А.Н. ЧЕБОТАРЕВ

УДК 519.713.1

ОТ ФОРМУЛ ВИДА $F(t)$ ЯЗЫКА LP К $-\omega$-РЕГУЛЯРНЫМ ВЫРАЖЕНИЯМ

Аннотация. При синтезе Σ-автомата, специфицированного в языке LP, возникает задача представления множества обратных сверхслов, задаваемых формулой $F(t)$, в виде $-\omega$-регулярного выражения. Построение этого выражения основано на соответствии между структурными элементами формул и $-\omega$-регулярных выражений. Для обеспечения такого соответствия введены две дополнительные операции над $-\omega$-регулярными множествами, соответствующие операциям квантификации в формулах. Рассмотрены методы представления этих операций в терминах языка $-\omega$-регулярных выражений. Получены результаты, позволяющие строить $-\omega$-регулярные выражения для достаточно широкого класса формул вида $F(t)$ языка LP.

Ключевые слова: логика LP, обратное сверхслово, ограниченная справа формула, $-\omega$-регулярное выражение, префиксно замкнутое множество обратных сверхслов.

ВВЕДЕНИЕ

Предложенный в [1] метод синтеза Σ-автомата, специфицированного в логическом языке LP, состоит из двух процедур: первая строит Σ-автомат, имеющий подавтомат, совпадающий со специфицированным автоматом, вторая удаляет в построенном автомате состояния, не принадлежащие этому подавтомату. Такие состояния называются фиктивными. В [2] предложен метод нахождения фиктивных состояний, в котором формуле вида $F(t)$, определяющей состояние синтезируемого автомата, ставится в соответствие $-\omega$-регулярное выражение $R(F(t))$, задающее множество обратных сверхслов. Проверка состояния на фиктивность состоит в проверке принадлежности некоторого периодического обратного сверхслова множеству обратных сверхслов, задаваемому $-\omega$-регулярным выражением $R(F(t))$. Таким образом, возникает задача перехода от формулы $F(t)$ языка LP к соответствующему ей $-\omega$-регулярному выражению $R(F(t))$. Данная статья посвящена решению этой задачи.

Для построения выражения $R(F(t))$ определены две операции над $-\omega$-регулярными множествами, соответствующие кванторным подформулам вида $\forall t_1 (t_1 \le t+k) \to F(t_1)$ и $\exists t_1 (t_1 \le t+k_1) F_1(t_1) \& \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t+k_2) \to F_2(t_2)$ языка LP. Это дает возможность строить выражение $R(F(t))$ индуктивно в соответствии со структурой формулы $F(t)$. Поскольку эти операции, как и операция пересечения $-\omega$-регулярных множеств, не принадлежат языку $-\omega$-регулярных выражений, возникает необходимость их последующего представления в терминах операций конкатенации, итерации и объединения. Полученные в работе результаты позволяют строить соответствующие $-\omega$-регулярные выражения для достаточно широкого класса формул вида $F(t)$ языка LP. Необходимые сведения о формулах языка LP с одной свободной переменной и о $-\omega$-регулярных выражениях приведены в разд. 1.

1. ФОРМУЛЫ ЯЗЫКА LP И $-\omega$-РЕГУЛЯРНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Логика LP — это фрагмент логики первого порядка с одноместными предикатами MFO< [3], интерпретируемый на множестве **Z** целых чисел с отношением линейного порядка. Термы языка LP имеют вид $t+k$, где t принадлежит множеству предметных переменных $T=\{t, t_1, \dots, t_n\}$, а $k\in\mathbf{Z}$. Атомарные формулы могут быть двух типов: $\sigma(\tau)$ или $\tau_1\rho\tau_2$, где σ — одноместный предикатный символ, принадлежащий множеству предикатных символов $\Sigma=\{a, b, c, \dots\}$, $\rho\in\{=,<,\le\}$, а τ, τ_1, τ_2 — термы. Все замкнутые формулы языка LP имеют вид $\forall tF(t)$, где $F(t)$ — формула с одной свободной переменной. Каждая кванторная подформула, т.е. подформула, состоящая из квантора и области его действия, имеет не более двух свободных (в этой подформуле) переменных. Все такие подформулы с одной свободной переменной имеют вид $\exists t_1(t_1\le t+k)F_1(t_1)$ или $\forall t_1(t_1\le t+k)\to F_1(t_1)$, а подформулы с двумя свободными переменными — $\exists t_2(t_1<t_2\le t+k)F_2(t_2)$ или $\forall t_2(t_1<t_2\le t+k)\to F_2(t_2)$. В формуле не интерпретированы только предикатные символы из Σ, поэтому ее интерпретацию на множестве **Z** можно рассматривать как двустороннее сверхслово (**Z**-слово) в алфавите Σ. (Терминология, касающаяся бесконечных слов: сверхслов, обратных сверхслов и **Z**-слов, их префиксов и суффиксов, приведена в [2].) При этом **Z**-слово определяет интерпретацию предикатного символа σ как предикат, истинный при тех и только тех значениях t, которые соответствуют позициям **Z**-слова, где встречается символ σ. Таким образом, множество моделей для формулы $F=\forall tF(t)$ представляет собой множество $M(F)$ всех таких **Z**-слов, в каждой позиции которых истинна формула $F(t)$.

