УДК 519.21

В.С. КИРИЛЮК

ПОЛИЭДРАЛЬНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И РОБАСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

Аннотация. Описаны свойства аппарата полиэдральных когерентных мер риска, его взаимосвязи с задачами робастной и робастной по распределению оптимизации, а также его применение в условиях неопределенности. Рассмотрены проблемы вычисления робастных конструкций полиэдральных когерентных мер риска и их минимизации, которые сведены к соответствующим задачам линейного программирования.

Ключевые слова: полиэдральная когерентная мера риска, Conditional Value-at-Risk, робастная оптимизация, робастная по распределению оптимизация, множество неопределенности, линейное программирование.

ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–6] рассматривался математический аппарат полиэдральных когерентных мер риска (ПКМР), предназначенный для оценки риска в задачах оптимизации со случайными (неопределенными) параметрами. Вначале он вводился для случайных величин (с.в.) [1], а затем развивался для различных условий неопределенности: с неточными вероятностями [2–4] и сценарными оценками [5], а также их комбинациями. В [6] аппарат ПКМР использовался для изучения задач стохастического программирования и робастной оптимизации в рамках единого подхода.

Развитие аппарата ПКМР соответствует направлению «робастная по распределению оптимизация» [7–9], в котором оптимизация выполняется по наихудшему среднему по некоторому множеству вероятностных мер. Такой подход, применяемый в условиях неопределенности, приводит к решениям более надежным, чем при оптимизации по среднему (с фиксированной вероятностной мерой), и более гибким, чем при оптимизации по наихудшему значению (минимаксе). Логика развития аппарата ПКМР состоит в учете неопределенностей задачи в робастных конструкциях мер риска.

В настоящей работе рассмотрены свойства аппарата ПКМР, описаны его применение и взаимосвязь с задачами робастной оптимизации. Из новых результатов представлены проблемы вычисления робастной конструкции ПКМР (более общей, чем в [3]) и ее минимизации, а также их сведение к соответствующим задачам линейного программирования (ЛП).

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПКМР

Как правило, в приложениях не имеется информации о распределении, а лишь представлен набор наблюдений, статистическую информацию о которых можно учитывать при решении реальных задач. Иногда вероятности тех или иных событий можно лишь неточно оценивать [10] или записывать связывающие их линейные соотношения. Тогда сценарные вероятности, учитываемые при принятии решений, оцениваются некоторым многогранником. Подобная ситуация также возникает в случае, когда создается набор сценариев будущего развития событий и моделируются последствия их реализации, но невозможно точно оценить соответствующие сценарные вероятности.

Например, пусть вектор сценарных вероятностей p_0 оценивается лишь снизу и сверху соответственно векторами p_l и p_u, т.е. следующим многогранным множеством неопределенности U_P:

$$U_P = \left\{ p : p \geq 0, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_l \leq p \leq p_u \right\}. \tag{1}$$

Или пусть имеем урну с шарами, например красными, черными и желтыми. Пусть также известно, что в ней 30 красных шаров, а общее количество черных и желтых шаров не меньше 60, но не больше 70. Обозначим p_i, $i = 1, 2, 3$, вероятности выбора из урны красных, черных и желтых шаров соответственно. Тогда, как нетрудно видеть, множество U_P имеет вид:

$$U_P = \left\{ p = (p_1, p_2, p_3): p \geq 0, \sum_{i=1}^{3} p_i = 1, 0.3 \leq p_1 \leq \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \leq p_2 + p_3 \leq 0.7 \right\}, \quad (2)$$

где $0.3 = \dfrac{30}{30+70} \leq p_1 \leq \dfrac{30}{30+60} = \dfrac{1}{3}$ и $\dfrac{2}{3} = \dfrac{60}{60+30} \leq p_2 + p_3 \leq \dfrac{70}{70+30} = 0.7$.

Если в таких условиях известны выигрыши $X(\omega)$, зависящие от реализации некоторого сценария ω, то можно оценить наихудшие по множеству U_P средние потери в качестве меры риска

$$\rho(X) = \sup \{E_P[-X] : P \in U_P\}. \quad (3)$$

В дальнейшем многогранник для оценки сценарных вероятностей будем описывать

$$Q = \{p : Bp \leq c, \ p \geq 0\}, \quad (4)$$

где B — матрица соответствующего размера и c — вектор соответствующей размерности.

Представление множества Q в (4) удобно разделить на стандартную и содержательную [3] части

$$B = \begin{pmatrix} B_0 \\ B_1 \end{pmatrix}, \ c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ -1 & \dots & -1 \end{pmatrix}, \ c_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

представляют стандартное для вероятностей условие $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ в виде двух неравенств: $\sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1$ и $-\sum_{i=1}^{n} p_i \leq -1$.

