УДК 519.65

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ, Я.В. ПІЗЮР, Р.П. МАЛАЧІВСЬКИЙ, О.М. УХАНСЬКА

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних узагальненим поліномом як граничного наближення у нормі простору L^p для $p \to \infty$. Він ґрунтується на послідовній побудові середньостепеневих наближень з використанням методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Збіжність методу забезпечує оригінальний спосіб послідовного уточнення значень вагової функції, який враховує результати наближення на всіх попередніх ітераціях. Описано способи обчислення чебишовського наближення з абсолютною та відносною похибкою. Подані результати розв'язування тестових прикладів підтверджують ефективність використання методу для отримання чебишовського наближення таблично заданих неперервних функцій однієї, двох і трьох змінних.

Ключові слова: функції багатьох змінних, чебишовське (рівномірне) наближення, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів, змінна вагова функція.

ВСТУП. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай неперервна функція n змінних $f(X)$, де вектор $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}^{\mathrm{T}}$, задана на множині точок $\Omega = \{x_{i,j}\}_{i=0,\, j=0}^{n,\, s_i}$. Цю функцію необхідно наблизити виразом $F_m(a; X)$, де $F_m(a; X)$ — узагальнений поліном

$$F_m(a; X) = \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(X) \tag{1}$$

за системою лінійно незалежних базисних функцій $\varphi_i(X)$, $i = \overline{0, m}$, де a_i, $i = \overline{0, m}$ — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{m} \in A$, $A \subseteq R^{m+1}$, R^m — m-вимірний векторний простір. Вираз $F_m(a^*; X)$ називатимемо чебишовським наближенням функції $f(X)$ на множині точок Ω, якщо він задовольняє умову

$$\max_{X \in \Omega} |f(X) - F_m(a^*; X)| = \min_{a \in A} \max_{X \in \Omega} |f(X) - F_m(a; X)|. \tag{2}$$

Чебишовське наближення функцій багатьох змінних використовують при розв'язуванні різних прикладних проблем, зокрема, під час проектування технічних засобів для вимірювання фізичних величин, значення яких залежить від кількох інформаційних сигналів [1, 2].

Для побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних здебільшого використовують три способи: методи оптимізації, послідовного обчислення чебишовського наближення за кожною змінною та ітераційні алгоритми типу Ремеза [3, 4]. У праці [5] запропоновано покращений алгоритм побудови чебишовського наближення функції багатьох змінних узагальненим поліномом, який полягає в розв'язуванні задачі лінійного програмування з урахуванням особливостей рівномірного наближення. Огляд алгоритмів обчислення чебишовського наближення функцій багатьох змінних і наявних програмних реалізацій подано в працях [6, 7]. У цій статті запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних як граничного наближення у нормі простору L^p для $p \to \infty$, який полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень [8].

Цей метод є подальшим розвитком ідеї α-алгоритму Є.Я. Ремеза [9]. Обчислення середньостепеневих наближень здійснюється за методом найменших квадратів з використанням змінної вагової функції, значення якої послідовно уточнюються з врахуванням усіх попередніх наближень.

СЕРЕДНЬОСТЕПЕНЕВЕ НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ

Для оцінки похибки середньостепеневого наближення функцій використовують норму в просторі L^p

$$\|\Delta\|_{L^p} = \left(\int_{\alpha_n}^{\beta_n} \ldots \int_{\alpha_2}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} |\Delta(X)|^p \, \partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n \right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty, \tag{3}$$

де $x_i \in [\alpha_i, \beta_i]$, $i = \overline{1, n}$, а $\Delta(X) = f(X) - F_m(a; X)$. Для $1 \le p < \infty$ величина $\|\Delta\|_{L^p}$ набуває проміжних значень між $\|\Delta\|_{L^1}$ і $\|\Delta\|_C$ [3, 9], де $\|\Delta\|_C$ — норма у просторі неперервних функцій.

