrac{1}{m-1} + \dfrac{1}{n-1} - 1 + \alpha_4, \\ \alpha_2 \equiv \dfrac{1}{n-1} + \alpha_4, \\ \alpha_3 \equiv \dfrac{1}{m-1} + \alpha_4, \\ \alpha_4 \equiv -\left(\dfrac{1}{n-1} + \dfrac{1}{m-1}\right)\dfrac{1}{m+n-1} \end{array}\right\} (\operatorname{mod} K). \tag{5}$$

В настоящей статье исследуется задача для сейфов с двумя типами замков. Это значит, что в матрице B часть строк, например первые p, соответствуют одному типу замков с числом состояний k_1, а остальные строки представляют замки второго типа с числом состояний k_2. В результате система общего вида (1) представится соотношениями вида

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} x_{kj} + b_{ij} \equiv 0 (\operatorname{mod} k_1) \ (i = 1, 2, \dots, p); \tag{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} x_{kj} + b_{ij} \equiv 0 (\operatorname{mod} k_2) \ (i = p+1, p+2, \dots, m). \tag{7}$$

Если умножить соотношение (6) на k_2, а соотношение (7) — на k_1, то соотношения не изменятся, но тогда их можно записать в виде

$$A'\vec{x} + \boldsymbol{b}' \equiv 0 (\operatorname{mod} k_1 k_2), \tag{8}$$

где A' — та же матрица из (1), у которой первые pn строк умножены на k_2, а остальные строки умножены на k_1, т.е.

$$A' = \begin{pmatrix} k_2\mathfrak{I}_n & k_2 E_n & k_2 E_n & \dots & k_2 E_n \\ k_2 E_n & k_2\mathfrak{I}_n & k_2 E_n & \dots & k_2 E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1\mathfrak{I}_n & k_1 E_n & k_1 E_n & \dots & k_1 E_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1 E_n & k_1 E_n & k_1 E_n & \dots & k_1\mathfrak{I}_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

а $\boldsymbol{b}' = (k_2 b_1, k_2 b_2, \dots, k_2 b_{pn}, k_1 b_{pn+1}, k_1 b_{pn+2}, \dots, k_1 b_{mn})$.

Теорема 1. Решение системы (8) удовлетворяет системе сравнений

$$A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}\equiv 0 \pmod{k_1 k_2},$$

где A — матрица (2).

Доказательство. Для решения системы (8) необходимо найти ее обратную матрицу. Нетрудно удостовериться, что $\det A' = k_2^{pn} k_1^{n(m-p)} \det A$. При подсчете миноров для обратных матриц можно заметить, что для $j \le p$ имеем $a_{ij}^{-1} = (a_{ij}')^{-1} / k_2$, а для $j \ge p$ имеем $a_{ij}^{-1} = (a_{ij}')^{-1} / k_1$. В результате получим равенство $(A')^{-1}\boldsymbol{b}' = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Отсюда вытекает справедливость теоремы, так как из двух систем (системы (8) и последней приведенной системы) получаем $\vec{\boldsymbol{x}} = -A^{-1}\boldsymbol{b} = -(A')^{-1}\boldsymbol{b}'$.

Задачу о математических сейфах на матрицах с двумя типами замков, т.е. систему (8), можно решать тремя методами: а) с использованием T-матрицы, б) методом Крамера, в) путем выделения подсистем, описанных в [3]. Рассмотрим пример решения задачи методом а).