Соответственно B_1 и c_1 представляют содержательную (неформальную) часть описания многогранника в (4). Например, эта часть выглядит как

$$B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}, \ c_1 = \begin{pmatrix} -p_l \\ p_u \end{pmatrix}$$

для множества U_P из (1) и как

$$B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ c_1 = \begin{pmatrix} -0.3 \\ 1/3 \\ -2/3 \\ 0.7 \end{pmatrix}$$

для множества U_P из (2).

Во множество (4) можно включить и другую информацию, например о первых моментах с.в. Подобные рассуждения явились аргументом для изучения конструкций, где множество сценарных вероятностей представлено в виде некоторого многогранника. В подобном виде для дискретно распределенных (д.р.) с.в. можно представить и ряд известных мер риска [1–3].

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, Σ, P_0) задана с.в. $X : \Omega \to R$. В [11] для оценки риска с.в. финансового потока X вводилось понятие когерентной меры риска (КМР), которая представляется в следующем виде:

$$\rho(X) = \sup \{E_P[-X] : P \in Q\}, \quad (7)$$

где $E_P[\cdot]$ — математическое ожидание по вероятностной мере P, а Q — некоторое выпуклое замкнутое множество вероятностных мер. Данная КМР интерпретирует потенциальные потери финансового потока, описываемые величиной $(-X)$.

Если с.в. X характеризует затраты, убытки, стоимость и другие величины с предпочтением «чем меньше, тем лучше», для КМР используется подобное представление без изменения знака с.в.: $\rho(X) = \sup\{E_P[X] : P \in Q\}$.

Отметим, что конечную д.р.с.в. X можно представить конечным набором сценарных значений $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с соответствующими вероятностями $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$. Во введеное в [1] понятие ПКМР к описанию (7) для д.р.с.в. дополнительно постулировалась полиэдральность множества Q, т.е. его представление в виде (4), где B и c в виде (5) разделяются соответственно на стандартную (6) и содержательную части. Последняя, собственно, и определяет меру риска в виде соотношений (7), (4)–(6).

Приведем примеры некоторых ПКМР, определяемых по известному вектору сценарных вероятностей p_0 в виде (7), (4)–(6):

1) для средних потерь $E_{P_0}[X]$ множество $Q = \{p_0\}$, в этом случае $B_1 = I$, $c_1 = p_0$, где I — единичная матрица, p_0 — вектор сценарных вероятностей;

2) для максимальных потерь Q — множество всех вероятностных мер, в котором не имеется содержательной части в виде B_1 и c_1;

3) для средних значений на хвосте распределения (Conditional Value-at-Risk (CVaR) [12]), для $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(X)$ содержательная часть имеет вид

$$B_1 = I,\ c_1 = \frac{p_0}{\alpha}; \tag{8}$$

4) спектральная когерентная мера риска (СКМР) [13], для которой содержательная часть описывается как

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right) p_0,$$

где λ_i и α_i для сценариев $i = 1, \ldots, n$ и спектра $\varphi(\cdot)$ определяются из набора соответствующих соотношений [3];

5) представление Кусуоки инвариантных по распределению КМР (ПКИМР) [14], тогда матрица B_1 и вектор c_1 имеют вид

$$B_1 = I,\ c_1 = \left(\max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right) p_0.$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что для д.р.с.в. все меры риска из приведенных примеров можно представить в виде $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(\cdot)$ с соответствующим параметром α, а именно $\alpha = 1$ для примера 1, $\alpha = \min\{p_i^0 \neq 0, i = 1, \ldots, n\}$ для примера 2, $\alpha = \dfrac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}}$ для примера 4 и $\alpha = \dfrac{1}{\max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\alpha_i}}$ для примера 5.

Однако меры риска, сконструированные из множества неопределенности U_P в виде (3), могут существенно отличаться от $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(X)$, представленной специфическими матрицей B_1 и вектором c_1. В ПКМР они, по сути, могут быть произвольными.

Замечание 2. Средние потери формально представляются в виде ПКМР с атрибутами $B_1 = \begin{pmatrix} -I \\ I \end{pmatrix}$, $c_1 = \begin{pmatrix} -p_0 \\ p_0 \end{pmatrix}$, обеспечивающими условие $Q = \{p_0\}$. Но за счет нормировки компонент вектора p_0, $\sum_{i=1}^{n} p_i^0 = 1$, это справедливо также для $B_1 = I,\ c_1 = p_0$.

В примерах 1–5 описания ПКМР в виде (7), (4)–(6) множество Q зависит от исходной вероятностной меры (вектора сценарных вероятностей p_0), что позволяет интерпретировать его как многозначное отображение (м.о.) $Q(\cdot)$, определяющее меру риска по исходному вектору p_0 [2].

Рассмотрим теперь свойство инвариантности по распределению ПКМР, представленной в виде соотношений (7), (4)–(6). Суть этого свойства заключается в том, что если с.в. X и Y имеют одинаковое распределение, то и их меры риска одинаковы, или более формально $X \overset{D}{\sim} Y \Rightarrow \rho(X) = \rho(Y)$.