У дискретному випадку для оцінки похибки середньостепеневого наближення використовують норму евклідового простору E^p. Похибку середньостепеневого наближення функції $f(X)$, заданої на множині точок Ω виразом (1), оцінюють у нормі

$$\|\Delta\|_{E^p} = \Big(\sum_{X \in \Omega} |\Delta(X)|^p \Big)^{1/p}, \tag{4}$$

де $\Delta(X) = f(X) - F_m(a; X)$, $1 \le p < \infty$. Аналогічно до неперервного випадку граничне значення норми $\|\Delta\|_{E^p}$ для $p \to \infty$ відповідає нормі у просторі неперервних функцій $\|\Delta\|_C$.

Можливість отримання чебишовського наближення як граничного наближення в просторі L^p для $p \to \infty$ детально досліджено в праці [9]. Є.Я. Ремез у [9] теоретично обґрунтував збіжність обчислювальних схем для побудови чебишовського наближення на основі середньостепеневого наближення. Запропонований Є.Я. Ремезом [9] α-алгоритм забезпечує обчислення чебишовського наближення функції багатьох змінних, як уточненого, з використанням α-поправки середньостепеневого наближення деякого достатньо високого степеня p_s. Цей алгоритм полягає в ітераційній побудові середньостепеневих наближень для степенів

$$p_0 < p_1 < p_2 < \ldots < p_s, \tag{5}$$

де $p_0 = 2$, $p_1 \ge 3$. Вибір вищих степенів рекомендовано здійснювати зі співвідношення $p_i \,/\, p_{i-1} = 4$, $i = \overline{2, s-1}$ [9]. Середньостепеневе наближення визначають за методом найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_i(X)(f(X) - F_m(a; X))^2 \xrightarrow[a \in A]{} \min, \quad i = 0, 1, \ldots, s, \tag{6}$$

з ваговою функцією

$$\rho_0(X) = 1, \ \rho_i(X) = |\Delta_i(X)|^{p_i - 2}, \ i = 1, 2, \ldots, s, \tag{7}$$

де $\Delta_i(X) = f(X) - F_{m, i-1}(a; X)$, $F_{m,i}(a; X)$ — середньостепеневе наближення функції $f(X)$ виразом $F_m(a; X)$, яке відповідає показнику степеня p_i.

Починаючи зі степеня p_1 (5), середньостепеневі наближення $F_{m,i}(a; X)$, $i = \overline{1, s}$, отримані за методом (6), (7), уточнюють з використанням α-поправки [9]. Для уточнення використовують метод найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_{i,j}(X)((f(X) - F_{m,i,j-1}(a; X)) - F_m(a; X))^2 \xrightarrow[a \in A]{} \min, \tag{8}$$
$$i = 1, 2, \ldots, s, \ j = 1, 2, \ldots$$

зі змінною ваговою функцією

$$\rho_{i,j}(X) = |\Delta_{i,j}(X)|^{p_i - 2}, \tag{9}$$

де

$$\Delta_{i,j}(X) = f(X) - F_{m,i,j-1}(a;X), \tag{10}$$

$F_{m,i,0}(a;X) = F_{m,i}(a;X)$, $F_{m,i,j}(a;X)$ — середньостепеневе наближення функції $f(X)$ виразом $F_m(a;X)$, отримане з використанням вагової функції $\rho_{i,j}(X)$. Уточнене середньостепеневе наближення $F_{m,i,j}(a;X)$ степеня p_i функції $f(X)$ визначають за формулою

$$F_{m,i,j}(a;X) = F_{m,i,j-1}(a;X) + \alpha \overline{F}_{m,i,j}(a;X), \tag{11}$$

де $\overline{F}_{m,i,j}(a;X)$ — наближення, отримане в результаті розв'язування задачі (8), а значення параметра α визначають з умови

$$\max_{X \in \Omega} |f(X) - F_{m,i,j-1}(a;X) - \alpha \overline{F}_{m,i,j}(a;X)| \xrightarrow[\alpha,\, \alpha<0]{} \min. \tag{12}$$