Пример 1. Пусть $m=5$, $n=3$, $k_1=3$, $k_2=5$, $p=2$, а матрица B имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим дробные значения в системе (5):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{m-1} = \dfrac{1}{4} \equiv 4 \pmod{3\cdot 5}, \\ \dfrac{1}{n-1} = \dfrac{1}{2} \equiv 8 \pmod{3\cdot 5}, \\ \dfrac{1}{m+n-1} = \dfrac{1}{7} \equiv 13 \pmod{3\cdot 5}. \end{cases}$$

Подставляя эти значения в (5), получаем $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 13$, $\alpha_4 = 9$. Отсюда имеем обратную матрицу (3) в виде $A^{-1} = T_{5,3}(5,2,13,9)$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}
5 & 2 & 2 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 \\
2 & 5 & 2 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 \\
2 & 2 & 5 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 \\
13 & 9 & 9 & 5 & 2 & 2 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 \\
9 & 13 & 9 & 2 & 5 & 2 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 \\
9 & 9 & 13 & 2 & 2 & 5 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 \\
13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 5 & 2 & 2 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 \\
9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 2 & 5 & 2 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 \\
9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 2 & 2 & 5 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 \\
13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 5 & 2 & 2 & 13 & 9 & 9 \\
9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 2 & 5 & 2 & 9 & 13 & 9 \\
9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 2 & 2 & 5 & 9 & 9 & 13 \\
13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 5 & 2 & 2 \\
9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 2 & 5 & 2 \\
9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 9 & 9 & 13 & 2 & 2 & 5
\end{pmatrix}.$$

Несложно подсчитать, что $\vec{x} = -A^{-1}\boldsymbol{b}$ = (12, 6, 13, 12, 5, 14, 14, 4, 12, 13, 4, 12, 4, 14, 6) или

$$X = \begin{pmatrix} 12 & 6 & 13 \\ 12 & 5 & 14 \\ 14 & 4 & 12 \\ 13 & 4 & 12 \\ 4 & 14 & 6 \end{pmatrix} (\mathrm{mod}\, k_1 k_2)\,.$$

Таким образом, матрица X есть решение (8).

Проверим это решение, указав над матрицей количество поворотов соответствующего ключа:

$$B = \overset{x_{11}=12}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{12}=6}{\begin{pmatrix} 13 & 14 & 12 \\ 13 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 0 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{13}=13}{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 13 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 1 \\ 12 & 8 & 0 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{21}=12}{\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 13 & 7 & 14 \\ 1 & 7 & 13 \\ 1 & 8 & 14 \\ 12 & 8 & 13 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \overset{x_{22}=5}{\begin{pmatrix} 14 & 3 & 1 \\ 10 & 4 & 12 \\ 13 & 7 & 13 \\ 13 & 8 & 14 \\ 9 & 8 & 13 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{23}=14}{\begin{pmatrix} 14 & 8 & 1 \\ 0 & 9 & 1 \\ 13 & 12 & 13 \\ 13 & 13 & 14 \\ 9 & 13 & 13 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{31}=14}{\begin{pmatrix} 14 & 8 & 0 \\ 14 & 8 & 0 \\ 13 & 12 & 12 \\ 13 & 13 & 13 \\ 9 & 13 & 12 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{32}=4}{\begin{pmatrix} 13 & 8 & 0 \\ 13 & 8 & 0 \\ 12 & 11 & 11 \\ 12 & 13 & 13 \\ 8 & 13 & 12 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \overset{x_{33}=12}{\begin{pmatrix} 13 & 12 & 0 \\ 13 & 12 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 12 & 2 & 13 \\ 8 & 2 & 12 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{41}=13}{\begin{pmatrix} 13 & 12 & 12 \\ 13 & 12 & 12 \\ 13 & 12 & 12 \\ 12 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 9 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{42}=4}{\begin{pmatrix} 11 & 12 & 12 \\ 11 & 12 & 12 \\ 11 & 12 & 12 \\ 10 & 0 & 8 \\ 6 & 2 & 9 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{43}=12}{\begin{pmatrix} 11 & 1 & 12 \\ 11 & 1 & 12 \\ 11 & 1 & 12 \\ 14 & 4 & 12 \\ 6 & 6 & 9 \end{pmatrix}} \to$$

$$\to \overset{x_{51}=4}{\begin{pmatrix} 11 & 1 & 9 \\ 11 & 1 & 9 \\ 11 & 1 & 9 \\ 11 & 1 & 9 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{52}=16}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \\ 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}} \to \overset{x_{53}=6}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}} \to \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} (\mathrm{mod}\, 15) = B_{\mathrm{fin}}\,.$$

