УДК 519.87

И.В. КОЗИН, С.Е. БАТОВСКИЙ

ФРАГМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧЕ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННУЮ ПОЛОСУ

Аннотация. Рассмотрена общая задача двумерной упаковки в полуограниченную полосу. Показано, что ее можно рассматривать как задачу оптимизации на фрагментарной структуре, которая сводится к задаче комбинаторной оптимизации на множестве перестановок. Рассмотрены универсальный способ представления плоских фигур и алгоритм их упаковки в полосу. Предложен способ модификации исходной задачи для достижимости оптимального решения.

Ключевые слова: дискретная оптимизация, фрагментарная структура, двумерная упаковка в полосу, эволюционный алгоритм.

ВВЕДЕНИЕ

Задача двумерной упаковки конечного набора фигур в полуограниченную полосу относится к числу классических задач дискретной оптимизации. Доказано, что в общем случае задача является NP-трудной [1] даже в том случае, когда укладываемые фигуры имеют достаточно простую форму, такую как круги или прямоугольники. При этом задача укладки в полосу встречается в многочисленных приложениях, и поэтому представляют интерес алгоритмы поиска приближенных решений этой задачи с невысокой вычислительной сложностью. В частности, хорошие приближенные алгоритмы получены на основе различных метаэвристик, таких как метод табу [2], генетический алгоритм [3–5], муравьиный алгоритм [6, 7] и ряд других. Хорошие результаты дает подход на основе геометрических методов.

ЗАДАЧА УПАКОВКИ В ПОЛУОГРАНИЧЕННУЮ ПОЛОСУ

Рассмотрим использование фрагментарной модели для задачи двумерной упаковки в полуограниченную полосу. Такой подход является универсальным и в ряде случаев позволяет получить хорошие результаты для многих важных практических задач упаковки.

Простейшим случаем упаковки является упаковка прямоугольников. По условию задается несколько видов прямоугольников и их количество. Известна ширина полуограниченной полосы, в которую упаковываются фигуры. Необходимо отыскать такое размещение заданных прямоугольников на полосе, при котором высота занятой части полосы является минимальной. При этом прямоугольники должны располагаться строго в пределах полосы, не пересекаясь один с другим. По условию задачи может допускаться вращение прямоугольников под прямым углом; при этом подразумевается, что стороны каждого размещаемого прямоугольника параллельны сторонам полосы. Для решения данной задачи часто предлагались методы, основанные на известных эвристических алгоритмах, таких как генетический алгоритм [8, 9] или алгоритм адаптивного поведения муравьиной колонии [10], а также основанные на точных алгоритмах, таких как метод ветвей и границ с использованием матричного представления упаковки [11].

Большое внимание уделяется задачам упаковки более сложных фигур. Интерес представляют задача упаковки прямоугольников и кругов в полуограниченную полосу [12], а также задача упаковки кругов и невыпуклых многоугольников в полосу [13], в которой формы заданных фигур моделируются с помощью Ф-функций.

В настоящей статье рассматривается общая задача двумерной упаковки, не накладывающая никаких ограничений на форму задаваемых фигур. В этом

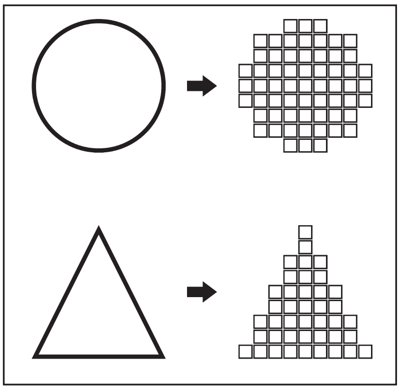

Рис. 1. Пример аппроксимации фигур

случае необходимо иметь универсальный способ представления любой двумерной фигуры, который, в свою очередь, позволил бы быстро определять пересечение одной фигуры с другой при их размещении в полуограниченной полосе. Один из таких способов описан в [9]. Идея состоит в аппроксимации формы фигуры с представлением ее в виде множества элементарных квадратов, плотно прилегающих один к другому (рис. 1). Размер элементарного квадрата — это параметр детализации, позволяющей сделать выбор между простотой представления фигуры и точностью ее приближения. На практике размер элементарного квадрата обычно выбирается таким, чтобы ширина полосы, в которую упаковываются фигуры, состояла из целого числа квадратов. Задачу с таким представлением фигур будем называть клеточной аппроксимацией. При упаковке фигур допускаются повороты на угол, кратный прямому, а также отражения относительно вертикальной и горизонтальной осей.

