

ТЕСТИРОВАНИЕ МНОГОШАГОВОГО ОДНОСТАДИЙНОГО МЕТОДА НА ЖЕСТКИХ ЗАДАЧАХ

Аннотация. Рассмотрен многошаговый одностадийный метод, позволяющий интегрировать жесткие дифференциальные уравнения и системы уравнений с высокой точностью и малыми вычислительными затратами. На примерах показано, что предложенный метод не уступает лучшим методам при решении жестких задач. Результаты расчетов позволяют определить для многошагового одностадийного метода области абсолютной устойчивости, где обеспечена возможность изменения величины шага интегрирования в широких пределах при сохранении вычислительной устойчивости метода.

Ключевые слова: жесткие уравнения и системы, многошаговый одностадийный метод, (4,2)-метод, CROS, четырехстадийный явный метод Рунге–Кутты.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] приведен эффективный метод повышенного порядка точности (четвертого на равномерной сетке) для аппроксимации частных производных первого и второго порядка, являющихся составной частью конвективно-диффузионных членов гидродинамической системы уравнений модели циркуляции атмосферы. Данный метод позволил преобразовать систему уравнений с частными производными в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и свести задачу прогноза атмосферных термодинамических процессов из начально-краевой к задаче Коши. Статьи [2, 3] посвящены разработке семейства многошаговых одностадийных явных и неявных методов решения системы ОДУ для задачи Коши с предисторией. В них рассмотрены общие вопросы, связанные с проблемами дискретизации, аппроксимации, сходимости и устойчивости. При этом остался открытым вопрос устойчивости и точности численного решения жестких систем ОДУ с помощью предложенного семейства многошаговых одностадийных методов.

Процессы, имеющие свойство жесткости, описываются функциями двух видов: с большими по модулю производными и малыми по модулю производными, причем функции с большими производными быстро убывают. Такие задачи часто встречаются в метеорологии при моделировании непрерывного прохождения через данный пункт различного типа барических образований (циклонов, антициклонов), атмосферных фронтов и т.д. Для жестких систем, как правило, существуют два участка решения с различным характером поведения его составляющих, причем длина первого участка (высокоградиентного) значительно меньше длины второго. Необходимость выделения таких уравнений в отдельный класс обусловлена трудностями, которые встречаются при их численном интегрировании традиционными методами. Для численного воспроизведения быстропротекающих процессов на высокоградиентном участке необходим малый шаг интегрирования, однако вне этого участка, где доминируют функции с малыми производными, увеличение шага приводит к резкому возрастанию погрешности, что вызывает качественное изменение поведения решения. Описанное явление происходит в тех случаях, когда метод имеет ограниченную область устойчивости.

Известно, что численное решение жестких систем ОДУ явными методами, для которых область устойчивости ограничена, является неэффективным вследствие резкого увеличения числа вычислений (малый шаг интегрирования) или неудовлетворительным из-за возрастания погрешности (так называемый взрыв погрешности) при недостаточно малом шаге. Однако неявные методы также имеют определенные недостатки. Использование неявного метода для решения жесткой локально-неустойчивой задачи может привести к качественно неверному решению [4]. При этом реализовать такие методы значительно сложнее, чем явные. Этим обусловлена необходимость проведения тестирования предложенного семейства многошаговых одностадийных явных и неявных методов на численном решении жестких уравнений и систем ОДУ. Кратко приведем полученные результаты численного эксперимента на задачах различной степени жесткости, имеющих аналитические решения.

ЖЕСТКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СКАЛЯРНОГО ОДУ

Оценку эффективности конечно-разностной j -шаговой одностадийной схемы

$$\sum_{i=0}^j \alpha_i y_{n+i} - \tau_l \sum_{i=0}^j \beta_i f_{n+i} = 0 \quad (1)$$

вначале проведем на примере задачи Коши для скалярного ОДУ

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{b}{t} + c \right) y(t) \quad (2)$$

с блоком начальных данных, известных из предыстории,

$$y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2, \dots, y(t_{k-1}) = y_{k-1}. \quad (3)$$

Определим, насколько численные результаты отличаются от точного решения. В данном примере используется уравнение (2) такое, что можно получить формулу точного решения. Это делает бессмысленным выполненное численное интегрирование, но позволяет сравнить точное и приближенное решения. Исходное уравнение линейное, решением задачи (2), (3) является функция

$$y(t) = a e^{ct} b^t, \quad (4)$$

вид которой варьируется значениями коэффициентов $a = \text{const}$, $b = \text{const}$, $c = \text{const}$. При различных значениях коэффициентов уравнение (2) может быть как нежестким, так и жестким.