Уточнення середньостепеневого наближення (11) степеня p_i виконують до досягнення необхідної точності ε:

$$|\max_{X \in \Omega} |\Delta_{i,j}(X)| - \max_{X \in \Omega} |\Delta_{i,j-1}(X)|| \le \varepsilon \max_{X \in \Omega} |\Delta_{i,j}(X)|. \tag{13}$$

При виконанні цієї умови середньостепеневе наближення степеня p_i функції $f(X)$ покладають рівним $F_{m,i}(a;X) = F_{m,i,j}(a;X)$ і переходять до обчислення середньостепеневого наближення степеня p_{i+1} (5).

Програмну реалізацію α-алгоритму описано в [10]. У працях [4, 11] для отримання рівномірного наближення функцій багатьох змінних $f(X)$ виразом $F_m(a;X)$ (1) запропоновано застосувати метод найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_r(X)(f(X) - F_m(a;X))^2 \xrightarrow[a \in A]{} \min, \quad r = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

з послідовним уточненням змінної вагової функції

$$\rho_0(X) \equiv 1, \quad \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} |\Delta_i(X)|^2, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

де $\Delta_k(X) = f(X) - F_{m,k-1}(a;X)$, $k = \overline{1,r}$, $F_{m,k}(a;X)$ — наближення за методом найменших квадратів функції $f(X)$ з ваговою функцією $\rho_k(X)$.

Використання вагової функції (15) забезпечило близьке до рівномірного рознесення похибки наближення в точках задання функції $f(X)$ [4, 11]. У праці [11] запропоновано коригувати наближення, отримане за методом (14), (15), з використанням адитивної (симетризувальної) поправки.

МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Побудова чебишовського наближення таблично-заданих функцій багатьох змінних ґрунтується на ідеї послідовного отримання наближень у просторі E^p для $p = 2, 3, 4, \ldots$ [8]. Для побудови наближення в просторі E^p використовуємо метод найменших квадратів (14) з ваговою функцією

$$\rho_0(X) \equiv 1, \quad \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} |\Delta_i(X)|, \quad r = 1, \ldots, p-2, \quad p = 3, 4, \ldots, \tag{16}$$

де $\Delta_k(X) = f(X) - F_{m,k-1}(a;X)$, $k = \overline{1,r}$, $F_{m,k}(a;X)$ — наближення функції $f(X)$ за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(X)$.

Метод найменших квадратів (14) зі змінною ваговою функцією (16) забезпечує послідовне отримання середньостепеневих наближень $F_{m,r}(a;X)$,

$r = 0, 1, \ldots$, функції $f(X)$ у просторі E^{r+2}. Відповідно до (16) значення вагової функції на кожній ітерації (14) збільшується пропорційно до модуля похибки наближення

$$\mu_r(X) = |f(X) - F_{m,r}(a; X)| \tag{17}$$

функції $f(X)$ виразом $F_{m,r}(a; X)$, отриманого на попередній ітерації.

Оскільки точці X $(X \in \Omega)$ з найбільшим відхиленням (17) відповідає найбільше пропорційне збільшення вагової функції (16), то застосування такого уточнення значення вагової функції для ітерацій (14) зумовлює послідовне зменшення похибки наближення функції $f(X)$ на множині точок X $(X \in \Omega)$

$$\hat{\mu}_0 > \hat{\mu}_1 > \ldots > \hat{\mu}_r, \tag{18}$$

де

$$\hat{\mu}_r = \max_{X \in \Omega} \mu_r(X). \tag{19}$$

Отже, застосування вагової функції (16), яка на кожній ітерації (14) збільшується пропорційно на модуль похибки (17) відтворення значення функції $f(X)$, зумовлює послідовне зменшення похибки її відтворення (19) наближенням $F_{m,r}(a; X)$. Послідовне зменшення похибки відтворення значень функції $f(X)$ у результаті кожної наступної ітерації (14) з ваговою функцією (16) обґрунтовує збіжність ітерацій (14), (16).