ФРАГМЕНТАРНЫЕ СТРУКТУРЫ И ИХ СВОЙСТВА

Определение 1. Фрагментарной структурой (X, E) на конечном множестве X называется семейство его подмножеств $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$, где $E_i \subseteq X$, такое, что $\forall E_i \in E$, $E_i \neq \varnothing$, $\exists\, e \in E_i$, $E_i \setminus \{e\} \in E$.

Элементы из множества E назовем допустимыми фрагментами. Одноэлементные допустимые фрагменты называются элементарными фрагментами. Допустимый фрагмент назовем максимальным, если он не является подмножеством никакого другого допустимого фрагмента. Очевидно, что пустое множество является допустимым фрагментом. Более подробно свойства фрагментарных структур представлены в [14, 15].

Любой максимальный фрагмент можно построить из пустого множества, последовательно добавляя к нему элементы так, чтобы на каждом шаге такой процедуры полученное подмножество было допустимым фрагментом. Это условие назовем условием присоединения.

Алгоритм построения максимального фрагмента:

1) на начальном шаге выбирается пустое множество $X_0 = \varnothing$;

2) на шаге с номером $k+1$ выбирается любой элемент $x \in X \setminus X_k$, удовлетворяющий условию присоединения $X_k \bigcup \{x\} \in E$;

3) алгоритм заканчивает работу, если на очередном шаге не удалось найти элемент $x \in X \setminus X_k$ с требуемым свойством.

Очевидна следующая теорема.

Теорема 1. Если $\forall A \in E$ и $\forall x \in X$ существует алгоритм полиномиальной трудоемкости по числу элементов множества X для проверки условия присоединения $A \bigcup \{x\} \in E$, то задача построения максимального фрагмента является полиномиально разрешимой.

Известно, что результат работы алгоритма зависит от элементов, которые будут выбираться на каждом шаге. Чтобы результат был однозначным, достаточно определить некоторый линейный порядок на множестве X и выбирать на шаге 2 алгоритма первый в этом порядке элемент, который удовлетворяет условию присоединения.

Алгоритм отыскания максимального фрагмента в фрагментарной структуре при заданном упорядочении элементов в дальнейшем назовем фрагментарным алгоритмом.

Определение 2. Упорядоченной фрагментарной структурой на множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ назовем семейство E последовательностей $\{(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k})\}$ элементов множества X таких, что если $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}) \in E$, то и любая ее начальная подпоследовательность $(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$, $m \le k$, также принадлежит E. Соответственно элементы упорядоченной фрагментарной структуры назовем упорядоченными фрагментами.

Каждой фрагментарной структуре можно сопоставить множество различных упорядоченных фрагментарных структур. Для упорядоченной фрагментарной структуры результат работы фрагментарного алгоритма определен однозначно. Таким образом, задается отображение множества перестановок S_n из n элементов во множество максимальных фрагментов заданной фрагментарной структуры. Это отображение, которое назовем накрывающим отображением, сюръективно, т.е. каждый максимальный фрагмент является образом некоторой перестановки.

ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

Пусть задана фрагментарная структура $E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ на конечном множестве X. Пусть также определена монотонная по включению функция-критерий $f : E \to R^1$, которая каждому допустимому фрагменту ставит в соответствие некоторое вещественное число, т.е. $\forall E_i, E_j \in E$ из условия $E_i \subseteq E_j$ следует, что $f(E_i) \le f(E_j)$ (или $f(E_i) \ge f(E_j)$). Задача оптимизации на фрагментарной структуре заключается в отыскании допустимого фрагмента с максимальным (или минимальным) значением критерия. Очевидно, оптимальным решением этой задачи будет один из максимальных фрагментов. По крайней мере, такой фрагмент всегда присутствует среди оптимальных решений. Таким образом, любая задача оптимизации на фрагментарной структуре с монотонной целевой функцией может быть сведена к комбинаторной задаче оптимизации на множестве перестановок.

ФРАГМЕНТАРНАЯ СТРУКТУРА ЗАДАЧИ ДВУМЕРНОЙ УПАКОВКИ. ДОСТИЖИМОСТЬ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим общую задачу двумерной упаковки в полуограниченную полосу. Пусть задано множество фигур $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, диаметр каждой из которых меньше ширины полосы. Предполагается, что в процессе укладки в полосу допускаются вращения фигур на угол, кратный прямому, и зеркальные отражения. Выполним следующие преобразования.