Будем предполагать без потери общности, что решение задачи (2), (3) реализуется численно на начальном блоке расчетных шагов равномерной разностной сетки ω_τ , т.е. при $n=0$, поскольку технические детали упрощаются вследствие того, что зависимость функций в (1) от n исчезает, а зависимость от j становится тривиальной:

$$\sum_{i=k}^j \alpha_i y_i - \tau \sum_{i=k}^j \beta_i f_i = 0. \quad (5)$$

Как следует из результатов работ [1–3], уравнение (5) при выполнении условий

$$\alpha_l \neq 0, \quad \sum_{i=0}^j \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=0}^j \beta_i = 1$$

позволяет построить семейство сильно устойчивых одностадийных j -шаговых явных и неявных численных методов решения задачи (2), (3) для произвольного значения j . Выбор того или иного значения j зависит от характера решаемой задачи.

емой задачи. Нецелесообразно использовать большие значения j в тех случаях, к которым применимы методы с ограниченными значениями j и при этом не ожидается существенного улучшения результатов. Очевидно, следует использовать разностную многошаговую схему порядка $p = 4$, согласующуюся с порядком аппроксимации конвективно-диффузионных дифференциальных операторов, входящих в правые части гидродинамических уравнений модели циркуляции атмосферы. Это ограничение приводит к явной многошаговой схеме четвертого порядка

$$y_j = y_{j-1} + \frac{1}{4} \left[4y_{j-1} - 5y_{j-2} + y_{j-3} + \frac{\tau}{12} (71f_{j-1} - 88f_{j-2} + 29f_{j-3}) \right] + O(\tau^4) \quad (6)$$

и неявной схеме пятого порядка

$$y_j = y_{j-1} + \frac{1}{4} \left[4y_{j-1} - 5y_{j-2} + y_{j-3} + \frac{\tau}{24} (41f_j - 19f_{j-1} + 53f_{j-2}) + 17f_{j-3} \right] + O(\tau^5). \quad (7)$$

Кратко приведем полученные результаты численного эксперимента по реализации явной схемы (6) на задачах (2), (3) различной степени жесткости, имеющих аналитическое решение (4).

Если $b > 1$, $c > 0$, то имеет место неограниченное (неустойчивое) решение (рис. 1) и численное интегрирование дифференциального уравнения с шагом по времени, обеспечивающим необходимую точность, не всегда выполнимо.

Если $b = 1$, $c < 0$, то решение поставленной задачи ограничено $y(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, т.е. имеет место обычная ситуация (рис. 2), позволяющая пользоваться явной схемой в соответствии с установленной устойчивостью и точностью.

Эти два случая не представляют особого интереса, поскольку рассмотренные значения коэффициентов a , b и c выводят решение задачи (2), (3) за пределы жесткости.

При значениях констант $0 < b < 1$, $c < 0$ в решении появляется ниспадающий высокоградиентный участок с резким изменением $y(t)$ на малом отрезке. При $c \rightarrow -\infty$ жесткость уравнения (2) увеличивается, высокоградиентный участок сдвигается к началу координат и сужается.

Рассмотренные варианты жесткости c графически представлены на рис. 3 (при $b = 0.6$, $c = -10$) и рис. 4 (при $b = 0.6$, $c = -30$). В табл. 1 приведены абсолютные ошибки явной схемы (6) численного решения задачи (2), (3) в зависимости от используемого при вычислениях временного шага сетки τ . Абсолютная ошиб-