Этот метод решения наталкивает на определенные трудности, если в знаменателях выражений для α_i появляются делители нуля. Так, если матрица B имеет размер 4×6, то в знаменателях при α_i появляются дроби $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$, которым нет соответствия в целых числах для $k_1 = 3$ и $k_2 = 5$. Полагая эти дроби мнимыми числами, можно достичь их сокращения только благодаря специфическому виду вектора $\boldsymbol{b}$.

Решение основной системы методом Крамера связано с вычислением большого количества определителей огромных размеров, что делает этот метод практически неприменимым.

Перейдем к изложению метода выделения подсистем, описанных в [3]. Для этого из матрицы (9) выделим два рода подсистем. Подсистему первого рода получим, если просуммируем последовательно каждое n-е уравнение, т.е. подситему вида

$$k_2(nS_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + S_m) \equiv k_2\lambda_1 (\mathrm{mod}\, k_1k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_2(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + nS_m) \equiv k_2\lambda_p (\mathrm{mod}\, k_1k_2),$$

$$k_1(nS_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + S_m) \equiv k_1\lambda_{p+1} (\mathrm{mod}\, k_1k_2), \qquad (10)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_1(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_{m-1} + nS_m) \equiv k_1\lambda_m (\mathrm{mod}\, k_1k_2),$$

где $S_i = x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$, $\lambda_i = -\sum_{j=1}^{n} b_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Подсистему второго рода для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ определим из матрицы (9) следующим образом. Выделим $(kn + j)$-е уравнения, где $k = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ получим систему из m уравнений:

$$k_2(S_1 + x_{2j} + x_{3j} + \ldots + x_{nj}) \equiv -k_2 b_{1j} (\mathrm{mod}\, k_1k_2),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_2(x_{1j} + S_2 + x_{3j} + \ldots + x_{nj}) \equiv -k_2 b_{pj} (\mathrm{mod}\, k_1k_2),$$

$$k_1(x_{1j} + S_2 + x_{3j} + \ldots + x_{nj}) \equiv -k_1 b_{p+1j} (\mathrm{mod}\, k_1k_2), \qquad (11)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$k_1(x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \ldots + S_m) \equiv -k_1 b_{mj} (\mathrm{mod}\, k_1k_2).$$

Опишем алгоритм решения задачи.

Этап 1. Выполняется по следующей схеме.

Шаг 1. Из первых p уравнений находим выражения S_i, $i = 2, \ldots, p$, через S_1.

Шаг 2. Из числа оставшихся уравнений находим выражения S_i, $i > p+1$, через S_{p+1}.

Шаг 3. Подставляем полученные значения в первые уравнения и находим выражения S_{p+1} через S_1.

Шаг 4. Подставляем все значения S_i, $i = 2, \ldots, m$, в последнее уравнение и находим значение S_1, а затем определяем все значения S_i.

Этап 2. Для каждой j-й подсистемы второго рода находим значения переменных $x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{mj}$ по схеме, описанной в этапе 1, но относительно переменных x_{1j}, x_{p+1j} . В результате получим матрицу X, т.е. решение задачи.

