УДК 519.217

Т.О. ЛУКАШІВ, І.В. ЮРЧЕНКО, В.К. ЯСИНСЬКИЙ

ПРО НЕОБХІДНІ ТА ДОСТАТНІ УМОВИ СТІЙКОСТІ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ ПІД ДІЄЮ ЗОВНІШНІХ ЗБУРЕНЬ ТИПУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

Анотація. Одержано необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному сильних розв'язків стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з частинними похідними з попарно незалежними зовнішніми випадковими збуреннями типу випадкових величин.

Ключові слова: стохастичне рівняння в частинних похідних, стійкість в середньому квадратичному, випадкові збурення.

Статтю присвячено світлій пам'яті нашого вчителя Царкова Євгена Федоровича (8.12.1935 – 30.10.2018)

ВСТУП

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння та їхнього подальшого поширення на класи стохастичних диференціально-функціональних рівнянь (див., наприклад, [1–5]) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для стохастичних диференціальних рівнянь з частинними похідними.

У праці [6] одержано умови існування сильного розв'язку задачі Коші для стохастичних диференціально-різницевих рівнянь з частинними похідними (СДРРЧП) із заданими зовнішніми випадковими збуреннями типу попарно незалежних випадкових величин, які є незалежними від вінерових процесів, що входять у визначення стохастичних дифузійних рівнянь Іто. Подібні задачі розглянуто у [7].

У цій статті одержано необхідні та достатні умови стійкості в середньому квадратичному сильних розв'язків СДРРЧП з попарно незалежними зовнішніми випадковими збуреннями типу випадкових величин.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}=\{\mathbf{F}_t, t\ge 0\}, P)$ визначена випадкова функція $u(t,x,\omega)\colon [0,\infty)\times \mathbf{R}^1\times\Omega\to\mathbf{R}^1$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ-алгебри $\mathcal{B}([0,T],\mathbf{R}^1)$ борельових множин на площині.

Розглянемо на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, P)$ задачу Коші для СДРРЧП вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x,\omega)\right]+\sum_{k=0}^{n}\xi_{k1}(\omega)Q\left(B,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t-\tau_k,x,\omega)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\xi_{k2}(\omega)Q\left(C,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t-\tau_k,x,\omega)\frac{dw_k(t,\omega)}{dt} \tag{1}$$

з початковою умовою

$$Q\left(A,\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t-\tau_k,x,\omega)\bigg|_{t\in[0,\tau]}=[Q(u)]_0, \tag{2}$$

де $\tau\equiv\sup\limits_k \tau_k$, $0<\tau_k\le\tau$,

$$Q(A,q,p)\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}q^i p^j; \tag{3}$$

$A \equiv \{a_{ij}\}$ — дійсна матриця розміру $n \times m$ з $a_{ij} \in \mathbf{R}^1\big|_{\pm\infty}$. Оператори $Q(B, q, p)$, $Q(C, q, p)$ мають структуру (3) з відповідними дійсними матрицями $B \equiv \{b_{ij}\}$ з $b_{ij} \in \mathbf{R}^1$ та $C \equiv \{c_{ij}\}$ з $c_{ij} \in \mathbf{R}^1$. Також визначені зовнішні випадкові збурення $\xi_{kl}(\omega) : \Omega \to \mathbf{R}^1$, $l = 1, 2$, які є попарно незалежними та незалежними від вінерових процесів $w_k(t, \omega)$: $[0, \infty) \times \Omega \to \mathbf{R}^1$ [1] із заданими законами розподілу

$$F_{kl}(x) \equiv P\{\omega : \xi_{kl}(\omega) < x\}, \quad x \in \mathbf{R}^1, \; l = 1, 2, \; k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Під формальним записом (1), (2) будемо розуміти дифузійне рівняння Іто [4, 7]

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k1}(\omega) \int_0^t Q\left(B, \frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s - \tau_k, x, \omega) ds =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) \int_0^t Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(s - \tau_k, x, \omega) dw_k(s, \omega) \tag{5}$$

з початковими умовами (2).

ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Уведемо до розгляду простір $\mathfrak{M}_T$ [4, 5] для всіх $t \in [0, T]$, $T \subset (0, \infty)$, математичного сподівання квадрату модуля випадкових функцій $u(t, x, \omega)$ таких, що існує невласний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E}\left\{ | u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty, \tag{6}$$

де $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання [1–3].

Також будемо використовувати такі норми:

$$\| u(t, x, \omega) \|^2_{L_{2\mathbf{R}^1}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega)|^2 dx < \infty; \tag{7}$$

$$\| u(t, x, \omega) \|^2_{L_{2T}} \equiv \int_0^T | u(t, x, \omega)|^2 dt < \infty; \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_u(t) \equiv \mathbf{E}\left\{ \| u(t, x, \omega) \|^2_{L_{2\mathbf{R}^1}} \right\}, \tag{9}$$

де $L_{2\mathbf{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори випадкових функцій $\{u(t, x, \omega)\} \in \mathbf{R}^1$, для яких існують відповідні інтеграли (7), (8).

Надалі в просторі $\mathfrak{M}_T$ уведемо норму вигляду

$$\| u(t, x, \omega) \|^2 \equiv \int_0^T \mathbf{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbf{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} | u(t, x, \omega)|^2 \, dx \right]^2 dt. \tag{10}$$

З урахуванням конструкції операторів $Q(A, \cdot, \cdot)$, $Q(B, \cdot, \cdot)$, $Q(C, \cdot, \cdot)$ справджуються включення

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T;$$

$$Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T;$$

$$Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T.$$

Доведемо допоміжне твердження у вигляді леми 1.

Лема 1. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t \ge 0\}, P)$ визначена випадкова функція $u(t, x, \omega)\colon [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \to \mathbf{R}^1$.

Тоді перетворення Фур'є за змінною x від цієї випадкової функції

$$z(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \tag{11}$$

належить простору $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, $T \in (0, \infty)$ (тобто $z(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_{1T}$).

Доведення. Застосуємо до $|u(t, x, \omega)|^2$ нерівність Чебишова [1]

$$P\left\{\omega\colon \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2\, dx > N\right\} \le \frac{\mathrm{E}_u(t)}{N}.$$

Для $N \to +\infty$ отримуємо, що $u(t, x, \omega) \in L_{2\mathbf{R}^1}$.

Згідно з теоремою Планшереля [3] матимемо рівність

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |z(t, \sigma, \omega)|^2\, d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2\, dt.$$

Це в позначеннях (9), (10) дає рівність $\| z(t, \sigma, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}$, або $\mathbf{E}_z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E}_u(t)$. Тоді, згідно з означенням норми в просторі $\mathfrak{M}_T$, будемо мати $\| z(t, \sigma, \omega)\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \| u(t, x, \omega)\|_{\mathfrak{M}_T}$, що й доводить лему 1.

Сформулюємо теорему про існування сильного розв'язку задачі Коші для СДРРЧП (1), (2) [6].

Теорема 1. Нехай для задачі Коші СДРРЧП (1), (2) виконуються умови:

I) для коренів $\lambda \equiv \lambda(\omega)$ характеристичного полінома

$$\mathbf{V}(\lambda, i\sigma, \omega) \equiv \frac{\partial}{\partial t}[Q(A, \lambda, i\sigma)] + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k1} Q(B, \lambda, i\sigma) \cdot \exp(-\tau_k \lambda) = 0 \tag{12}$$

з імовірністю одиниця виконана умова $\mathbf{P}\{\omega\colon \mathbf{R}e\lambda(\omega) \le \psi(\sigma) < 0\} = 1$, при цьому $\mathbf{P}\{\omega\colon \psi(0) = 0\} = 1$;