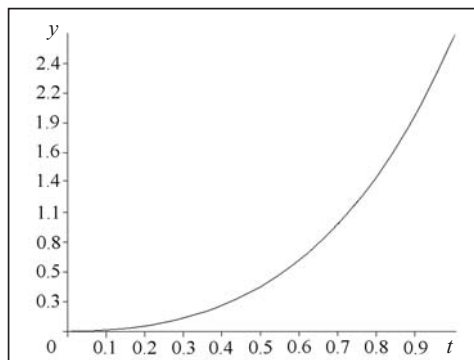


Рис. 1

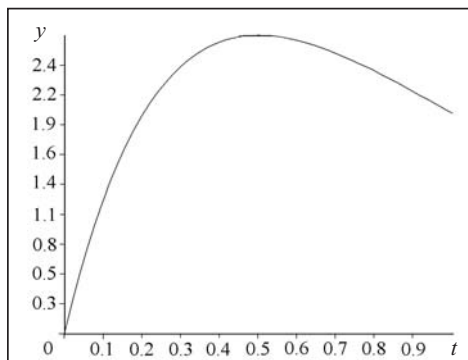


Рис. 2

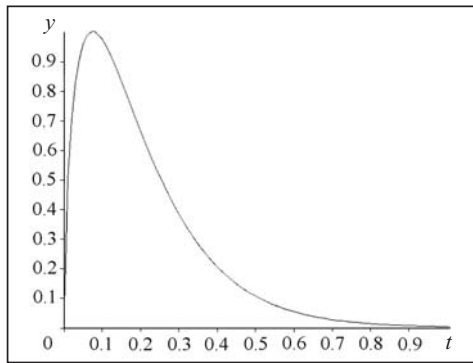


Рис. 3

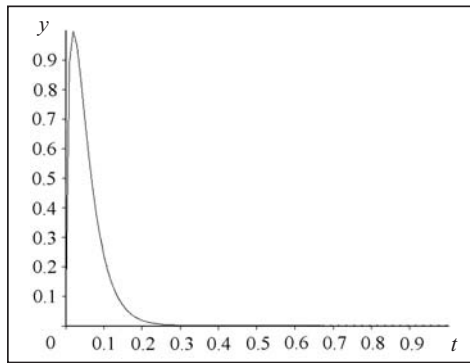


Рис. 4

Таблица 1

t_j	Абсолютная ошибка, ε_j					
	Параметры жесткости $b = 0.6, c = -10$			Параметры жесткости $b = 0.6, c = -30$		
	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.02$	$\tau = 0.05$	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.02$	$\tau = 0.05$
0.1	2.64835E-03	6.20364E-04	—	2.00700E-03	1.34940E-03	—
0.2	2.07406E-03	2.77900E-03	—	1.12816E-03	1.59130E-03	—
0.3	1.19480E-03	2.00700E-03	1.69900E-03	9.67785E-04	1.57995E-04	1.70542E-03
0.4	6.39006E-04	1.12816E-03	6.04137E-04	1.73269E-04	2.48452E-06	1.33186E-03
0.5	3.28645E-04	5.93118E-04	2.00758E-03	4.40515E-07	1.32583E-06	6.22718E-04
0.6	1.64963E-04	3.02507E-04	1.67097E-03	1.38288E-05	2.86449E-06	2.49837E-04
0.7	8.13640E-05	1.51466E-04	8.21448E-04	1.56995E-05	3.72869E-06	8.68385E-05
0.8	3.96771E-05	7.48867E-05	2.77552E-05	1.77823E-05	1.57364E-06	2.77794E-05
0.9	1.91628E-05	3.66806E-05	6.51329E-04	2.52721E-05	4.69480E-06	7.24371E-06
1.0	9.18796E-06	1.78355E-05	1.30892E-03	3.12498E-05	2.04555E-06	1.95826E-06

ка ε вычислялась по следующей формуле: $\varepsilon_j = |y_j - u_j|$, где y_j, u_j — значения точного и численного решений на j -м временном слое; $\theta E \pm \vartheta$ обозначает $\theta \cdot 10^{\vartheta}$.