Завершення ітерацій (14) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε:

$$|\hat{\mu}_{r-1} - \hat{\mu}_r| \le \varepsilon \hat{\mu}_r. \tag{20}$$

Застосування модуля у лівій частині умови (20) зумовлено можливою наявністю похибок заокруглення під час обчислення похибок наближення $\mu_r(X)$. Варто зазначити, що методу (14), (16) не властиве накопичення похибок заокруглення. Для нього характерні лише похибки заокруглення, отримані під час розв'язування задачі (14).

Далі здійснюється коригування отриманого наближення з використанням симетризувальної поправки

$$\bar{a}_0 = (\mu_{\max} + \mu_{\min}) / 2, \tag{21}$$

де $\mu_{\max} = \max\limits_{X \in \Omega} (f(X) - F_{m,r}(a; X))$, а $\mu_{\min} = \min\limits_{X \in \Omega} (f(X) - F_{m,r}(a; X))$. У результаті шукане наближення неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок $X \in \Omega$ узагальненим поліномом (1), буде визначатися так:

$$F_m(a; X) = F_{m,r}(a; X) + \bar{a}_0. \tag{22}$$

Цей метод за суттю нагадує схему Ремеза [12] для отримання чебишовського наближення функції однієї змінної, відповідно до якої похибка наближення після кожної ітерації зменшується за рахунок уведення в альтернанс точки з найбільшим відхиленням.

Отже, послідовне уточнення значень вагової функції (16) з урахуванням похибок відтворення значень функції $f(X)$ за результатами всіх попередніх наближень за методом найменших квадратів забезпечує збіжність ітераційної схеми (14), (16) і відповідно збіжність методу обчислення чебишовського наближення. Задаючи значення ε в (20), можна досягти необхідної точності обчислення параметрів чебишовського наближення функції $f(X)$.

ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ З ВІДНОСНОЮ ПОХИБКОЮ

Якщо неперервна функція $f(X)$ на множині точок Ω не набуває значень, рівних нулеві, то за аналогічним методом можна отримати чебишовське наближення $f(X)$ з відносною похибкою. Для побудови чебишовського наближення функції $f(X)$ з відносною похибкою використовуємо метод найменших квадратів (14) з ваговою функцією

$$\rho_0(X) = \frac{1}{f^2(X)}, \ \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} |\Theta_i(X)|, \ r = 1, \ldots, p-2, \ p = 3, 4, \ldots, \quad (23)$$

де

$$\Theta_k(X) = \frac{f(X) - F_{m,k-1}(a; X)}{f(X)}, \ k = \overline{1, r}, \quad (24)$$

а $F_{m,k}(a; X)$ — наближення функції $f(X)$ за методом найменших квадратів з ваговою функцією $\rho_k(X)$.

Під час побудови наближення з відносною похибкою завершення ітерацій (14) з ваговою функцією (23) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε відповідно до умови (20), в якій

$$\hat{\mu}_r(X) = \max_{X \in \Omega} |\Theta_{r+1}(X)|, \quad (25)$$

де $\Theta_{r+1}(X)$ — похибка відтворення функції $f(X)$ виразом $F_{m,r}(a; X)$, отриманим за методом найменших квадратів (14) на r-ій ітерації.