Рассмотрим ПКМР в виде соотношений (7), (4)–(6) для д.р.с.в. X. Как следует из (7), это опорная функция выпуклого многогранника $Q(p_0)$ по направлению $(-x)$:

$$\rho(X) = W_{Q(p_0)}(-x) = \max \{\langle -x, p\rangle : p \in Q(p_0)\},$$

поэтому однозначно им определяется.

Пусть в векторе $p_0 = (p_1^0, \ldots, p_n^0)$ имеются две одинаковые компоненты, например $p_i^0 = p_j^0$. Тогда для некоторой с.в. X изменение нумерации сценариев с одинаковыми вероятностями не изменяет ее функции распределения, следовательно, не должно изменять и величину ПКМР.

Действительно, обозначим x^1 — вектор, который отличается от x соответственно перестановкой координат $x_i \leftrightarrow x_j$. Тогда из условия $p_i^0 = p_j^0$ должно следовать равенство $W_{Q(p_0)}(-x) = W_{Q(p_0)}(-x^1)$, т.е. $Q(\cdot)$ в некотором смысле симметрично в исходном $(-x)$ и преобразованном $(-x^1)$ направлениях.

Пусть векторы $c_1(\cdot)$ из определения многогранников $Q(\cdot)$, как и в примерах 1, 3–5, имеют следующий простой вид:

$$c_1(p_0) = \gamma p_0, \tag{9}$$

где γ — некоторый скалярный множитель.

В этом случае необходимым условием равенства опорных функций при перестановке координат $p_i^0 \leftrightarrow p_j^0$ является возможность перестановки i-й и j-й строк из описания многогранника $Q(\cdot)$. Переходя к элементам матриц $B_1(p_0)$, получаем

$$p_i^0 = p_j^0 \Rightarrow b_{ki}(p_0) = b_{kj}(p_0),\ k = 1, \ldots, n,\ k \neq i, j \text{ и } b_{ii}(p_0) = b_{jj}(p_0). \tag{10}$$

В случае одинаковых сценарных вероятностей $p_i^0 = 1/n$, $i = 1, \ldots, n$, условие (10) должно выполняться для любых $i, j = 1, \ldots, n$, следовательно, оно имеет следующий вид:

$$p_i^0 = \frac{1}{n},\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow b_{ki}(p_0) = b_{kj}(p_0),\ k, i, j = 1, \ldots, n,\ k \neq i, j \text{ и } \operatorname{diag} B_1(p_0) = \gamma I,$$

где γ — некоторый скалярный множитель.

Сформулируем это в виде утверждения.

Утверждение 1. При предположении (9) условие (10) является необходимым для инвариантности по распределению ПКМР в виде (7), (4)–(6).

Замечание 3. Нетрудно видеть, что в случае одинаковых сценарных вероятностей условие (10) является также достаточным, поэтому описание $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}(\cdot)$ в виде (8) гарантирует его инвариантность по распределению.

РОБАСТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ПКМР

Пусть теперь не фиксируется вероятностная мера P_0, а считается заданным лишь (Ω, Σ) — пространство элементарных событий Ω с сигма-алгеброй Σ, на котором рассматриваются неопределенные исходы $X(\omega)$. Тогда для случая дискретных распределений с конечным множеством Ω элементарных событий-сценариев неопределенный исход X задается сценарными значениями $X(\omega)$, а вероятностная мера P_0 (вектор сценарных вероятностей p_0) может изменяться на некотором множестве.

Интерпретация $Q(\cdot)$ как м.о., определяющего меру риска, позволяет строить ПКМР и без точной информации о p_0. Действительно, пусть $p_0 \in U_P$, тогда можно построить соответствующую меру риска. Для этого по исходной мере риска ρ_0 вида (7) и множеству вероятностей U_P строится конструкция [2]

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X) = \sup\{E_P[-X] : P \in Q(U_P)\}, \tag{11}$$

где $Q(U_P) = \overline{\text{co}}\left(\bigcup_{p_0 \in U_P} Q(p_0)\right)$, $Q(\cdot)$ — м.о. исходной меры $\rho_0(\cdot)$, $\overline{\text{co}}$ — выпуклая замкнутая оболочка. Такую конструкцию будем называть робастной по множеству вероятностей U_P, поскольку она учитывает возможность (риск) любого $p_0 \in U_P$.

Покажем, как вычислить ПКМР, построенную в виде (11) по исходной ПКМР в виде (7), (4)–(6) и полиэдральному множеству неопределенности U_P в виде (4).