II) для кожного $t \in [0, T] \subset [0, \infty)$ та $C \equiv 0$ однорідне випадкове рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{u}(t, x, \omega)\right] + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k1}(\omega) Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{u}(t - \tau_k, x, \omega) = 0 \tag{13}$$

має розв'язок $\widetilde{u}(t, x, \omega)$ задачі Коші в $L_{2\mathbf{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{u}(t, x, \omega)\Bigg|_{t \in [0, \tau]} = [Q\widetilde{u}]_0, \tag{14}$$

де $\tau \equiv \sup\limits_k \tau_k > 0$, $\tau_k > 0$;

III) зовнішні випадкові збурення $\xi_{kl}(\omega)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, 2$, попарно незалежні та незалежні від вінерових процесів $w_k(t, \omega)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при цьому існують дисперсії $\mathbf{D}\{\xi_{kl}(\omega)\} \le L_l < \infty$, $k = 0, 1, \ldots, n$, $l = 1, 2$.

Тоді стохастична задача Коші (1), (2) для $C \neq 0$ має єдиний сильний розв'язок у просторі $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, $T \in (0, \infty)$.

Доведення теореми 1 здійснюється за аналогією до методики, наведеної в [6].

Зауваження 1. Якщо $\{\xi_{k1}(\omega)\}$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — сталі, наприклад $\mathbf{P}\{\omega: \xi_{k1}(\omega) = 1\} = 1$, тоді рівняння (13) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{u}(t, x)\right] + (n+1)Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)\widetilde{u}(t, x) = 0\,.$$

АСИМПТОТИЧНА СТІЙКІСТЬ У СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ СИЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ (1), (2)

Будемо вважати, що надалі виконується таке припущення: сильні розв'язки рівняння (13) є експоненціально стійкими, тобто

$$|\widetilde{u}(t, x, \omega)| \leq K e^{-\mu t}, \;\; K > 0, \mu > 0\,. \qquad (15)$$

Перейдемо до інтегрального запису сильного розв'язку (1), (2) за допомогою фундаментального розв'язку $H(t, \omega)$ рівняння (13).

Означення 1. Фундаментальним розв'язком $H(t, \omega)$ задачі Коші для рівняння (13) назвемо розв'язок, який побудовано за одиничною початковою умовою

$$\varphi(\theta, \omega) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \theta = 0, \\ 0, \text{ якщо } \theta \in [-\tau, 0), \end{cases} \qquad (16)$$

і який задовольняє умови:

1) для $t \in [-\tau, 0)$ виконується рівність $H(t, \omega) = 0$ з імовірністю одиниця;

2) $\mathbf{P}\{\omega: H(0, \omega) = 1\} = 1$ для $t = 0$;

3) для $t > 0$

$$H(t, \omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} e^{\lambda t} V^{-1}(\lambda, i\sigma, \omega) d\lambda, \qquad (17)$$

де $\mathbf{V}(\lambda, i\sigma, \omega)$ задано виразом (12).

Означення 2. Сильним розв'язком задачі (1), (2) назвемо випадкову функцію $u(t, x, \omega)$:$[0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \to \mathbf{R}^1$, яка є $\mathcal{F}_t$-вимірною для фіксованого $x \in \mathbf{R}^1$ і задовольняє для кожного $\omega \in \Omega$ інтегральне рівняння Іто (5).

Сильний розв'язок лінійного СДРРЧП (1), (2) за допомогою фундаментального розв'язку $H(t, \omega)$ можна записати у вигляді [4]

$$u(t, x, \omega) = \widetilde{u}(t, x, \omega) + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) \int_0^t Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right) \times$$

$$\times H(t - s, \omega) u(s - \tau_k, x, \omega) dw_k(s, \omega)\,, \qquad (18)$$

де $\widetilde{u}(t, x, \omega)$ — деякий розв'язок задачі (13), (14).

Одержимо спочатку необхідні та достатні умови належності простору $\mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$ лінійного оператора $f(\xi_{k2}, G) \equiv \sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) Q\left(G, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, що діє на сильний розв'язок СДРРЧП (1), (2), де $C \equiv G$ з рівняння (1).