1. Проведем клеточную аппроксимацию задачи, т.е. каждую заданную фигуру заменим фигурой, составленной из элементарных квадратов со стороной ε, где ε — положительное заданное число. Фигуру подберем таким образом, чтобы она целиком покрывала заменяемую фигуру и при этом чтобы ее площадь была минимально возможной. Такое преобразование назовем квадрированием. На квадраты такого же размера разобьем полубесконечную полосу L, предполагая, что ширина полосы кратна ε; при этом полоса бесконечна по направлению вниз. Величину ε в дальнейшем будем рассматривать как единицу масштаба, а фигуры из заданного множества считать совпадающими с их клеточной аппроксимацией.

2. Каждой квадрированной фигуре $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, сопоставим набор фигур $\{f_{ij}\}$, которые отличаются от нее углом поворота, кратным $90°$, и (или) зеркальнім отражением. Этот набор назовем связанным набором фигуры $\{f_i\}$. Объединение всех связанных наборов будем рассматривать как базовое множество фрагментарной структуры.

Каждый элемент базового множества характеризуется двумя индексами: первый обозначает номер фигуры, а второй — номер ее экземпляра в связанном наборе, полученном по п. 2.

Опишем теперь TL-алгоритм (top-left алгоритм) построения двумерной упаковки. В каждой фигуре отметим верхнюю левую клетку. Выберем произвольную упорядоченную последовательность фигур базового множества. Фигуры последовательности рассматриваются в заданном порядке. На очередном шаге выбирается первая по порядку фигура f_{ij} такая, чтобы в упаковке отсутствовала фигура из базового набора фигуры f_i. Разместим фигуру f_{ij} в упаковке с соблюдением следующих правил:

— фигура целиком расположена в полосе L, причем клетки фигуры совпадают с клетками полосы;

— внутренность фигуры не пересекается с внутренностями уже упакованных фигур;

— отмеченная клетка фигуры занимает место, соответствующее наиболее высокой и крайней слева свободной клетке полосы.

Процесс упаковки заканчивается, когда все фигуры последовательности будут просмотрены. Значение целевой функции для заданной последовательности фигур — это высота построенной упаковки.

Заметим, что хотя алгоритм упаковки сходится для каждой заданной последовательности фигур, не всегда с помощью этого алгоритма можно получить оптимальное решение задачи.

Так, рассмотрим три фигуры (рис. 2) и полосу с шириной, равной семи. Базовое множество в этом случае состоит из шести элементов. Оптимальным решением задачи является любая из упаковок, показанных на рис. 3. Упаковки не могут быть получены путем применения вышеописанного алгоритма ни при какой перестановке фигур из базового множества.

Будем считать, что фрагментарная структура задачи упаковки обладает свойством достижимости, если хотя бы одна оптимальная упаковка может быть получена путем применения TL-алгоритма к некоторой последовательности элементов базового множества. Покажем теперь, что существует класс задач двумерной упаковки и для каждой задачи имеет место свойство достижимости. Пусть ширина полосы равна W, а высота упаковки фигур множества $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, равна H. Упаковку назовем плотной, если суммарная площадь всех фигур упаковки равна в точности $W \times H$. Очевидно, плотная упаковка является оптимальной по критерию высоты.

Теорема 2. Если для задачи упаковки в полуограниченную полосу существует оптимальное решение в виде плотной упаковки, то фрагментарная структура этой задачи обладает свойством достижимости.

Доказательство. Пусть для задачи упаковки в полуограниченную полосу существует оптимальное решение в виде плотной упаковки. Рассмотрим эту упаковку и построим последовательность фигур по следующему алгоритму. В полосе выбирается верхняя левая клетка. Ввиду плотности упаковки эта клетка также является верхней левой клеткой одной из фигур базового множества. Эту фигуру добавляем в последовательность и «вырезаем» из упаковки вместе с соответствующей частью полосы. Продолжаем таким образом воздействовать на оставшуюся часть полосы до тех пор, пока все фигуры упаковки ни будут удалены. Результатом работы алгоритма и будет требуемая последовательность базовых фигур.