Пример 2. Пусть $m = 3$, $n = 3$, $k_1 = 3$, $k_2 = 5$, $p = 2$, а матрица B имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Убедимся, что эту задачу можно решить методом, использующим T-матрицы. Вначале найдем обратную матрицу в виде T-матрицы. Определим значения α_i по модулю 15:

$$\alpha_4 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3+3-1}\right) = -\frac{1}{5},\ \alpha_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 + \alpha_4 = -\frac{1}{5},\ \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2} + \alpha_4 = \frac{3}{10}.$$

Подставив эти значения в обратную матрицу, получим

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}
-\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\
\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5}\\
\frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10}\\
\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\
-\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5}\\
-\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10}\\
\frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10}\\
-\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10}\\
-\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{5}
\end{pmatrix}.$$

Умножив эту матрицу на вектор – $\boldsymbol{b}$, получим следующие значения вектора $\boldsymbol{x} = (-1, 7, 9, 7, -1, 1, 9, 1, -1)$, что соответствует матрице $X=\begin{pmatrix}-1 & 7 & 9\\ 7 & -1 & 1\\ 9 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

Благодаря особенному виду вектора $\boldsymbol{b}$ получены целые значения переменных. Проверим это решение:

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{11}=-1}\begin{pmatrix}-2&-1&-2\\-1&0&0\\-1&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{12}=7}\begin{pmatrix}5&6&6\\-1&7&0\\-1&7&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{13}=9}\begin{pmatrix}-1&0&0\\-1&7&9\\-1&7&5\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{21}=7}$$

$$\to\begin{pmatrix}6&0&0\\6&-1&1\\0&7&5\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=-1}\begin{pmatrix}6&-1&0\\5&-2&0\\6&6&5\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{23}=1}\begin{pmatrix}6&-1&1\\6&-1&1\\6&6&6\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{31}=9}\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{32}=1}$$

$$\to\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=-1}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Перейдем к решению этого примера методом выделения подсистем, описанных в [3]. Для этого из общей системы выделим четыре подсистемы с соответствующими множителями: подсистему первого рода:

$$\left.\begin{aligned}5S_2+5S_3&\equiv 5\\ 5S_1+\ldots\;+5S_3&\equiv 0\\ 3S_1+3S_2+9S_3&\equiv 12\end{aligned}\right\}\pmod{15}$$

и три подсистемы второго рода:

$$\left.\begin{array}{l}5S_1+5x_{21}+5x_{31}\equiv 5\\ 5x_{11}+5S_2+5x_{31}\equiv 0\\ 3x_{11}+3x_{21}+3S_3\equiv 0\end{array}\right\}\ (\text{mod } 15),$$

$$\left.\begin{array}{l}5S_1+5x_{22}+5x_{32}\equiv 0\\ 5x_{12}+5S_2+5x_{32}\equiv 0\\ 3x_{12}+3x_{22}+3S_3\equiv 0\end{array}\right\}\ (\text{mod } 15),$$

$$\left.\begin{array}{l}5S_1+5x_{23}+5x_{33}\equiv 0\\ 5x_{13}+5S_2+5x_{33}\equiv 0\\ 3x_{13}+3x_{23}+3S_3\equiv 12\end{array}\right\}\ (\text{mod } 15).$$

Согласно изложенному выше алгоритму находим значения S_i. Вычитая из первого уравнения подсистемы первого рода второе уравнение, находим $S_2=S_1+\frac{5}{5}$. В зависимости от значения $\frac{5}{5}$ (mod 15), которое равно 1 либо –2, получаем два значения для S_2. Из второго уравнения находим S_3, равное либо $-S_1$, либо $2S_1$. Исходя из значений S_2 и S_3 можно различить четыре таких случая.

Случай 1. Пусть $S_2=S_1+1$, $S_3=2S_1$. Подставляя эти значения в последнее уравнение первой подсистемы, получаем значения $S_1=1$, $S_2=S_3=2$, а затем, подставляя их в последующие подсистемы, находим значения матрицы $X=\begin{pmatrix}2&1&-2\\1&2&-1\\2&0&0\end{pmatrix}$.