Теорема 2. Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, P)$ існує сильний розв'язок СДРРЧП (1), (2).

Тоді необхідною та достатньою умовою належності простору $\mathfrak{M}_\infty$ довільного лінійного оператора

$$f(\xi_{k2}, G) \equiv \sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) Q\left(G, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right), \tag{19}$$

що діє на $u(t, x, \omega): (0, T] \times \mathbf{D}([-\tau, 0], \mathbf{R}^1) \times \Omega \to \mathbf{R}^1$, є виконання для всіх $x \in \mathbf{R}^1$ нерівності

$$S \equiv \sum_{k=0}^{n} E\{\xi_{k2}^2(\omega)\} \int_0^t Q\left(G^2, \frac{d}{dt}, \cdot\right) H(t-\tau_k) dt < 1, \tag{20}$$

де $G^2 \equiv \{g_{ij}^2\}$, $g_{ij} \in \mathbf{R}^1\Big|_{\pm\infty}$, $\mathbf{D}([-\tau, 0], \mathbf{R}^1)$ — простір Скорохода [2] неперервних справа функцій $u(t, x, \omega): [0, \infty) \times \mathbf{R}^1 \times \Omega \to \mathbf{R}^1$, що мають лівосторонні границі.

Доведення. Необхідність. Нехай довільний лінійний оператор $f(\xi_{k2}, G) \in \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$; отже, за лемою 1 лінійний оператор $\sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) Q\left(G, \frac{d}{dt}, \cdot\right) \times z(t-\tau_k, \sigma, \omega)$ належить простору $\mathfrak{M}_\infty$.

Якщо застосувати перетворення Фур'є за змінною $x \in \mathbf{R}^1$ до лівої та правої частини (5) за правилом (10), то одержимо СДРР без частинних похідних (СДРР Іто [4]) для $G = C$ вигляду

$$z(t, \sigma, \omega) \equiv \widetilde{z}(t, \sigma, \omega) + \sum_{k=0}^{n} \xi_{k2}(\omega) \int_0^t H(t-\tau_k - s) \times$$
$$\times Q\left(C, \frac{d}{ds}, \cdot\right) u(s-\tau_k, \sigma, \omega)\, dw_k(s, \omega). \tag{21}$$

У рівнянні (21)

$$\widetilde{z}(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} \widetilde{u}(t, x, \omega) dx \tag{22}$$

— перетворення Фур'є, що діє на $\widetilde{u}(t, x, \omega)$ як розв'язок однорідного рівняння.

Застосовуючи лінійний оператор $\xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right)$ до лівої та правої частин стохастичного диференціального рівняння Іто (21), одержимо

$$\xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) z(t-\tau_l, \sigma, \omega) = \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) \widetilde{y}(t, \sigma, \omega) +$$
$$+ \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) \sum_{k=0}^{n} \int_0^t Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) H(t-\tau_k - s) \times$$
$$\times Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) z(s-\tau_k, \sigma, \omega)\, dw_k(s, \omega), \tag{23}$$

де $l = 0, 1, \ldots, n$.

Піднесемо обидві частини кожного з рівнянь системи (23) до квадрату, застосуємо операцію математичного сподівання, додаючи їх та позначаючи

$$\mu_{l2}(C, t) \equiv \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}\left\{\xi_{k2}^2(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot\right) z^2(t-\tau_k, \sigma, \omega)\right\},$$

одержимо, що

$$\mu_{l2}(C,t) \equiv \mathbf{E}\left\{ \xi_{l2}^2(\omega) Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) y(t,\sigma,\omega) \right\} +$$

$$+\mathbf{E}\left\{ \xi_{l2}^2(\omega) \int_0^t Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t-\tau_l - s) \mu_{l2}(C,s) ds \right\}, \ l = 0, 1, \ldots, n. \qquad (24)$$