Если задать $0 < b < 1, c = -40$, то решение разительно меняется. График сильно колеблющейся функции свидетельствует о неустойчивости решения. Данный тест показывает, что явный метод может давать неверный результат, соответствующий неустойчивому процессу даже при $\tau = 0.01$. В таком случае следует увеличить количество шагов в явном многошаговом одностадийном методе. Основное требование заключается в том, чтобы при оптимальном количестве шагов численный метод обеспечивал качественно правильное поведение численного решения на высокоградиентном участке и наиболее точно воспроизводил решение на основном отрезке интегрирования вне такого участка. Но иногда в аналогичных, более сложных ситуациях (например, случай предельной жесткости или неизвестное заранее положение высокоградиентного участка) при численном интегрировании возникают трудности, связанные с выбором шага интегрирования, обеспечивающего устойчивость или необходимую точность вычисления. Тогда можно воспользоваться двухстадийным алгоритмом: вначале в качестве первого приближения определить значение y_j по явной схеме (6), порядок точности которой равен $O[\tau^j]$, затем, вычислив $f(t_j, y_j)$, уточнить значение y_j по неявной схеме (7) порядка $O[\tau^{j+1}]$. Двухстадийный метод (6), (7)

устойчив, шаг интегрирования можно выбирать произвольно, руководствуясь требованиями точности, а не устойчивости.

Результаты численного решения задачи (2), (3) с помощью двухстадийного алгоритма (7) представлены в виде графического изображения на рис. 5 и в табл. 2 (при параметрах жесткости $b = 0.6$, $c = -40$) в виде абсолютных ошибок ε , зависящих от используемых при вычислениях временных шагов τ .

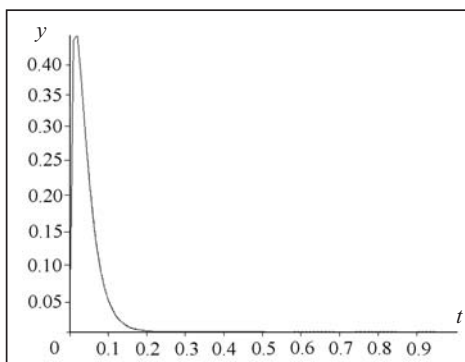


Рис. 5

Из результатов тестовых расчетов следует, что многошаговый двухстадийный абсолютно устойчивый метод (6), (7) позволяет интегрировать жесткие ОДУ с высокой точностью и малыми вычислительными затратами.

Таблица 2

t_j	Абсолютная ошибка, ε_j		
	$\tau = 0.01$	$\tau = 0.02$	$\tau = 0.05$
0.1	1.9244477E-03	1.0759868E-03	—
0.2	7.6084165E-05	4.9429352E-04	3.0396441E-03
0.3	7.7486038E-07	7.5922617E-07	1.1215412E-03
0.4	1.0301580E-06	5.5778646E-06	1.9948818E-03
0.5	1.0388620E-06	3.3185438E-06	9.9659688E-04
0.6	1.8891200E-06	3.4211398E-06	1.3992097E-04
0.7	2.1170492E-06	3.6826227E-06	3.5816127E-05
0.8	2.5979759E-06	5.0525923E-06	3.7905966E-06
0.9	1.5244777E-06	5.0554963E-06	5.9216754E-06
1.0	2.6193317E-07	2.2713898E-06	4.1652506E-06

ЖЕСТКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ОДУ

Будем полагать линейную систему ОДУ $y' = Ay$ (A — постоянная матрица $n \times n$) жесткой, если выполняются два условия [5, 6]:

- 1) все собственные числа λ_i матрицы A имеют отрицательную действительную часть, т.е. $\text{Re } \lambda_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$;
- 2) число $S = \max_{1 \leq k \leq n} |\text{Re } \lambda_k| \min_{1 \leq k \leq n} |\text{Re } \lambda_k|$ велико.

Величина S определяет жесткость задачи.

В данном разделе выполняется тестирование предложенного многошагового численного метода решения на примере поставленной жесткой задачи для системы линейных ОДУ и оценивается эффективность его работы сравнением с другими методами в зависимости от степени жесткости задачи.

Далее приведены результаты сравнения следующих численных методов решения жестких систем ОДУ: (4,2)-метода, метода Рунге–Кутты четвертого порядка точности, одностадийной комплексной схемы Розенброка [7–13] и предложенного многошагового метода (6), (7). Сравнение выполнено на отрезке $0 \leq t \leq 1$ на основе решения тестовой системы линейных ОДУ [12]