Уточним обозначения. Пусть полиэдральное множество (4) из конструкции исходной меры $\rho_0(\cdot)$ описывается как

$$Q_{\rho_0}(p_0) = \{B_{\rho_0}(p_0)p \le c_{\rho_0}(p_0),\ p \ge 0\} = \left\{\begin{pmatrix} B_0 \\ B^1_{\rho_0}(p_0)\end{pmatrix} p \le \begin{pmatrix} c_0 \\ c^1_{\rho_0}(p_0)\end{pmatrix},\ p \ge 0\right\}, \tag{12}$$

где матрица B_0 и вектор c_0 представляют стандартную часть, а параметрически заданные матрица $B^1_{\rho_0}(p_0)$ и вектор $c^1_{\rho_0}(p_0)$ — содержательную часть описания (см. примеры 1–5). Полиэдральное множество неопределенности вероятностей U_P описывается как:

$$U_P = \{p : B_u p \le c_u,\ p \ge 0\}. \tag{13}$$

Тогда вычисление робастной по множеству U_P (13) и исходной мере ρ_0 в виде (7), (12), (5), (6) ПКМР в (11) сводится к решению следующей оптимизационной задачи:

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X) = \sup\left\{\langle -x, p\rangle : p \in \overline{\text{co}} \bigcup_{p_0 \in U_P} Q_{\rho_0}(p_0)\right\} =$$

$$= \sup\left\{\langle -x, p\rangle : p \in \bigcup_{p_0 \in U_P} Q_{\rho_0}(p_0)\right\}.$$

Записывая структуру множеств $Q_{\rho_0}(p_0)$ и Q_u, имеем

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X) = \max_p \left\{\langle -x, p\rangle : p \in \bigcup_{p_0 \in \{B_u p_0 \le c_u\}} \left\{\begin{pmatrix} B_0 \\ B^1_{\rho_0}(p_0)\end{pmatrix} p \le \begin{pmatrix} c_0 \\ c^1_{\rho_0}(p_0)\end{pmatrix}\right\}\right\}. \tag{14}$$

Замечание 4. Вообще говоря, вычисление ПКМР (14) можно свести к задаче ЛП, если знать все крайние точки полиэдра $U_P = \{p : B_u p \le c_u,\ p \ge 0\}$, который можно представить как выпуклую оболочку таких точек. Тогда множество, по которому ведется оптимизация в такой конструкции, есть выпуклая оболочка многогранников $Q_{\rho_0}(p_0^j)$, выбранных во всех крайних точках p_0^j полиэдра U_P.

Обычно не известны все крайние точки многогранников, поэтому сделаем предположения, которые позволят вычислять меру (14) как задачу ЛП, а именно предположим, что:

а) матрица $B^1_{\rho_0}(p_0)$ не зависит от p_0, т.е. $B^1_{\rho_0}(p_0) = B^1_{\rho_0}$;

б) вектор $c^1_{\rho_0}(\cdot)$ имеет вид $c^1_{\rho_0}(p_0) = Dp_0$, где D — некоторая фиксированная матрица.

Тогда, как нетрудно видеть, вычисление конструкции (14) можно свести к следующей задаче ЛП:

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X) = \max_{\substack{(p, p_0) \\ B_0 p \le c_0,\ p \ge 0 \\ B^1_{\rho_0} p \le Dp_0 \\ B_u p_0 \le c_u,\ p_0 \ge 0}} \langle -x, p \rangle . \tag{15}$$

Отметим, что предположения а), б) выполняются для ПКМР из примеров 1–5, и сформулируем следующее утверждение.

Утверждение 2. В случае выполнения предположений а), б) робастная по множеству вероятностей U_P в виде (13) и исходной ρ_0 конструкция меры (14) вычисляется как задача ЛП (15). В частности, для исходной ρ_0 из примеров 1, 3–5 такая конструкция вычисляется как (15) со следующими атрибутами:

— для средних потерь (пример 1) $B^1_{\rho_0} = I$, $D = I$;

— для $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}$ (пример 3) $B^1_{\rho_0} = I$, $D = \frac{1}{\alpha} I$;

— для СКМР (пример 4) $B^1_{\rho_0} = I$, $D = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) I$;

— для ПКИМР (пример 5) $B^1_{\rho_0} = I$, $D = \left(\max_{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda} \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\alpha_i} \right) I$.

Отметим, что вычисление наибольших потерь из примера 2 не изменяется, поскольку исходное множество $Q_{\rho_0}(p_0)$, описываемое только стандартной частью, остается таким же.

Замечание 5. Нетрудно видеть, что для описанных примеров действие матрицы D на вектор p_0 является обычным скалярным умножением.

ПКМР И РОБАСТНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ

В [15] рассмотрена взаимосвязь между мерой риска и множеством неопределенности для робастной оптимизации. Опишем такую взаимосвязь для ПКМР.