Далі здійснюється коригування отриманого наближення $F_{m,r}(a; X)$ з відносною похибкою з використанням симетризувальної поправки

$$b = \frac{2f(X_{\max})f(X_{\min})}{F_{m,r}(a; X_{\min})f(X_{\max}) + F_{m,r}(a; X_{\max})f(X_{\min})}, \quad (26)$$

де $X_{\max}$ — точка, в якій відносна похибка наближення $\Theta_{r+1}(X)$ (24) досягає найбільшого значення на множині точок $X \in \Omega$, а $X_{\min}$ — точка, в якій відносна похибка набуває найменшого значення. В результаті шукане наближення неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок $X \in \Omega$ узагальненим поліномом (1) з відносною похибкою, буде визначатися за формулою

$$F_m(a; X) = b F_{m,r}(a; X). \quad (27)$$

Значення коригувальної поправки b (26) визначається як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення функції $f(X)$ виразом $bF_{m,r}(a; X)$ на множині точок $X \in \Omega$ з відносною похибкою

$$\max_{X \in \Omega} \left| \frac{f(X) - bF_{m,r}(a; X)}{f(X)} \right| \xrightarrow[b]{} \min. \quad (28)$$

Результати обчислення параметрів чебишовського наближення для тестових прикладів підтверджують хорошу збіжність ітераційного процесу (14) з ваговими функціями (16) і (23) у випадку наближення функцій однієї, двох та трьох змінних. Зокрема, під час розв'язування тестових прикладів для функцій, заданих на множині зі 121-ї точки, збіг двох-трьох значущих цифр у похибці наближення досягався для $\varepsilon = 0.003$ за шість-дев'ять ітерацій (14) як з ваговою функцією (16) для абсолютної похибки, так і з ваговою функцією (23) для відносної похибки.

Приклад 1. Знайдемо чебишовське наближення поліномом другого степеня функції однієї змінної $y(x) = \sqrt{1 + 2x + 3x^2}$, заданої в точках x_i, $i = \overline{0, 20}$, де $x_i = 0.1i$.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon = 0.003$ в умові (20) за вісім ітерацій (14) з ваговою функцією (16) для функції $y(x)$ отримано поліном

$$P_2(x) = 1.006720776 + 0.7076428791x + 0.7445228708x^2, \quad (29)$$

який з врахуванням коригувальної поправки $\overline{a}_0 = 0.0000619405$ забезпечує абсолютну похибку наближення 0.015613905. У процесі обчислення чебишовського наближення функції $y(x)$ похибка наближення на ітераціях (14) набувала таких значень:

$$0.021899282,\ 0.0163219491,\ 0.016111283,\ 0.016045417,\ 0.015902523,\\ 0.015792476,\ 0.015720242,\ 0.015675845.$$

Чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом другого степеня, отримане за ітераційною схемою Ремеза [12] з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена, забезпечує похибку апроксимації 0.01544. Перевищення похибки наближення поліномом (29) порівняно з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює 0.0001739. Похибка наближення поліномом (29) перевищує на 1.12% похибку чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза.

Криву похибки апроксимації (29) зображено на рис. 1.

Подана на рисунку крива похибки апроксимації відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення — має чотири екстремальні точки, в яких досягається найбільше за модулем (у межах заданої точності) відхилення і знак відхилення у цих точках чергується. Ці екстремальні точки збігаються з точками альтернансу, отриманими для наближення за схемою Ремеза [12].

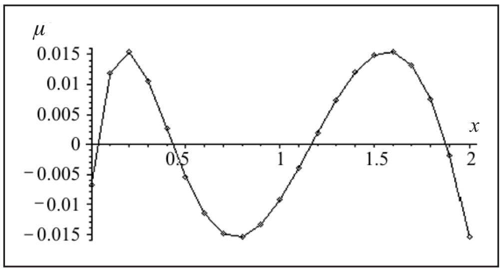

Рис. 1. Крива похибки апроксимації функції $y(x)$ поліномом (29)

Найменше значення похибки наближення функції $y(x)$ поліномом другого степеня з використанням запропонованого методу було досягнуто на 117-ій ітерації (14) з ваговою функцією (16) і дорівнювало 0.01544.