Інтегруючи одержане рівняння (24) по t від 0 до ∞, змінюючи порядок інтегрування та додаючи одержані рівняння, матимемо, що

$$\sum_{l=0}^{n} \int_0^\infty \mu_{l2}(C,t) dt > S \sum_{l=0}^{n} \int_0^\infty \mu_{l2}(C,t) dt. \qquad (25)$$

Нерівність (25) можлива тільки для $S<1$. Це означає, що $\mu_{l2}(C,t) \in \in \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$. З урахуванням леми 1 одержимо включення $f(\xi_{k2}, C) \in \in \mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T \subset \mathfrak{M}_\infty$. Це доводить необхідність.

Достатність. Після інтегрування системи рівнянь (24) за змінною t від 0 до ∞ та додавання одержаних рівнянь отримуємо, що

$$\sum_{l=0}^{n} \int_0^\infty \mu_{l2}(C,t)\, dt = \frac{1}{1-S} \left[\int_0^\infty \sum_{k=0}^{n} \mathbf{E}\left\{ \xi_{k2}^2(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) y^2(t,\omega) \right\} dt + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty \sum_{l=0}^{n} \mathbf{E}\left\{ \xi_{l2}^2(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t-\tau_l-\tau) \right\} dt \right], \qquad (26)$$

де S визначено в (20).

Нехай виконується умова $S<1$, тоді з (26) випливає, що

$$f(\xi_k, C)\, z(t-\tau_k, \sigma, \omega) \equiv \sum_{l=0}^{n} \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z(t-\tau_k, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty,$$

отже, за лемою 1

$$f(\xi_k, C) u(t-\tau_k, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty. \qquad (27)$$

За умовою теореми 2 включення (27) виконано для довільного $f(\xi_k, G)$, тому для $G=C$ маємо

$$f(\xi_k, C) \equiv \sum_{l=0}^{n} \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) u(t-\tau_l, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_\infty.$$

Аналогічно до співвідношення (24) матимемо, що

$$\int_0^\infty \sum_{l=0}^{n} \mu_{l2}(C,t)\, dt = \int_0^\infty \sum_{l=0}^{n} E\left\{ \xi_{l2}^2(\omega) Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) y(t,\sigma,\omega) \right\} dt +$$

$$+ \int_0^\infty \sum_{l=0}^{n} Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t-\tau-\tau_l)\, dt. \qquad (28)$$

За умов достатності всі інтеграли в (28) існують, а це означає, що $\sum_{l=0}^{n} \mu_{l2}(C,t) \in L_1(0,\infty)$, тобто $f(\xi_k, C) \equiv \sum_{l=0}^{n} \xi_{l2}(\omega) Q\left(C, \frac{d}{dt}, \cdot \right) z(t-\tau_l, \sigma, \omega) \in \in \mathfrak{M}_\infty$. Тоді за лемою 1 матимемо (28). Доведення теореми 2 завершено.

Теорема 3. Нехай виконуються умови теореми 2. Тоді нульовий розв'язок $u(t, x, \omega) \equiv 0$ рівняння (1), (2) є асимптотично стійким у середньому квадратичному.

Доведення. За умов теореми 2 для кожного розв'язку $\widetilde{u}(t, x, \omega)$ рівняння має місце оцінка

$$|\widetilde{u}(t, x, \omega)| \leq Ne^{-\beta t} \| [Q\widetilde{u}\,]_0 \| . \tag{29}$$

Тоді легко бачити виконання нерівності

$$\int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t)\, dt \leq \frac{N \| C \| \cdot \| [Q\widetilde{u}\,]_0 \|}{2\beta(1-S)} \times$$
$$\times \left[1 - \int_0^\infty \sum_{l=0}^n E\xi_{l2}^2(\omega) Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t-\tau-\tau_l)\, dt. \tag{30}$$

Отже, інтегральна рівність (18) дасть оцінку

$$\mathbf{E}\{u^2(t, x, \omega)\} \leq N^2 e^{-2\beta t} \| [Q\widetilde{u}\,]_0 \| \cdot \| H(t) \|^2 \int_0^\infty \sum_{l=0}^n \mu_{l2}(C, t)\, dt.$$

Легко бачити, що з нерівності (30) випливає асимптотична стійкість у середньому квадратичному розв'язку стохастичного диференціального рівняння (21), отже, за лемою 1, і СДРРЧП (1), (2).