Рассмотрим теперь произвольную задачу упаковки в полуограниченную полосу. Множество фигур $\{f_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, этой задачи всегда можно дополнить конечным набором одноклеточных фигур таким образом, чтобы измененная задача допускала плотную упаковку. Действительно, зададим произвольную упаковку высоты H, которая является допустимым решением задачи. Все свободные клетки в участке полосы высоты H заполним одноклеточными фигурами. Эта упаковка по определению является плотной. Сопоставим каждой упаковке U высоты H число $k(U) = WH - \sum_{i=1}^{n} S(f_i)$, где $S(f_i)$ — площадь соответствующей фигуры. Тогда мини-

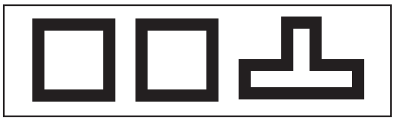

Рис. 2. Базовое множество фигур

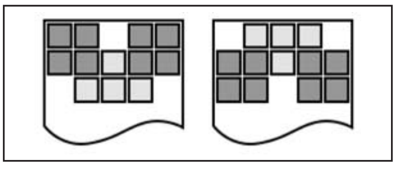

Рис. 3. Оптимальные упаковки

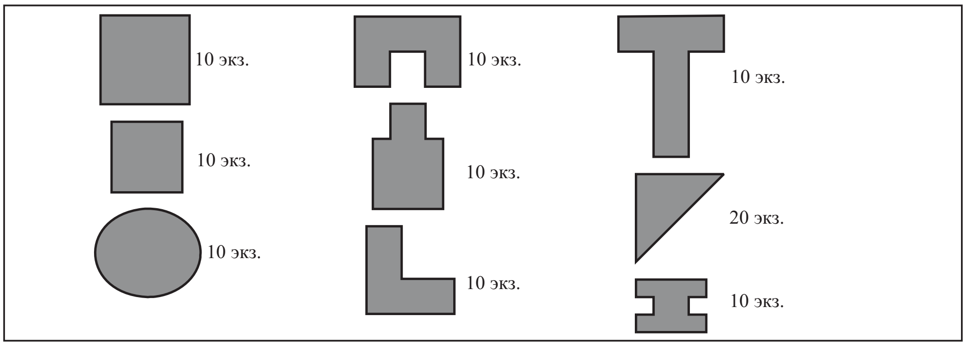

Рис. 4. Форма заданных фигур и их количество

мум $k_{\min}$ величины $k(U)$ достигается на оптимальной упаковке. Таким образом, возможен следующий алгоритм поиска оптимальной упаковки. К исходному множеству фигур добавляются $k_{\min}$ одноклеточных фигур. Отыскивается перестановка фигур, для которой с помощью TL-алгоритма можно построить плотную упаковку. Из построенной плотной упаковки удаляются $k_{\min}$ одноклеточных фигур. Полученная упаковка фигур в полуограниченную полосу и будет оптимальной по высоте упаковкой.

К сожалению, число $k_{\min}$ заранее неизвестно, и, таким образом, задачу можно решать только подбором, используя вместо числа $k_{\min}$ его верхнюю оценку.

МЕТАЭВРИСТИКИ НА ФРАГМЕНТАРНОЙ СТРУКТУРЕ

В [14] показано, что наличие фрагментарной структуры задачи позволяет применить ряд известных метаэвристик для отыскания приближенного решения задачи. К таким метаэвристикам относятся эволюционный алгоритм на фрагментарной структуре и алгоритм муравьиной колонии.

Для проверки эффективности указанных метаэвристик применительно к задаче об упаковке двумерных фигур в полуограниченную полосу был рассмотрен ряд известных в литературе примеров. Первый пример рассмотрен в работе [9]. По условию задачи были определены девять видов фигур и их количество (рис. 4). После аппроксимации фигур с такой же точностью была задана ширина W полубесконечной полосы, равная 46 элементарным квадратам, чтобы соответствовать решению, полученному в [9]. Решение этой задачи дает значение высоты упаковки $H = 51$. Решение, которое было получено после 350 итераций алгоритма муравьиной колонии, улучшает решение из работы [9] значением $H = 43$ (рис. 5). Лучшее решение этой задачи, полученное с помощью эволюционного алгоритма на фрагментарной структуре, также дает значение $H = 43$.

В качестве второго примера взята задача, рассмотренная в работе [16], решение, полученное в ней, изображено в масштабе на рис. 6 настоящей статьи.