Пусть на (Ω, Σ) определен случайный вектор $Z(\omega) = (Z_1(\omega), \ldots, Z_k(\omega))$, т.е. $Z: \Omega \to R^k$. Для некоторого фиксированного направления $v \in R^k$ рассмотрим его скалярное умножение на этот вектор, т.е. с.в. $X_v(\omega) = \langle v, Z(\omega) \rangle$. Пусть случайный вектор Z имеет дискретное распределение, следовательно, X_v — д.р.с.в., для которой определим ПКМР в виде (7), (4)–(6):

$$\rho(X_v) = \sup \{ E_P[-X_v] : P \in Q(P_0) \} = \max \{ \langle -x_v, p \rangle : B(p_0) p \le c(p_0) \}. \tag{16}$$

Представим $Z(\omega)$ в виде матрицы H, строки которой описывают распределение соответствующих компонент вектора $Z_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, k$:

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_1(\omega) \\ \ldots \\ Z_k(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(\omega_1) & \ldots & z_1(\omega_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ z_k(\omega_1) & \ldots & z_k(\omega_n) \end{pmatrix} = H.$$

Тогда с.в. $X_v(\omega)$ описывается вектором $x_v = H^{\mathrm{T}} v$, а ПКМР (16) имеет вид

$$\rho(X_v) = \max \{ \langle -H^{\mathrm{T}} v, p \rangle : B(p_0) p \le c(p_0) \} = \max \{ \langle v, -Hp \rangle : B(p_0) p \le c(p_0) \}.$$

Введем обозначение $y = Hp = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} p_i z_1(\omega_i) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} p_i z_k(\omega_i) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i)$. Тогда, записывая стандартную и содержательную части ПКМР, получаем

$$\rho(X_v) = \max \left\{ \langle v, -y \rangle : y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ B_1(p_0) p \le c(p_0),\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \ge 0 \right\},$$

или окончательно имеем

$$\rho(X_v) = \max \{ \langle v, -y \rangle : y \in U \}, \tag{17}$$

$$U = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ B_1(p_0) p \le c_1(p_0),\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \ge 0 \right\}. \tag{18}$$

Замечание 6. Знак «–» обусловлен конструкцией (7), в которой потери описываются как отрицательные значения с.в. (финансового потока). Если с.в. X характеризует величины с предпочтением «чем меньше, тем лучше», в (17) знак «–» следует опустить.

Теперь безрисковость X_v означает $\rho(X_v) \le 0$, где $\rho(\cdot)$ описывается в виде робастной оптимизации (17) на множестве неопределенности (18). А проблему минимизации меры риска за счет выбора весов компонент v для случайного вектора $Z(\omega)$ (задачу оптимизации портфеля) можно решать либо в исходной постановке [1–3], либо в форме робастной оптимизации, находя минимум функции (17), (18).

Таким образом, в (18) получено многогранное детерминированное множество неопределенности $U \subset R^k$ в виде выпуклых комбинаций реализаций случайных векторов с ограничениями на веса, задаваемые содержательной частью ПКМР. Поскольку выпуклое замкнутое множество U взаимно-однозначно описывается своей опорной функцией, это означает взаимно-однозначное соответствие между ПКМР (16) и множеством U (18). Сформулируем это в виде утверждения.

Утверждение 3. Определенная по направлению v в смысле (16) ПКМР взаимно-однозначно соответствует полиэдральному множеству неопределенности (18) в смысле (17), (18).

Подставляя в (18) содержательные части ПКМР из примеров 1–5, получаем соответствующие им множества U. Например, для $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}$ множество U имеет вид:

$$U = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ p \le \frac{p_0}{\alpha},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \ge 0 \right\},$$

а для случая максимальных потерь

$$U = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \ge 0 \right\}. \tag{19}$$

В последнем случае ввиду отсутствия содержательной части ПКРМ U — выпуклая комбинация реализаций случайных векторов.

Нетрудно описать такое множество и для ПКМР из примеров 1, 3–5, воспользовавшись представлением U для $\mathrm{CVaR}_{1-\alpha}$ и замечанием 1.

Предположим теперь, что случайные векторы $Z(\omega)$ распределены на некотором многограннике из R^k, заданном в виде линейных неравенств $\{y : Ay \le b\} \subset R^k$, при этом не имеется какой-либо информации о распределениях. Понятно, что тогда $U = \{y : Ay \le b\}$ есть множество неопределенности задачи робастной оптимизации, которая сводится к минимизации по направлению опорной функции этого множества $\rho(X_v) = \max \{ \langle v, -y \rangle : Ay \le b \}$.

Покажем, что подобный результат можно получить, используя и аппарат ПКМР. Действительно, пусть случайные векторы $Z(\omega)$ дискретно распределены по всем вершинам этого многогранника: $Z(\omega_1), \dots, Z(\omega_n)$. Рассмотрим множество неопределенности U (18) для случая максимальных потерь, т.е. в виде (19):

$$U = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \geq 0 \right\} = \mathrm{co}\,\{Z(\omega_i),\ i = 1, \dots, n\} = \{y : Ay \leq b\}.$$

Следовательно, такой случай робастной оптимизации представим как частный случай описания в виде (17), (18). Если при этом известна некоторая дополнительная информация о распределении, то можем получить более тонкое представление множества U.