Формула $F(t)$ с одной свободной переменной t называется k-ограниченной справа ($k\in\mathbf{Z}$), если для любого $\tau\in\mathbf{Z}$ значения формулы $F(\tau)$ на всех двусторонних сверхсловах, имеющих одинаковые $(\tau+k)$-префиксы, совпадают. Будем говорить, что 0-ограниченная справа формула $F(t)$ истинна на обратном сверхслове g, если $F(0)$ истинна на любом двустороннем сверхслове с 0-префиксом g. Формула $F(t)$, 0-ограниченная справа, задает множество $R(F(t))$ всех тех обратных сверхслов, на которых она истинна. Таким образом, 0-ограниченные справа формулы вида $F(t)$ рассматриваются как способ задания множеств обратных сверхслов. Далее рассматриваются только 0-ограниченные справа формулы $F(t)$, поскольку такие формулы определяют состояния синтезируемого автомата.

Для описания множеств обратных сверхслов будем использовать $-\omega$-регулярные выражения, алфавит которых совпадает с сигнатурой одноместных предикатных символов языка LP. Пусть Σ — конечный алфавит. Множество всех слов в алфавите Σ, включая пустое слово ε, обозначается Σ^*, множество всех обратных сверхслов — $\Sigma^{-\omega}$, а множество всех двусторонних сверхслов — $\Sigma^{\mathbf{Z}}$. На множестве $\Sigma^*\cup\Sigma^{-\omega}$ определена (частичная) операция конкатенации «$\cdot$», которую распространим также на подмножества множеств Σ^* и $\Sigma^{-\omega}$. Например, если $R\subseteq\Sigma^{-\omega}$, $Q\subseteq\Sigma^*$, то $R\cdot Q=\{r\cdot q\mid r\in R, q\in Q\}$.

На множестве $R\subseteq\Sigma^*$ определены:

— операция конечной итерации $R^*=\{r_1r_2\dots r_n\mid n\ge 0, r_i\in R\}$, заметим, что $n=0$ соответствует пустому слову ε;

— операция бесконечной итерации $R^{-\omega}=\{\dots r_{-2}r_{-1}r_0\mid$ для всех $i\le 0\ r_i\in R\setminus\{\varepsilon\}\}$.

Таким образом, результатом конечной итерации является бесконечное множество слов, а результатом бесконечной итерации — бесконечное множество обратных сверхслов.

Выражения, построенные из символов алфавита Σ с помощью операций объединения, конкатенации (символ конкатенации часто будем опускать) и конечной итерации, называются регулярными, а конечные объединения выражений вида $R^{-\omega}U$, где R и U — регулярные выражения, называются $-\omega$-регулярными выражениями. Множества обратных сверхслов, задаваемые $-\omega$-регулярными выражениями, называются $-\omega$-регулярными множествами. Множество всех $-\omega$-регулярных множеств замкнуто относительно операций пересечения «$\cap$» и дополнения «$\neg$» [4], т.е. если R и Q являются $-\omega$-регулярными множествами, то множества $\neg R$ и $R \cap Q$ также могут быть заданы $-\omega$-регулярными выражениями. Поэтому для задания $-\omega$-регулярных множеств наряду с $-\omega$-регулярными выражениями будут использоваться выражения, содержащие операции «$\cap$» и, возможно, «$\neg$». При вычислении пересечений $-\omega$-регулярных множеств часто применяется равносильность $R\Sigma^* = R \cup R\Sigma^*\Sigma$. Для упрощения обозначений одноэлементное множество слов $\{r\}$, $r \in \Sigma^*$, будем записывать без фигурных скобок, а для объединения таких множеств использовать символ $\vee$ вместо $\cup$. Например, вместо $(\{a\} \cdot \{b\} \cup \{c\})^{-\omega}$ будем писать $(ab \vee c)^{-\omega}$.

2. ОБЩИЙ ПРИНЦИП ПЕРЕХОДА ОТ ЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ К $-\omega$-РЕГУЛЯРНЫМ ВЫРАЖЕНИЯМ

Переход от формулы $F(t)$ к множеству обратных сверхслов $R(F(t))$ состоит в построении $-\omega$-регулярного выражения, задающего это множество. Такой переход основан на соответствии между структурными элементами формулы, т.е. ее подформулами, и структурными элементами $-\omega$-регулярного выражения. Это соответствие определяется индуктивно, исходя из совпадения множества одноместных предикатных символов формулы и алфавита $-\omega$-регулярного выражения, а также соответствия между операциями, используемыми для построения формул, и операциями, с помощью которых строятся $-\omega$-регулярные множества. Соответствие между логическими связками и теоретико-множественными операциями описывается следующими равенствами: $R(F_1(t) \vee \vee F_2(t)) = R((F_1)) \cup R(F_2(t))$, $R(F_1(t) \,\&\, F_2(t)) = R((F_1)) \cap R(F_2(t))$. Заметим, что пересечение не является операцией языка $-\omega$-регулярных выражений и, следовательно, должно быть представлено в терминах операций этого языка. Отрицанию соответствует операция дополнения до $\Sigma^{-\omega}$, которая также не принадлежит языку $-\omega$-регулярных выражений. Поскольку вычисление дополнения $-\omega$-регулярного множества осуществляется довольно сложно, будем полагать, что формула $F(t)$ приведена к такому виду, что отрицание применяется только к атомарным формулам вида $\sigma(\tau)$ или их дизъюнкции. Для установления соответствия с операциями применения (ограниченных) кванторов будут определены две дополнительные операции над $-\omega$-регулярными множествами.