Проверим это решение:

$$B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&0\\0&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{11}=2}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&0&0\\2&0&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{12}=1}\begin{pmatrix}2&3&3\\2&1&0\\2&1&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{13}=-2}\begin{pmatrix}0&1&1\\2&1&-2\\2&1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{21}=1}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\3&1&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=2}\begin{pmatrix}1&0&1\\2&1&1\\3&3&-6\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{23}=-1}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\3&3&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Случай 2. Пусть $S_2=S_1-2$, $S_3=2S_1$. Подставляя эти значения в третье уравнение первой подсистемы, получаем следующее соотношение: $3S_1+3S_1-6+18S_1\equiv 12$ (mod 15), откуда находим $S_1=2$, $S_2=0$, $S_3=4$. Подставляя эти значения во вторую подсистему, получаем значения первого столбца матрицы X: $x_{11}=1, x_{21}=0, x_{31}=-1$. Из третьей подсистемы получим значения второго столбца матрицы X, а именно $x_{12}=-1, x_{22}=-3, x_{32}=1$. При подсчете значений третьего столбца матрицы возникают некоторые проблемы.

По определению $x_{13}=S_1-x_{11}-x_{12}\equiv 2$ (mod 3). Найдем x_{23}. С одной стороны, $x_{23}=S_2-0-(-3)\equiv 0$ (mod 3), с другой — из третьего уравнения четвертой подсистемы вытекает $3x_{23}=12-3S_3-3x_{13}$. Общим значением является $x_{23}=3$. Затем определим x_{33}. По определению $x_{33}=S_3-1+1\equiv 4$ (mod 5). Из первого уравнения четвертой подсистемы следует, что $5x_{33}=-5S_1-5x_{23}$, т.е. $x_{33}=1$ либо $x_{33}=4$. Имеем общее решение: $x_{33}=4$.

В результате получаем матрицу $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & -3 & 3\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

Проверим это решение:

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{11}=1}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{12}=-1}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{13}=2}\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{22}=-3}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & -4 & -1\\ 1 & -4 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{23}=3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 5\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{31}=-1}\begin{pmatrix}0 & -1 & 5\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & -5 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{32}=1}\begin{pmatrix}0 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 2\\ 1 & -4 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{x_{33}=4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Случай 3. Пусть $S_2=S_1+1$, $S_3=-S_1$. Подставляя эти значения в последнее уравнение первой системы, получаем значения $S_1=-3$, $S_2=-2$, $S_3=3$. Подставив их во вторую и третью подсистемы, получим значения первого и второго столбцов матрицы X, а именно $x_{11}=0$, $x_{21}=2$, $x_{31}=2$, $x_{12}=-2$, $x_{22}=-1$, $x_{32}=4$. Значения третьего столбца матрицы X получим другим способом. По определению $x_{13}=-1$, $x_{23}=S_2-x_{21}-x_{22}=-3$. При этом из четвертой подсистемы находим, что $3x_{23}=12-3S_3-3x_{13}=6$, т.е. $x_{23}=2$ либо $x_{23}=-3$. Общим является значение $x_{23}=-3$. Из первого уранения этой системы находим, что $5x_{33}=5S_1-5x_{23}=30\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,15)$. Следовательно, x_{33} равно либо -3, либо 0, либо 3. А по определению $x_{33}=S_3-x_{31}-x_{32}=-3$, т.е. общим является $x_{33}=-3$.

Окончательным решением является матрица $X=\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 2 & 4 & -3\end{pmatrix}$.

Как видим, это представляет решение задачи.

Случай 4. Пусть $S_2=S_1-2$, $S_3=-S_1$. Подставив эти значения в последнее уравнение первой системы, получим значения $S_1=-1$, $S_2=-3$, $S_3=+1$. Аналогично, как и в случае 3, получим значения матрицы $X=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0\\ -1 & 0 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Легко убедиться, что это является решением задачи.

Для произвольных значений матрицы B не всегда существует решение. В этом убедимся на следующем примере.