Зауваження 1. Слід підкреслити, що умова (20) виписана для СДРРЧП у випадку $x \in \mathbf{R}^1$.

Зауваження 2. Якщо в рівнянні (1) відсутні зовнішні випадкові збурення, тобто вони є стаціонарними, а саме $\xi_k(\omega) \equiv 1$, $k = 0, 1, \ldots, n$, тоді маємо СДРРЧП вигляду [6]

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + \sum_{k=0}^n Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t-\tau_k, x, \omega) =$$
$$= \sum_{k=0}^n Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t-\tau_k, x, \omega)\, \frac{dw_k(t, \omega)}{dt}, \tag{31}$$

тобто СДРРЧП без впливу зовнішніх випадкових збурень.

Зауваження 3. Необхідною та достатньою умовою асимптотичної стійкості в середньому квадратичному рівняння (31) за умови (2) є умова (20) для $\mathbf{E}\{\xi_{k2}^2(\omega)\} = 1$, а саме

$$\bar{S} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty Q\left(C^2, \frac{d}{dt}, \cdot \right) H^2(t-\tau_k)\, dt < 1. \tag{32}$$

Ця умова раніше була одержана в монографіях [4, 5] для стохастичних диференціальних рівнянь без частинних похідних.

МОДЕЛЬНА ЗАДАЧА ПРО СТІЙКІСТЬ СТРИЖНЯ ПІД ДІЄЮ БІЛОГО ШУМУ

У праці [8] досліджується поведінка стрижня, на який діє білий шум. Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a(\xi_1(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(\xi_2(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c(\xi_3(\omega)) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt} \tag{33}$$

з початковими умовами

$$u(0,x)=f_1(x)\,,\quad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=f_2(x) \tag{34}$$

та крайовими умовами

$$u(t,0)=u(t,l)=\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}=\frac{\partial u(t,l)}{\partial x}=\frac{\partial^2 u(t,0)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(t,l)}{\partial x^2}=0. \tag{35}$$

Тут $a(\xi_1(\omega))>0,\ b(\xi_2(\omega))>0,\ c(\xi_3(\omega))>0$ з імовірністю одиниця. Аналогічно до дискретного випадку [8] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром $a(x),\ \forall x\in\mathbf{R}^1$, як найбільш допустиму інтенсивність процесів зі взаємно незалежними значеннями, для якої система є стійкою в середньому квадратичному, тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [12] $S_{k_1k_2}$ системи (33)–(35)

$$S_{k_1k_2}\equiv\sum_{k=0}^{m}a_{k_1k_2}(\xi(\omega))\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^{k_1}\partial x^{k_2}}$$

за параметрами $a_{k_1k_2}(\xi_1(\omega))$, $k=k_1+k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda,\sigma,\omega)\equiv\sum\limits_{k=0}^{m}a_{k_1k_2}(\xi_1(\omega))\lambda^{k_1}(i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості $S_{k_1k_2}(x)$ системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1k_2}(x)\equiv\left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\lambda|^{k_1}|\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda,\sigma,x)|}d\lambda\right]^{-1}. \tag{36}$$

Використовуючи твердження (36), знайдемо статистичний запас стійкості $S(x)$ за параметрами $a(x), b(x), c(x)$ системи (33)–(35)

$$S(x)\equiv\left[\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4+a(x)\sigma^2-b(x)\lambda^2)^2+c(x)^2\lambda^2}\right]^{-1}=2a(x)c(x)\ \forall x\in\mathbf{R}^1. \tag{37}$$

Таким чином, система (33)–(35) є стійкою в l.i.m., для якого $S(x)>\varepsilon^2\ \ \forall x\in\mathbf{R}^1$.