Наближення функції $y(x)$ поліномом другого степеня з відносною похибкою з використанням ітераційного методу (14), (23) для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за сім ітерацій. Поліном

$$P_2(x) = 1.008795347 + 0.7207929316x + 0.7265246023x^2 \tag{30}$$

забезпечує відносну похибку наближення 0.94999% з коригувальною поправкою $b = 0.9999505612$.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ поліномом другого степеня з відносною похибкою, отримане за ітераційною схемою Ремеза [12] з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена, забезпечує похибку апроксимації 0.9337%. Перевищення похибки наближення (30) порівняно з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює 0.0163%, що становить 1.75% від похибки чебишовського наближення.

Приклад 2. Знайдемо чебишовське наближення функції $z_1(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, заданої в точках (x_i, y_j), $i = \overline{0,10}$, $j = \overline{0,10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, поліномом другого степеня щодо змінних x та y.

З використанням запропонованого методу для функції $z_1(x, y)$ за сім ітерацій (14) з ваговою функцією (16) було досягнуто виконання умови (20) для $\varepsilon = 0.003$. Отриманий поліном

$$P_{2,2}(x, y) = 0.03161824134 + 0.7318695249x + 0.7318695249y -\\ - 0.6459607105xy + 0.2640058033x^2 + 0.2640058033y^2 \tag{31}$$

забезпечує абсолютну похибку наближення функції $z_1(x, y)$, що дорівнює 0.036805375, з коригувальною поправкою $\bar{a}_0 = -0.00041013265$.

Вигляд поверхні похибки наближення (31) подано на рис. 2.

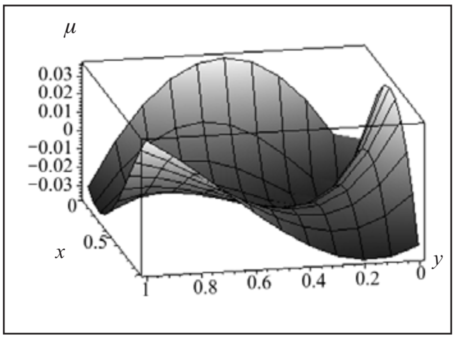

Рис. 2. Поверхня похибки апроксимації функції $z_1(x, y)$ поліномом (31)

Зображена на рис. 2 поверхня підтверджує виконання характеристичної властивості чебишовського наближення, тобто спостерігається чергування зміни знаку найбільших за модулем відхилень. З цього рисунку також випливає, що точок, в яких похибка наближення набуває найбільшого за модулем значення, є п'ять. Ця кількість екстремальних точок відповідає розв'язаній задачі. Оскільки функція $z_1(x, y)$ є симетричною відносно аргументів x та y, то її наближення поліномом другого степеня також повинно бути симетричним, тобто цей поліном можна подати у вигляді

$$P_{2,2}(x, y) = a + b(x + y) + c(x^2 + y^2) + dxy. \quad (32)$$

Відповідно до характеристичної властивості чебишовського наближення наближення поліномом (32) з чотирма невідомими параметрами повинно характеризуватися наявністю п'яти точок з найбільшим за модулем відхиленням. У наближенні (31) значення коефіцієнтів біля однакових степенів змінних x та y майже збігаються. Значення похибки наближення функції $z_1(x, y)$ за методом (14), (16) у вигляді поліному (32) збігалося зі значенням похибки наближення поліномом (31).

Значення найбільших за модулем додатного та від'ємного відхилень наближення (31) від значень функції $z_1(x, y)$ збігаються в межах заданої точності. Про це свідчить, зокрема, відносно мале значення коригувальної поправки $\bar{a}_0 = -0.00041013265$, яке становить 1.09% від отриманої абсолютної похибки наближення (31).