Рассмотрим теперь робастную конструкцию ПКМР в виде (14) по множеству вероятностей U_P (13) и исходной ρ_0. Тогда

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X_v) =$$

$$= \max\left\{ \langle v, -y\rangle : y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ p \in \bigcup_{p_0 \in \{B_u p_0 \leq c_u\}} \left\{ \begin{pmatrix} B_0 \\ B^1_{\rho_0}(p_0) \end{pmatrix} p \leq \begin{pmatrix} c_0 \\ c^1_{\rho_0}(p_0) \end{pmatrix} \right\} \right\},$$

или

$$\rho_{\rho_0; U_P}(X_v) = \max\{\langle v, -y\rangle : y \in U\},$$

$$U = \mathrm{co}\left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ p \in \bigcup_{p_0 \in \{B_u p_0 \leq c_u\}} \{B^1_{\rho_0}(p_0) p \leq c^1_{\rho_0}(p_0)\},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \geq 0 \right\},$$

где множество U — некоторый многогранник.

При выполнении предположений а), б), когда такая конструкция описывается как (15), множество U имеет вид:

$$U = \mathrm{co}\left\{ y = \sum_{i=1}^{n} p_i Z(\omega_i),\ p \in \bigcup_{p_0 \in \{B_u p_0 \leq c_u\}} \{B^1_{\rho_0} p \leq D p_0\},\ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p \geq 0 \right\}. \quad (20)$$

МИНИМИЗАЦИЯ РОБАСТНОЙ КОНСТРУКЦИИ ПКМР

Рассмотрим теперь задачу минимизации ПКМР, робастной по множеству вероятностей, а именно выбор весов $v_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^{k} v_i = 1$, компонент случайного вектора

$$Z(\omega) = \begin{pmatrix} Z_1(\omega) \\ \dots \\ Z_k(\omega) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(\omega_1) & \dots & z_1(\omega_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ z_k(\omega_1) & \dots & z_k(\omega_n) \end{pmatrix} = H$$

таким образом, чтобы с.в. $X_v(\omega) = \langle v, Z(\omega)\rangle$ минимизировала робастную по множеству вероятностей U_P и исходной $\rho_0(\cdot)$ конструкцию ПКМР вида (15).

В этом случае с.в. $X_v(\omega)$ описывается вектором $x_v = H^{\mathrm{T}} v$, а соответствующая задача формулируется как:

$$\min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^{k} v_i = 1,\, v \geq 0}} \rho_{\rho_0; U_P}(X_v) = \min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^{k} v_i = 1,\, v \geq 0}} \max_{\substack{(p, p_0) \\ B_0 p \leq c_0,\ p \geq 0 \\ B^1_{\rho_0} p \leq D p_0 \\ B_u p_0 \leq c_u,\, p_0 \geq 0}} \langle -H^{\mathrm{T}} v, p\rangle.$$

Обозначим o_1, o_2, o_3, O_1, O_2 нулевые векторы размерностей n, l, k и матрицы размера $2 \times n$, $m \times n$ соответственно, где n — количество сценариев, l — количество строк матрицы $B^1_{\rho_0}$ из содержательной части описания $\rho_0(\cdot)$, k — количество компонент случайного вектора Z (портфеля), m — количество строк матрицы B_u из описания множества U_P. С учетом этих обозначений предыдущее выражение имеет вид

$$\min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^k v_i=1,\, v\ge 0}} \max_{\substack{(p,p_0) \\ B_0 p + O_1 p_0 \le c_0,\ p\ge 0 \\ B^1_{\rho_0} p - D p_0 \le o_2 \\ O_2 p + B_u p_0 \le c_u,\ p_0 \ge 0}} \langle -H^{\mathrm{T}} v,\, p\rangle + \langle o_1,\, p_0\rangle .$$

В силу ограничений на p и p_0 как на векторы вероятностей внутренняя подзадача совместна и конечна. Следовательно, она эквивалентна своей двойственной подзадаче, которой ее можно заменить в общей постановке. Обозначив w вектор размерности $(2+l+m)$, запишем данную постановку как

$$\min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^k v_i=1,\, v\ge 0}} \min_{\substack{w \\ \begin{pmatrix} B_0^{\mathrm{T}} & (B^1_{\rho_0})^{\mathrm{T}} & O_2^{\mathrm{T}} \\ O_1^{\mathrm{T}} & -D^{\mathrm{T}} & B_u^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} w \ge \begin{pmatrix} -H^{\mathrm{T}} v \\ o_1 \end{pmatrix},\ w\ge 0}} \langle (c_0, o_2, c_u),\, w\rangle .$$

Обозначая O_3 нулевую матрицу размера $n\times k$, окончательно получаем

$$\min_{\substack{(w,v) \\ \begin{pmatrix} B_0^{\mathrm{T}} & (B^1_{\rho_0})^{\mathrm{T}} & O_2^{\mathrm{T}} \\ O_1^{\mathrm{T}} & -D^{\mathrm{T}} & B_u^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} H^{\mathrm{T}} \\ O_3 \end{pmatrix} v \ge \begin{pmatrix} o_3 \\ o_1 \end{pmatrix} \\ \sum_{i=1}^k v_i=1,\, v\ge 0,\ w\ge 0}} \langle (c_0, o_2, c_u),\, w\rangle . \tag{21}$$

Таким образом, исходная задача минимизации за счет выбора весов компонент случайного вектора $\sum_{i=1}^k v_i = 1$, $v \ge 0$, для робастной конструкции ПКМР вида (15) сводится к задаче ЛП в виде (21). Сформулируем это в следующем утверждении.