Пример 3. Пусть $m=n=5$, $k_1=2$, $k_2=3$, $p=2$, а матрица B имеет вид

$$B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Образуем соответствующие подсистемы для этой матрицы: подсистему первого рода

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 25S_1+5S_2+5S_3+5S_4+5S_5\equiv 5\\ a_2 &= 5S_1+25S_2+5S_3+5S_4+5S_5\equiv 5\\ a_3 &= 3S_1+3S_2+\ldots+3S_4+3S_5\equiv 6\\ a_4 &= 3S_1+3S_2+3S_3+\ldots+3S_5\equiv 6\\ a_5 &= 3S_1+3S_2+3S_3+3S_4+\ldots\equiv 3\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod}\,15)$$

и пять подсистем второго рода также по модулю 15:

$$\left.\begin{array}{l} 5S_1+5x_{21}+5x_{31}+5x_{41}+5x_{51}=5 \\ 5x_{11}+5S_2+5x_{31}+5x_{41}+5x_{51}=0 \\ 3x_{11}+3x_{21}+3S_3+3x_{41}+3x_{51}=0 \\ 3x_{11}+3x_{21}+3x_{31}+3S_4+3x_{51}=0 \\ 3x_{11}+3x_{21}+3x_{31}+3x_{41}+3S_5=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} 5S_1+5x_{22}+5x_{32}+5x_{42}+5x_{52}=0 \\ 5x_{12}+5S_2+5x_{32}+5x_{42}+5x_{52}=5 \\ 3x_{12}+3x_{22}+3S_3+3x_{42}+3x_{52}=0 \\ 3x_{12}+3x_{22}+3x_{32}+3S_4+3x_{52}=0 \\ 3x_{12}+3x_{22}+3x_{32}+3x_{42}+3S_5=0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} 5S_1+5x_{23}+5x_{33}+5x_{43}+5x_{53}=0 \\ 5x_{13}+5S_2+5x_{33}+5x_{43}+5x_{53}=0 \\ 3x_{13}+3x_{23}+3S_3+3x_{43}+3x_{53}=6 \\ 3x_{13}+3x_{23}+3x_{33}+3S_4+3x_{53}=0 \\ 3x_{13}+3x_{23}+3x_{33}+3x_{43}+3S_5=0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} 5S_1+5x_{24}+5x_{34}+5x_{44}+5x_{54}=0 \\ 5x_{14}+5S_2+5x_{34}+5x_{44}+5x_{54}=0 \\ 3x_{14}+3x_{24}+3S_3+3x_{44}+3x_{54}=0 \\ 3x_{14}+3x_{24}+3x_{34}+3S_4+3x_{54}=6 \\ 3x_{14}+3x_{24}+3x_{34}+3x_{44}+3S_5=0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} 5S_1+5x_{25}+5x_{35}+5x_{45}+5x_{55}=0 \\ 5x_{15}+5S_2+5x_{35}+5x_{45}+5x_{55}=0 \\ 3x_{15}+3x_{25}+3S_3+3x_{45}+3x_{55}=0 \\ 3x_{15}+3x_{25}+3x_{35}+3S_4+3x_{55}=0 \\ 3x_{15}+3x_{25}+3x_{35}+3x_{45}+3S_5=3 \end{array}\right\}.$$

Выполнив шаги 1 и 2 этапа 1, находим $S_1=S_2$, $S_4=S_3$, $S_5=S_3+1$. Шаг 3 сделать невозможно, так как при подстановке значений $S_4=S_3+\frac{a_3-a_4}{3}$ и $S_5=S_3+\frac{a_3-a_5}{3}$ в первое уравнение получим тождество $25S_1+5S_1+5S_3+{}$ $+5S_3+5\left(\frac{a_3-a_4}{3}+\frac{a_3-a_5}{3}\right)\equiv a_1\,(\mathrm{mod}\,15)$, что возможно только при одном условии, когда $2a_3-a_4-a_5=\frac{3}{5}a_1$. Если это условие не выполняется, задача не имеет решения. В данном примере это условие выполняется и задача имеет несколько решений, поскольку из последнего соотношения для a_5 следует, что S_1 и S_3 могут принимать различные значения при условии $S_1+S_3=3$ (mod 5).