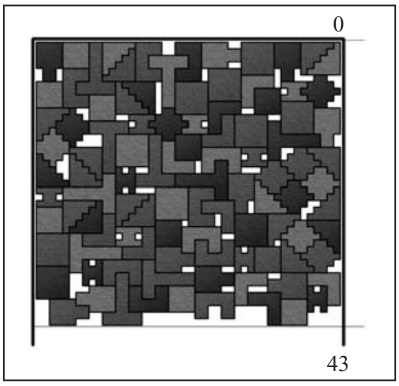

Рис. 5. Решение задачи с помощью эволюционного алгоритма

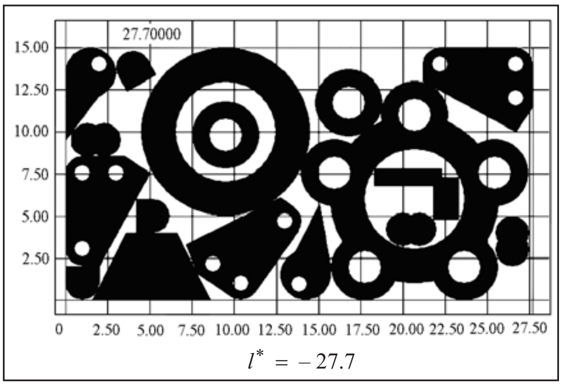

Рис. 6. Исходное решение задачи

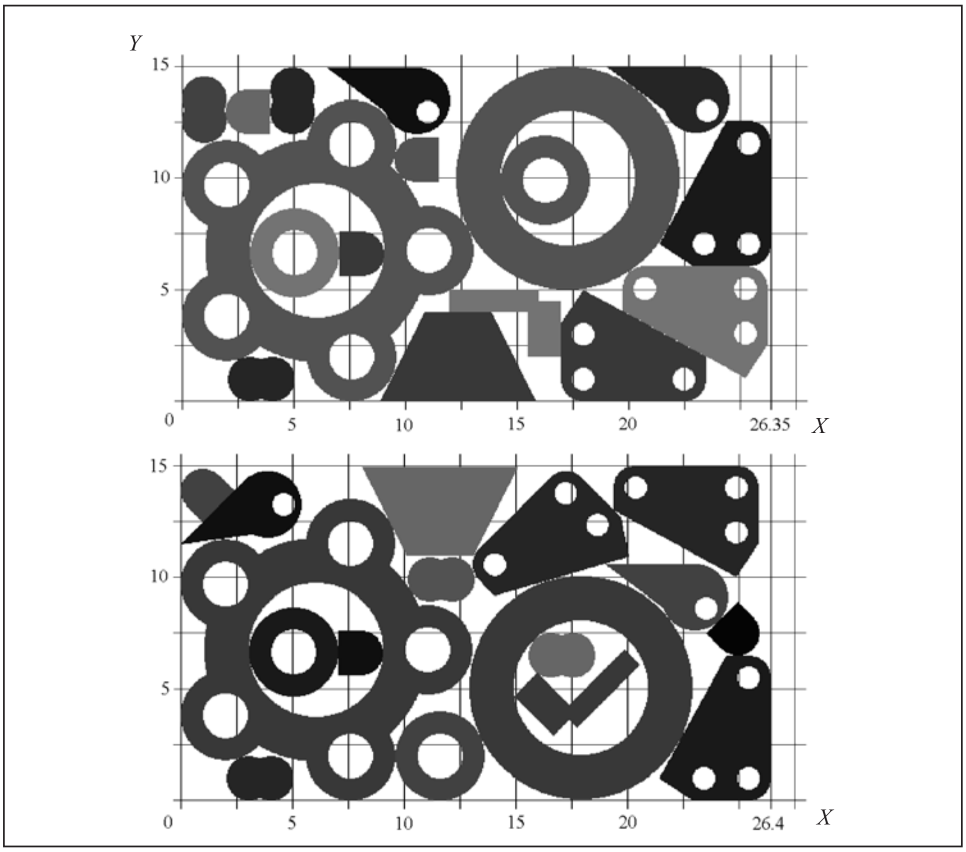

Рис. 7. Новые решения задачи с помощью эволюционного алгоритма

Была рассмотрена клеточная аппроксимация задачи, где элементарным квадратом является один пиксель. Решения, полученные с помощью эволюционного алгоритма на фрагментарной структуре, отражены на рис. 7 в масштабе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренный в настоящей статье подход позволяет свести общую задачу двумерной упаковки в полуограниченную полосу, в которой отсутствуют какие-либо ограничения на форму фигур, к задаче комбинаторной оптимизации, что, в свою очередь, позволяет применить известные метаэвристики для поиска приближенных решений за приемлемое время. Представленные практические результаты показывают эффективность работы метаэвристик (в частности, генетического алгоритма и алгоритма муравьиной колонии), которые основаны на фрагментарной структуре задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Москва: Мир, 1982. 416 с.
2. Glover F., Taillard E., de Werra D. A user's guide to tabu search. *Annals of Operation Research*. 1993. Vol. 41, Iss. 1. P. 1–28.
3. Holland J.H. Adaptation in natural and artificial systems. Boston, MA: MIT Press, 1992. 288 p.
4. Курейчик В.М. Генетические алгоритмы. Состояние. Проблемы. Перспективы. *Известия РАН. Теория и системы управления*. 1999. № 1. С. 144–160.
5. Goncalves J.F. A hybrid genetic algorithm-heuristic for a two-dimensional orthogonal packing problem. *European Journal of Operational Research.* 2007. Vol. 183, N 3. P. 1212–1229.
6. Штовба С.Д. Муравьиные алгоритмы: теория и применение. *Программирование*. 2005. № 4. С. 1–16.

7. Dorigo M. Optimization, learning, and natural algorithms. PhD Thesis, Dipartimento di Elettronica, Politechnico di Milano, Italy, 1992. 140 p.
8. Lodi A., Martello S., Monaci M. Two-dimensional packing problems: A survey. *European Journal of Operation Research.* 2002. Vol. 141, N 2. P. 241–252.
9. Jain S., Gea H.C. Two dimensional packing problems using genetic algorithms. *Engineering with Computers.* 1998. Vol. 14, N 3. P. 206–213.
10. Ванидовский В.А., Лебедев О.Б. Двумерная упаковка в полуограниченную полосу на основе моделирования адаптивного поведения муравьиной колонии. *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2014. № 7 (156). С. 34–42.
11. Картак В.М. Задача упаковки прямоугольников. Точный алгоритм на базе матричного представления. *Вестник УГАТУ*. 2007. Т. 9, № 4 (22). С. 104–110.