Нехай у системі (33)–(35) діють зовнішні випадкові «збурення» типу $\xi(\omega)$ на праву частину СДРРЧП (33). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішніми збуреннями $\varphi(\xi(\omega))$. Тоді (33) буде мати вигляд

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi(\xi(\omega))\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{dw(t,\omega)}{dt}.$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (37), (34), (35), маємо

$$S(\varphi)\equiv\left[E\{|\varphi(\xi)|^2\}\sup_{\sigma}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4+a\sigma^2-b\lambda^2)^2+c^2\lambda^2}\right]^{-1}=E\{|\varphi(\xi)|^2\}2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в середньому квадратичному теореми 2, доходимо висновку, що система (37), (34), (35) є стійкою в середньому квадратичному, якщо

$$E\{\varphi^2(\xi)\}2ac<1\,, \tag{38}$$

та нестійкою в середньому квадратичному, якщо в (38) поміняти знак на протилежний.

ВИСНОВКИ

Запропонована в цій праці стохастична модель складних систем є спробою врахування в повному обсязі випадковостей під час дослідження реальних процесів, що описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу, але й випадкові збурення інших типів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гулинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. Москва: Физматлит, 2005. 408 с.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. Киев: Наук. думка, 1980. 612 с.
3. Королюк В.С., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. В 3-х томах. Т.3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. Чернівці: Вид-во «Золоті литаври», 2009. 798 с.
4. Царьков Е.Ф., Ясинский В.К. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. Рига: Ориентир, 1992. 301 с.
5. Царьков Е.Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров. Рига: Зинатне, 1989. 421 с.
6. Koroliuk V.S., Yurchenko I.V., Yasynskyy V.K. Behavior of the second moment of the solution to the autonomous stochastic linear partial differential equation with random parameters in the right-hand side. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2015. Vol. 51, N 1. P. 56–63.
7. Свердан М.Л., Царков Є.Ф., Ясинський В.К. Стійкість у стохастичному моделюванні складних динамічних систем. Снятин: Над Прутом, 1996. 448с.
8. Lindsey W.C. Synchronization systems in communication and control. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1972. 704 p.

Надійшла до редакції 07.02.2019

Т.О. Лукашив, И.В. Юрченко, В.К. Ясинский

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ В СРЕДНЕМ КВАДРАТИЧНОМ ЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ТИПА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости в среднем квадратичном сильных решений стохастических дифференциально-разностных уравнений в частных производных с попарно независимыми внешними случайными возмущениями типа случайных величин.

Ключевые слова: стохастическое уравнение в частных производных, устойчивость в среднем квадратичном, случайные возмущения.

T.O. Lukashiv, I.V. Yurchenko, V.K. Yasynskyy

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS OF THE STABILITY IN THE MEAN SQUARE OF THE STRONG SOLUTIONS OF LINEAR STOCHASTIC DIFFERENTIAL-DIFFERENCE PARTIAL DERIVATIVE EQUATIONS SUBJECT TO EXTERNAL PERTURBATIONS OF THE TYPE OF RANDOM VARIABLE

Abstract. We obtain the necessary and sufficient conditions for the stability in the mean square of the strong solutions of stochastic differential-difference partial derivative equations with pairwise independent external random distributions of the type of random variables.

Keywords: stochastic partial differential equation, stability in the mean square, random perturbation.

Лукашів Тарас Олегович,
кандидат фіз.-мат. наук, асистент кафедри Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: t.lukashiv@gmail.com.

Юрченко Ігор Валерійович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент, доцент кафедри Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: i.yurchenko@chnu.edu.ua.

Ясинський Володимир Кирилович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, e-mail: v.yasynskyy@chnu.edu.ua.