Если задать, например, значения S_1=1, S_3=2, то получим другие значения: $S_2=1$, $S_4=2$, $S_5=3$. Подставив эти значения в j-е ($j=1,2,3,4$) подсистемы второго рода и следуя схеме этапа 2, получим значения первых четырех столбцов матрицы X: (1, 2, 2, 2, 3), (2, 1, 2, 2, 3), (0, 0, 0, 2, 3), (0, 0, 2, 0, 3). Вычисление пятого столбца выполним следующим образом. По определению имеем $x_{15}=x_{25}=S_1-1-2=-2\,(\mathrm{mod}\ 3)$, $x_{35}=x_{45}=S_3-2-2-2=1\ (\mathrm{mod}\ 5)$, $x_{55}=$ $=S_3-3-3=1\,(\mathrm{mod}\,5)$. Из этих значений x_{35}, x_{45}, x_{55} удовлетворяют последним трем уравнениям пятой подсистемы второго рода. При этом из первого уравнения этой подсистемы вытекает $x_{55}=-1\,(\mathrm{mod}\ 3)$. Общим решением является $x_{55}=11$.

Таким образом, матрица решения примет вид

$$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Случаи вырождения первого уравнения в тождество возникают при таких параметрах: $n+p-1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,k_1)$, $a_1=a_2=\ldots=a_p$, $m-p=k_2$. В такой ситуации S_{p+1} зависит от S_1; решение задачи неоднозначно. Кроме того, на a_i налагаются определенные ограничения типа упомянутых выше, без которых задача неразрешима.

Подобные задачи для сейфов более чем с двумя типами замков решаются аналогично по алгоритму, описанному в этапах 1, 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Donets G.A. Solution of safe problem on (0,1)-matrices. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2002. N 1. P. 98–105.
2. Донец Г.А., Гурин А.Л. Задача о математическом сейфе из замков с двумя состояниями. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 5. С. 39–41.
3. Донец А.Г., Гурин А.Л. Задача о математическом сейфе с простым числом состояний замков. *Проблемы управления и информатики.* 2018. № 6. С. 55–64.
4. Агаи Аг Гамиш Якуб, Донец Г.А. Задача о математическом сейфе на матрицах. *Теорія оптимальних рішень*. 2013. С. 124–130.

Надійшла до редакції 17.10.2018

А.Л. Гурін

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ПРО МАТЕМАТИЧНІ СЕЙФИ НА МАТРИЦЯХ З РІЗНИМИ ТИПАМИ ЗАМКІВ

Анотація. Розглянуто задачу про математичні сейфи на матрицях із замками різних типів. Для дослідження застосовано метод виділення підсистем, який розроблено та обгрунтовано в попередніх роботах автора для більш простіх сейфів. Досліджено задачу для сейфів із замками двох типів. Наведено приклади розв'язання такої задачі.

Ключові слова: матриця станів, матриця розв’язку, підсистеми першого та другого родів, обернена матриця, однотипні сейфи, простий модуль, складений модуль.

A.L. Gurin

METHODS FOR SOLVING THE PROBLEMS OF MATHEMATICAL SAFES ON MATRICES WITH DIFFERENT TYPES OF LOCKS

Abstract. The paper deals with the problem of mathematical safes on matrices with locks of different types. The method of subsystems separation is used, which was developed and substantiated in previous works for sympler safe types. Examples of solving such problem are given.

Keywords: state matrix, solution matrix, subsystems of the first and second kind, inverse matrix, safes of the same type, simple module.

Гурин Артем Леонидович,
старший преподаватель Национального технического университета Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», e-mail: galtef.1@gmail.com.