Приклад 2 взято з праці Е.Я. Ремеза [9], в якій для отримання чебишовського наближення функції $z_1(x, y)$ поліномом другого степеня щодо змінних x та y використано α-алгоритм з врахуванням можливостей ефективного зменшення похибки. Абсолютна похибка апроксимації функції $z_1(x, y)$ поліномом другого степеня, отриманого в [9], становила 0.036351. Теоретично отримане в [9] значення абсолютної похибки чебишовського наближення функції $z_1(x, y)$ поліномом другого степеня дорівнює 0.036310. Отже, перевищення похибки наближення (31) над теоретично отриманим значенням похибки дорівнює 0.000495375, що становить 1.36% від теоретично отриманого значення похибки наближення функції $z_1(x, y)$ поліномом другого степеня.

Найменше значення абсолютної похибки наближення функції $z_1(x, y)$ поліномом другого степеня за методом (14), (16) було досягнуто на 55-ій ітерації. Отриманий поліном

$$P^*_{2,2}(x, y) = 0.03393618707 + 0.7230553918x + 0.7230553918y - \\ - 0.6483527459xy + 0.2731844281x^2 + 0.2731844281y^2 \quad (33)$$

забезпечує абсолютну похибку наближення 0.03624001. Коригувальна поправка дорівнює $\bar{a}_0 = -0.000026703$. Отримання похибки наближення (33), меншої ніж теоретично розраховане значення похибки в [9], пояснюється тим, що розраховане значення похибки чебишовського наближення в [9] відповідає наближенню аналітично заданої функції $z_1(x, y)$.

Приклад 3. Знайдемо чебишовське наближення функції $z_2(x, y, t) = e^{-xyt}$, заданої в точках (x_i, y_j, t_r), $i = \overline{0, 10}$, $j = \overline{0, 10}$, $r = \overline{0, 10}$, де $x_i = 0.1i$, $y_j = 0.1j$, $t_r = 0.1r$, поліномом першого степеня за кожною змінною x, y та t.

З використанням запропонованого методу (14), (16) для $\varepsilon = 0.003$ за сім ітерацій отримано для функції $z_2(x, y, t)$ наближення поліномом

$$P_{3,1}(x, y, t) = 0.9787294020 - 0.01152161174x - 0.01152135336y +$$
$$+ 0.005123721063\,xy - 0.01152121170\,t + 0.005123542576\,tx +$$
$$+ 0.005123241453\,yt - 0.6312148958\,xyt, \tag{34}$$

який забезпечує абсолютну похибку наближення 0.0395586 з коригувальною поправкою $\bar{a}_0 = -0.00200142015$.

Чебишовське наближення функції $z_2(x, y, t)$ поліномом першого степеня за кожною змінною x, y та t з відносною похибкою з використанням ітерацій (14) з ваговою функцією (23) для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за вісім ітерацій. Поліном

$$P_{3,1}(x, y, t) = 0.9974817898 - 0.002695606042x - 0.002696040932y +$$
$$+ 0.002240020262\,xy - 0.002694776433\,y + 0.002238596308\,tx +$$
$$+ 0.002239105684\,yt - 0.2594474214\,xyt, \tag{35}$$

забезпечує відносну похибку наближення 0.567% з коригувальною поправкою $b = 0.9998333224$.

ВИСНОВКИ

Запропонований метод побудови чебишовського наближення неперервних таблично-заданих функцій багатьох змінних забезпечує можливість обчислення наближення узагальненим поліномом (1) з необхідною точністю. Метод є нескладним для реалізації, надійним і ефективним. Результати розв'язування тестових прикладів підтверджують досить швидку збіжність запропонованого методу під час побудови чебишовського наближення з абсолютною і відносною похибкою для функцій однієї, двох і трьох змінних.