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \mu_0 y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} = (\mu_0 - \mu_1) y_1 + (\mu_1 - \nu_1) y_2 - \nu_1 y_3, \\ \frac{dy_3}{dt} = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1) y_3, \\ \frac{dy_4}{dt} = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2) y_3 + (\mu_2 + \nu_2) y_4 - \nu_2 y_5, \\ \frac{dy_5}{dt} = (\mu_0 - \mu_1 - \nu_1) y_1 + 2\nu_1 y_2 + (\mu_1 - \nu_1 - \mu_2 - \nu_2) y_3 + 2\nu_2 y_4 + (\mu_2 - \nu_2) y_5. \end{cases} \quad (8)$$

Следуя [12], положим $y_2(0) = y_3(0)$, $y_4(0) = y_5(0)$. Тогда точное решение системы линейных ОДУ (8) имеет формульный вид

$$\begin{cases} y_1(t) = y_1(0)e^{\mu_0 t}, \\ y_2(t) = y_1(t) + [y_2(0) - y_1(0)]e^{\mu_1 t} \cos(\nu_1 t), \\ y_3(t) = y_1(t) + \sqrt{2}[y_2(0) - y_1(0)]e^{\mu_1 t} \sin[(\nu_1(t + \pi/4))], \\ y_4(t) = y_3(t) + [y_4(0) - y_2(0)]e^{\mu_2 t} \cos(\nu_2 t), \\ y_5(t) = y_3(t) + \sqrt{2}[y_4(0) - y_2(0)]e^{\mu_2 t} \sin[(\nu_2(t + \pi/4))] \end{cases}$$

и графически представлено на рис. 6.

Определим число обусловленности M задачи с матрицей A таким образом [13]: $M = \|A^{-1}\| \|A\|$. Следовательно, число обусловленности матрицы рассматриваемой системы $M = 79956$. Собственные значения матрицы системы равны $\lambda_1 = -100$, $\lambda_{2,3} = \mu_1 \pm i\nu_1$, $\lambda_{4,5} = \mu_2 \pm i\nu_2$.

Рассмотрим для заданной системы ОДУ (8) случай жесткой задачи, в которой начальные условия имеют вид $y_1(0) = 10$, $y_2(0) = y_3(0) = 11$, $y_4(0) = y_5(0) = 111$, а значения параметров $\mu_0 = -100$, $\mu_1 = -1$, $\nu_1 = 1$, $\mu_2 = -10000$, $\nu_2 = 10$. Собственные числа: $\lambda_1 = -100$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i$, $\lambda_{4,5} = -10000 \pm 10i$. Величина жесткости задачи $S = 10^4$. Все λ_i имеют отрицательные действительные части, а значит, задача является жесткой в смысле условия жесткости 1.

В табл. 3 для перечисленных методов приведены абсолютные ошибки ε , полученные при использовании различных временных шагов τ . Ошибка ε вычислялась по следующей формуле: $\varepsilon = \max_j \|y_j - u_j\|_\infty$, где u_j и y_j — векторы точного и численного решений на j -м временном слое, $\|\cdot\|_\infty$ — кубическая норма вектора [14].

Из результатов, представленных в табл. 3, видно, что при решении жесткой системы уравнений (8) с числом жесткости $S = 10^4$ при различных шагах интегрирования (4,2)-метод, одностадийная комплексная схема Розенброка, четырехстадийный метод Рунге–Кутты, многошаговый одностадийный явный метод (6) и двухстадийный метод (6), (7) на малых шагах (до $\tau = 4.00 \cdot 10^{-5}$) работают адекватно. При увеличении шага интегрирования абсолютная ошибка становится большой и численное решение начинает существенно отличаться от точного.