Утверждение 4. Оптимальным набором весов, минимизирующим робастную конструкцию ПКМР вида (15), есть компонента v решения (w, v) задачи ЛП (21).

Подставляя в задачу ЛП (21) атрибуты мер риска из примеров 1, 3–5 (см. утверждение 2) в качестве исходных ρ_0, можно минимизировать их робастные конструкции.

Замечание 7. Для минимизации функции можно также использовать ее представление в виде (17), (20), если формально описать множество выпуклых комбинаций (20).

Рассмотрим теперь задачу в виде портфельной оптимизации, когда необходимо минимизировать робастную конструкцию меры риска (15) при ограничениях $r(X) \ge r_0$ на функцию выигрыша:

$$r(X) = \min\,\{E_p[X] : B_u p \le c_u,\ p \ge 0\}.$$

Эта функция обобщает понятия средней доходности на случай неопределенности $p_0 \in U_P$, когда U_P описывается в виде (13), а такие ограничения гарантируют выигрыш в условиях неопределенности не меньше r_0. Тогда в принятых обозначениях такая задача имеет вид

$$\min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^k v_i=1,\, v\ge 0 \\ r(X_v)\ge r_0}} \rho_{\rho_0; U_P}(X_v) = \min_{\substack{v \\ \sum_{i=1}^k v_i=1,\, v\ge 0 \\ \min\limits_{B_u p \le c_u,\, p\ge 0} \langle H^{\mathrm{T}} v, p\rangle \ge r_0}} \max_{\substack{(p_1,p_0) \\ B_0 p_1 \le c_0,\ p_1\ge 0 \\ B^1_{\rho_0} p_1 \le D p_0 \\ B_u p_0 \le c_u,\ p_0\ge 0}} \langle -H^{\mathrm{T}} v,\, p_1\rangle . \tag{22}$$

Как нетрудно видеть, ограничение на функцию выигрыша $r(X_v) \ge r_0$ под знаком минимума можно заменить его двойственным представлением, а затем эквивалентным ему соотношением по следующей цепочке соотношений:

$$\min_{B_u p \le c_u,\, p \ge 0} \langle H^{\mathrm{T}} v,\, p\rangle \ge r_0 \Leftrightarrow \max_{-B_u^{\mathrm{T}} u - H^{\mathrm{T}} v \le 0,\, u \ge 0} \langle -c_u,\, u\rangle \ge r_0 \Leftrightarrow \exists\, u: \underset{-B_u^{\mathrm{T}} u - H^{\mathrm{T}} v \le 0,\, u \ge 0}{\langle -c_u,\, u\rangle \ge r_0}.$$

Сделаем в (22) две замены: во-первых, как и ранее, внутреннюю подзадачу заменим ее двойственной, во-вторых, ограничения на функцию выигрыша — последним выражением из представленной цепочки эквивалентных соотношений. Тогда окончательно получим

$$\min_{\substack{(w,v,u) \\ \begin{pmatrix} B_0^{\mathrm{T}} & (B_{\rho 0}^1)^{\mathrm{T}} & O_2^{\mathrm{T}} \\ O_1^{\mathrm{T}} & -D^{\mathrm{T}} & B_u^{\mathrm{T}} \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} H^{\mathrm{T}} \\ O_3 \end{pmatrix} v \ge \begin{pmatrix} o_3 \\ o_1 \end{pmatrix} \\ \langle -c_u,\, u\rangle \ge r_0 \\ -H^{\mathrm{T}} v - B_u^{\mathrm{T}} u \le 0,\ u \ge 0 \\ \sum_{i=1}^{k} v_i = 1,\, v \ge 0,\ w \ge 0}} \langle (c_0,\, o_2,\, c_u),\, w\rangle . \qquad (23)$$

Сформулируем полученный результат в виде утверждения.

Утверждение 5. В случае совместности задачи (22) ее решением есть компонента v решения (w, v, u) задачи ЛП (23).

Отметим, что можно поставить и другие задачи оптимизации портфеля по соотношению выигрыш–риск для робастных вариантов функций выигрыша и ПКМР [3].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По мнению автора, в условиях неопределенности перспективен подход «робастной по распределению оптимизации», состоящий в оптимизации среднего значения, наихудшего по некоторому множеству вероятностных мер.

Получаемые решения надежнее, чем при оптимизации по среднему с известной вероятностной мерой, и более гибкие, чем при робастной оптимизации, т.е. при оптимизации наихудшего значения по некоторому множеству. Учитывая в постановках не только такое множество, но и информацию о распределении на нем изучаемых параметров, можно точнее поставить задачу.

Выбор подобного множества вероятностных мер — это дополнительная возможность при постановке задачи. Так, выбирая множество всех вероятностных мер, сосредоточенных на множестве неопределенности из робастной оптимизации, можем получить постановку робастной оптимизации как частный случай.