12. Руднев А.С. Вероятностный поиск с запретами для задачи упаковки кругов и прямоугольников в полосу. *Дискретный анализ и исследование операций.* 2009. Т. 16, № 4. С. 61–86.
13. Стоян Ю.Г., Злотник М.В. Размещение кругов и невыпуклых многоугольников с поворотами в прямоугольнике минимальной длины. *Доповіді Національної академії наук України*. 2007. № 2. С. 37–42.
14. Козин И.В., Максишко Н.К., Перепелица В.А. Фрагментарные структуры в задачах дискретной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 6. С. 125–131.
15. Козин И.В. Эволюционно-фрагментарная модель задачи упаковки пентамино. *Дискретный анализ и исследование операций.* 2014. Т. 21, № 6. С. 35–50.
16. Романова Т.Е., Ступак Е.А., Злотник М.В. Математическая модель и метод решения задачи оптимизации упаковки произвольных двумерных объектов в прямоугольных областях. *Доповіді Національної академії наук України*. 2009. № 1. С. 48–53.

Надійшла до редакції 16.11.2018

І.В. Козін, С.Є. Батовський

ФРАГМЕНТАРНІ СТРУКТУРИ В ЗАДАЧІ ДВОВИМІРНОГО ПАКУВАННЯ У НАПІВОБМЕЖЕНУ СМУГУ

Анотація. Розглянуто загальну задачу двовимірного пакування в напівобмежену смугу. Показано, що її можна розглядати як задачу оптимізації на фрагментарній структурі, яка зводиться до задачі комбінаторної оптимізації на множині переставлень. Розглянуто універсальний спосіб представлення плоских фігур та алгоритм їхнього пакування в смугу. Запропоновано спосіб модифікації початкової задачі для досяжності оптимального розв’язку.

Ключові слова: дискретна оптимізація, фрагментарна структура, двовимірне пакування у смугу, еволюційний алгоритм.

I.V. Kozin, S.E. Batovskiy

FRAGMENTARY STRUCTURES IN TWO-DIMENSIONAL STRIP PACKING PROBLEM

Abstract. The paper considers a two-dimensional strip packing problem. It is shown that the problem can be considered as an optimization problem on a fragmented structure, which reduces to the problem of combinatorial optimization on a set of permutations. A universal approach of representing two-dimensional figures and the algorithm of their packing into the strip are considered. An approach to the modification of the original problem for the attainability of the optimal solution is proposed.

Keywords: discrete optimization, fragmentary structure, two-dimensional strip packing, evolutionary algorithm.

Козин Игорь Викторович,
доктор физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры Запорожского национального университета, e-mail: ainc00@gmail.com.

Батовский Сергей Евгеньевич,
аспирант Запорожского национального университета, e-mail: maxishko@ukr.net.