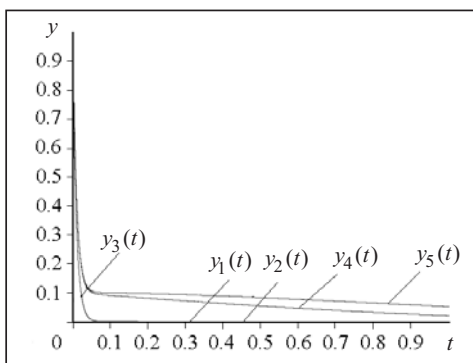


Рис. 6

Таблица 3

$\tau \cdot 10^5$	Абсолютная ошибка, ε				
	(4,2)-метод	Метод Розенброка	Метод Рунге-Кутты	Явный метод (6)	Двухстадийный метод (6), (7)
1.0	8.64E-5	5.69E-2	4.70E-5	6.5692E-2	2.0958E-2
2.0	1.20E-3	2.12E-1	8.18E-4	0.5214	7.2441E-2
4.0	1.48E-2	7.26E-1	1.52E-2	3.0040	0.9024
8.0	1.57E-1	2.24	3.39E-1	12.688	8.7382
16.0	1.32	5.58	9.67	—	56.538
32.0	5.39	6.65	9.29E+15	—	—
64.0	9.84	3.43	1.37E+44	—	—
128.0	9.39	1.05	1.40E+40	—	—
256.0	6.39	3.01E-1	1.91E+567	—	—
512.0	3.72	1.67E-1	2.82E+1059	—	—

ЖЕСТКАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ОДУ

Рассмотрим тестовый пример, иллюстрирующий работу многошагового одностадийного метода применительно к нелинейным системам ОДУ. Пусть исходная задача поставлена следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -(\mu + 2)y_1 + \mu y_2^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ \frac{dy_2}{dt} = y_1 - y_2 - y_2^2, \end{cases} \quad (9)$$

$$y_1(t)|_{t=0} = 1, \quad y_2(t)|_{t=0} = 1.$$

Точное решение задачи (9) имеет формульный вид

$$\begin{cases} y_1(t) = e^{-2t}, \\ y_2(t) = e^{-t} \end{cases}$$

и графически представлено на рис. 7.

Жесткость задачи (9) не зависит от выбора параметра μ . Поэтому рассмотрим абсолютные ошибки ε численного решения, полученного многошаговым методом для нелинейных задач, в зависимости от шага τ . Ошибку вычислим, как и выше, по формуле $\varepsilon = \max_j \|y_j - u_j\|_\infty$, где u_j и y_j — векторы точного и численного решений на j -м временном слое.

Как видно из табл. 4, при решении жесткой системы уравнений (9) с шагами интегрирования до $64 \cdot 10^{-5}$ многошаговый одностадийный явный метод (6), многошаговый одностадийный неявный метод (7) и метод предиктор-корректор дают близкие результаты. При увеличении шага интегрирования абсолютная ошибка многошагового одностадийного явного метода (6) увеличивается и численное решение начинает существенно отличаться от точного.

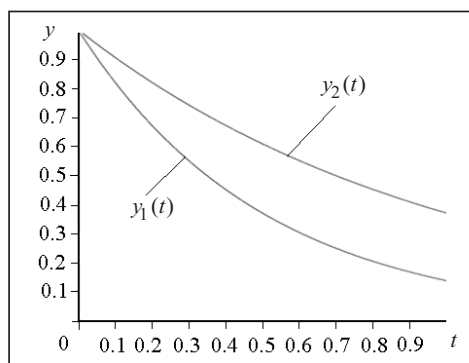


Рис. 7

Таблица 4

$\tau \cdot 10^5$	Абсолютная ошибка, ε		
	Явный метод (6)	Неявный метод (7)	Метод предиктор-корректор
1.0	4.7618E-4	4.1234E-4	4.0019E-4
2.0	2.6709E-4	2.1839E-4	2.8306E-4
4.0	5.6386E-5	5.6595E-5	5.5849E-5
8.0	4.0531E-5	4.0710E-5	3.9160E-5
16.0	7.3552E-5	8.3208E-5	8.3446E-5
32.0	1.1205E-5	1.0133E-5	1.0192E-5
64.0	6.3777E-6	6.4373E-6	6.3777E-6
128.0	279480.2	3.6359E-6	3.6955E-6

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Многошаговый одностадийный метод позволяет интегрировать жесткие дифференциальные уравнения и системы уравнений с высокой точностью и малыми вычислительными затратами. Приведенные примеры показывают, что предложенный метод не уступает лучшим существующим в настоящее время методам при решении жестких задач.