Наконец, класс КМР [11] строится как наихудшее среднее значение по некоторому множеству вероятностных мер. Поэтому, выбирая соответствующее множество, можно выбрать определенную меру риска из этого класса. Затем, учитывая в подобной конструкции меры риска наихудшие значения при вариации исходной вероятностной меры по некоторому множеству неопределенности U_P, можно построить робастную по U_P конструкцию такой меры.

Таким образом, развитие аппарата ПКМР как подкласса КМР вполне естественно в процессе развития математического аппарата для принятия решений в условиях неопределенности. Однако его применение ограничено, поскольку этот аппарат предназначался для линейных задач, в частности, для поиска оптимальных по соотношению выигрыш–риск портфелей с использованием методов ЛП. Это достигалось выбором в качестве функций выигрыша и мер риска конструкций, подобных ПКМР [3].

Понятно, что для более сложных постановок задач нужно применять более изощренные методы современного выпуклого анализа. Как и в описанном случае, это предполагает удачное применение теорем двойственности для сведения исходной задачи к задачам, решение которых можно найти [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кирилюк В.С. О классе полиэдральных когерентных мер риска. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. Т. 40, № 4. С. 155–167.

2. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимизация инвестиционного портфеля. *Кибернетика и системный анализ.* 2008. Т. 44, № 2. С. 120–133.
3. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска и оптимальные портфели по соотношению вознаграждение–риск. *Кибернетика и системный анализ*. 2014. Т. 50, № 5. С. 85–103.
4. Кирилюк В.С. Теория ожидаемой полезности, оптимальные портфели и полиэдральные когерентные меры риска. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 6. С. 63–72.
5. Кирилюк В.С. Полиэдральные когерентные меры риска при неточных сценарных оценках. *Кибернетика и системный анализ*. 2018. Т. 54, № 3. С. 94–105.
6. Кирилюк В.С. Меры риска в задачах стохастической и робастной оптимизации. *Кибернетика и системный анализ*. 2015. Т. 51, № 6. С. 46–59.
7. Delage E., Ye.Y. Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations Research.* 2010. Vol. 58, N 3. P. 595–612.
8. Wiesemann W., Kuhn D., Sim M. Distributionally robust convex optimization. *Operations Research*. 2014. Vol. 62, N 6. P. 1358–1376.
9. Shapiro A. Distributionally robust stochastic programming. *SIAM J. Optim*. 2017. Vol. 27, N 4. P. 2258–2275.
10. Augustin T., Coolen F., Cooman G., Troffaes M. (Eds). Introduction to imprecise probabilities. Chichester: Wiley, 2014. 403 p.
11. Artzner P., Delbaen F., Eber J.M., Heath D. Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*. 1999. Vol. 9, N 3. P. 203–228.
12. Rockafellar R.T., Uryasev S. Optimization of Conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*. 2000. Vol. 2, N 3. P. 21–41.
13. Acerbi C. Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion. *J. Banking & Finance*. 2002. Vol. 26, N 7. P. 1505–1518.
14. Kusuoka S. On law invariant coherent risk measures. In: *Advances in Mathematical Economics*. Kusuoka S., Maruyama T. (Eds.). Vol. 3. Tokyo: Springer, 2001. P. 83–95.
15. Bertsimas D., Brown D.B. Constructing uncertainty sets for robust linear optimization. *Operations Research*. 2009. Vol. 57, N 6. P. 1483–1495.

Надійшла до редакції 05.12.2018

В.С. Кирилюк

ПОЛІЕДРАЛЬНІ КОГЕРЕНТНІ МІРИ РИЗИКУ І РОБАСТНА ОПТИМІЗАЦІЯ

Анотація. Описано властивості апарату поліедральних когерентних мір ризику, його зв'язок з задачами робастної та робастної за розподілом оптимізації, а також його застосування в умовах невизначеності. Розглянуто проблеми обчислення робастних конструкцій поліедральних когерентних мір ризику та їхньої мінімізації, які зведено до відповідних задач лінійного програмування.

Ключові слова: поліедральна когерентна міра ризику, Conditional Value-at-Risk, робастна оптимізація, робастна за розподілом оптимізація, множина невизначеності, лінійне програмування.

V.S. Kirilyuk

POLYHEDRAL COHERENT RISK MEASURES AND ROBUST OPTIMIZATION

Abstract. Properties of the apparatus of polyhedral coherent risk measures, its relationship with problems of robust and distributionally robust optimization, as well as its application under uncertainty are described. Problems of calculating robust constructions of polyhedral coherent risk measures and their minimization, which are reduced to the corresponding linear programming problems, are considered.

Keywords: polyhedral coherent risk measure, Conditional Value-at-Risk, robust optimization, distributionally robust optimization, robust risk measure construction, uncertainty set, linear programming.

Кирилюк Владимир Семенович,
доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: vlad00@ukr.net.