Цей метод доцільно використовувати для високоточного градуювання засобів вимірювання фізичних величин, значення яких залежить від кількох інформаційних сигналів, зокрема, манометрів, термоанемометричних вимірювачів швидкості потоку рідини тощо.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Яцук В.О., Малачівський П.С. Методи підвищення точності вимірювань: Львів: Бескид Біт, 2008. 68 с.
2. Bubela T., Malachivskyy P., Pokhodylo Y., Mykyychuk M., Vorobets O. Mathematical modeling of soil acidity by the admittance parameters. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2016. Vol. 6, N 10 (84). P. 4–9.
3. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва: Наука, 1978. 272 с.
4. Malachivskyy P.S., Matviychuk Y.N., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P. Uniform approximation of functions of two variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53, N 3. P. 426–431.
5. Каленчук–Порханова А.О., Вакал Л.П. Побудова найкращих рівномірних наближень функцій багатьох змінних. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2007. № 6. С. 141–148.
6. Kalenchuk–Porkhanova A.A. Best Chebyshev approximation of functions of one and many variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2009. Vol. 45, N 6. P. 988–996.
7. Каленчук–Порханова А.А., Вакал Л.П. Пакет программ аппроксимации функций. *Комп'ютерні засоби, мережі та системи*. 2008. № 7. С. 32–38.
8. Малачівський П.С., Пізюр Я.В., Малачівський Р.П. Обчислення чебишовського наближення функції багатьох змінних. *Обчислювальні методи і системи перетворення інформації: зб. праць V-ї наук.-техн. конф.*, Львів, 4–5 жовтня 2018 р. Львів: ФМІ НАНУ. Вип. 5. 2018. С. 35–38.

9. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.

10. Петрак Л.В. Программа построения приближающего полинома для функции многих переменных. *Программы оптимизации (приближение функций)*. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1975. Вып. 6. С. 145–157.

11. Малачівський П.С., Монцібович Б. Р., Пізюр Я.В., Малачівський Р.П. Алгоритм рівномірного наближення функцій багатьох змінних. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: фізико-математичні науки.* 2017. Вип. 15. С. 106–112.

12. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.

Надійшла до редакції 19.11 .2018

П.С. Малачивский, Я.В. Пизюр, Р.П. Малачивский, О.М. Уханская

ЧЕБИШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Предложен метод построения чебышевского приближения функций многих переменных обобщенным полиномом как предельного приближения в норме пространства L^p при $p \to \infty$. Он основывается на последовательном построении среднестепенных приближений с использованием метода наименьших квадратов с переменной весовой функцией. Сходимость метода обеспечивает оригинальный способ последовательного уточнения значений весовой функции, учитывающий результаты приближения на всех предыдущих итерациях. Описаны способы вычисления чебышевского приближения с абсолютной и относительной погрешностью. Представленные результаты решения тестовых примеров подтверждают эффективность использования метода для получения чебышевского приближения таблично заданных непрерывных функций одной, двух и трех переменных.

Ключевые слова: функции многих переменных, чебышевское (равномерное) приближение, среднестепенное приближение, метод наименьших квадратов, переменная весовая функция.

P.S. Malachivskyy, Ya.V. Pizyur, R.P. Malachivskyi, O.M. Ukhanska

CHEBYSHEV APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF SEVERAL VARIABLES

Abstract. The algorithm of uniform approximation for functions of several variables with generalized polynomial is described as approximation in norm of space L^p for $p \to \infty$. It is based on sequential construction of power-average approximations using the least squares method with variable weight function. The convergence of the method provides an original way to consistently refine the values of the weight function, which takes into account the results of approximation at all previous iterations. Methods of calculating the Chebyshev approximation with absolute and relative errors are described. The results of test examples confirm the efficiency of using the method to obtain the Chebyshev approximation of tabular continuous functions of one, two, and three variables.

Keywords: functions of several variables, Chebyshev (uniform) approximation, power-average approximation, least squares method, variable weight function.

Малачівський Петро Стефанович,
доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Пізюр Ярополк Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: pizyur@yahoo.com.

Малачівський Роман Петрович,
розробник програмного забезпечення компанії Lohika Systems, Львів, e-mail: romanmalachivsky@gmail.com.

Уханська Оксана Михайлівна,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: oksana.m.ukhanska@lpnu.ua.