Результаты расчетов позволяют определить для многошагового одностадийного метода области абсолютной устойчивости, где обеспечена возможность изменения величины шага интегрирования в широких пределах при сохранении вычислительной устойчивости метода. Данный метод применим для расчета большого класса жестких систем ОДУ. При этом увеличение шага (до максимально возможного) не всегда позволяет спрогнозировать локальное поведение решения и сократить объем вычислений при соблюдении требуемой точности. Оптимальная стратегия использования многошаговых методов подразумевает наличие процедуры автоматического управления порядком и величиной шага [15]. Этот процесс требует эффективной организации алгоритма вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Prusov V., Doroshenko A. Computational techniques for modeling atmospheric processes. Hershey, PA, USA: IGI Global, 2017. 460 p.
2. Prusov V.A., Doroshenko A.Yu. Multistep method of the numerical solution of the problem of modeling the circulation of atmosphere in the Cauchy problem. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51, N 4. P. 547–555.
3. Prusov V.A., Doroshenko A.Yu. Numerical method to solve the Cauchy problem with previous history. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 1. P. 34–56.
4. Федоренко Р.П. Жесткие системы обыкновенных дифференциальных уравнений и их численное интегрирование. *Вычисл. процессы и системы*. Москва: Наука, 1991. Вып. 8. С. 328–380.
5. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
6. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. Москва: Наука, 1989. 432 с.
7. Butcher J.C. Numerical methods for ordinary differential equations. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008. 308 p.
8. Darvishi M., Khani F., Soliman A. The numerical simulation for stiff systems of ordinary differential equations. *Computers and Math. with Applications*. 2007. Vol. 54. P. 1055–1063.
9. Kovtanyuk A.E., Nefedev K.V., Prokhorov I.V. Advanced computing method for solving of the polarized-radiation transfer equation. *Lecture Notes in Computer Sciences: Methods and Tools of Parallel Programming Multicomputers*. 2010. Vol. 6083. P. 268–276.

10. Musa H., Suleiman M.B., Senu N. Fully implicit 3-point block extended backward differentiation formula for stiff initial value problems. *Applied Mathematical Sciences*. 2012. Vol. 6, N 85–88. P. 4211–4228.
11. Yatim S.A.M. Fifth order variable step block backward differentiation formulae for solving stiff ODEs. *World Academy of Science, Engineering and Technology*. 2010. Vol. 38. P. 280–282.
12. Галанин М.П., Ходжаева С.Р. Методы решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты тестовых расчетов. Препр. ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 98. 29 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013-98>.
13. Vasilev E., Vasilyeva T. High order implicit method for ODEs stiff systems. *Korean Journal of Computational & Applied Mathematics*. 2001. Vol. 8, N 1. P. 165–180.
14. Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.
15. Хайрер Э., Ванер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 486 с.

Надійшла до редакції 29.01.2019

В.А. Прусов, А.Ю. Дорошенко
ТЕСТУВАННЯ БАГАТОКРОКОВОГО ОДНОСТАДІЙНОГО МЕТОДУ
НА ЖОРСТКИХ ЗАДАЧАХ

Анотація. Розглянуто багатокроковий одностадійний метод, що дозволяє інтегрувати жорсткі диференціальні рівняння і системи рівнянь з високою точністю і малими обчислювальними витратами. На прикладах показано, що запропонований метод не поступається кращим методам для розв'язання жорстких задач. Результати розрахунків дозволяють визначити для багатокрокового одностадійного методу області абсолютної стійкості, де забезпечена можливість зміни величини кроку інтегрування в широких межах із збереженням обчислювальної стійкості методу.

Ключові слова: жорсткі рівняння і системи, багатокроковий одностадійний метод, (4,2)-метод, CROS, чотирістадійний явний метод Рунге–Кутти.

V.A. Prusov, A.Yu. Doroshenko
TESTING A MULTI-STEP SINGLE-STAGE METHOD ON HARD TASKS

Abstract. A multistep one-stage method is considered, which allows one to integrate hard differential equations and systems of equations with high accuracy and low computational costs. The examples show that the proposed method is not inferior to the best available methods in solving hard problems. The calculation results allow us to determine the absolute stability regions for a multistep one-stage method where it is possible to change the integration step over a wide range while maintaining the computational stability of the method.

Keywords: hard equations and systems, multistep one-stage method, (4,2) method, CROS, four-stage explicit Runge–Kutta method.

Прусов Віталій Арсенієвич,
 доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Украинского гидрометеорологического института Государственной службы чрезвычайных ситуаций Украины и НАН Украины, Киев.

Дорошенко Анатолий Ефимович,
 доктор физ.-мат. наук, профессор Национального технического университета Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», e-mail: doroshenkoanatoliy2@gmail.com.