Рассмотрим значения $R(F(t))$ для формул, не содержащих кванторов. Так, $R(1(t)) = \Sigma^{-\omega}$, $R(0(t)) = \varnothing$, $R(a(t)) = \Sigma^{-\omega}a$, $R(a(t-k)) = \Sigma^{-\omega}a\Sigma^k$, $R(a(t-1)b(t)) = = R(a(t-1)) \cap R(b(t)) = \Sigma^{-\omega}a\Sigma \cap \Sigma^{-\omega}b = \Sigma^{-\omega}ab$. Приведенных сведений достаточно, чтобы определить значение $R(F(t))$ для любой формулы $F(t)$, не содержащей кванторов.

Для формул с кванторами сначала рассмотрим формулы, не содержащие подформул с двумя свободными переменными.

Если формула $F(t_1)$ не содержит подформул с двумя свободными переменными, то $R(\exists t_1(t_1 \le t-k)F(t_1)) = R(F(t))\Sigma^*\Sigma^k$, где $k \ge 0$. Например, $R(\exists t_1(t_1 \le t)a(t_1)) = \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*$, $R(\exists t_1(t_1 \le t)\exists t_2(t_2 \le t_1)a(t_2)) = (\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*)\Sigma^* = \Sigma^{-\omega}a\Sigma^*$.

Для представления множеств $R(F(t))$, где $F(t)$ начинается с квантора $\forall$, потребуется ввести дополнительную операцию над $-\omega$-регулярными множествами.

Слово u называется фактором слова r, если существуют такие слова $r_1, r_2 \in \Sigma^*$, что $r = r_1 u r_2$, и фактором обратного сверхслова g, если существуют такие $g_1 \in \Sigma^{-\omega}$ и $r \in \Sigma^*$, что $g = g_1 ur$. В дальнейшем в качестве факторов будем рассматривать слова в расширенном алфавите $\Sigma' = 2^{\Sigma} \setminus \varnothing$, которым соответствуют множества слов в алфавите Σ, например, $a\Sigma$, $(a \vee b)cb$, $a\Sigma\Sigma b$.

Слово u называется префиксом слова r, если существует такое слово $r_1 \in \Sigma^*$, что $r = ur_1$. Обратное сверхслово g_1 называется префиксом обратного сверхслова g, а слово l — его суффиксом, если $g_1 \cdot l = g$. Множество всех префиксов обратного сверхслова g обозначим $\mathrm{Pref}\,(g)$. Соответственно для множества U обратных сверхслов $\mathrm{Pref}\,(U) = \bigcup\limits_{u \in U}\{g \mid g \in \mathrm{Pref}\,(u)\}$.

Множество $R \subseteq \Sigma^{-\omega}$ называется префиксно замкнутым (ПЗ), если каждый префикс каждого обратного сверхслова из R принадлежит R, т.е. $\mathrm{Pref}\,(R) = R$.

Множество слов $R \subseteq \Sigma^*$ называется префиксно замкнутым, если каждый непустой префикс каждого слова из R принадлежит R. Заметим, что слово r имеет префиксы ε и r.

Очевидно, что $\Sigma^{-\omega}$ — ПЗ множество, таким образом, $\Sigma^{-\omega}(ab)^*\Sigma$ и $\Sigma^{-\omega}(a\Sigma \cup (ab)^*\Sigma)$ — ПЗ множества, поскольку оба они совпадают с $\Sigma^{-\omega}$, а $\Sigma^{-\omega}a\Sigma$ — не ПЗ множество, поскольку $\mathrm{Pref}\,(\Sigma^{-\omega}a\Sigma) = \Sigma^{-\omega} \ne \Sigma^{-\omega}a\Sigma$. Вообще, $\mathrm{Pref}\,(\Sigma^{-\omega}R) = \Sigma^{-\omega}$, где $R \subseteq \Sigma^*$. Отсюда следует, что любое множество вида $\Sigma^{-\omega}R$ не ПЗ, если оно не равно $\Sigma^{-\omega}$. Множество $a^{-\omega}\Sigma^k$ ПЗ, как и $a^{-\omega}\Sigma^*$. Множество слов $(a\Sigma)^*$ не ПЗ, так как все слова в нем имеют четную длину и префиксы нечетной длины.

Утверждение 1.

1. Если $R \subseteq \Sigma^*$ — ПЗ множество (слов), то $(R)^*$ и $R^{-\omega}$ — также ПЗ множества. Обратное утверждение для $R^{-\omega}$ неверно, например, множество $(ab\Sigma^*)^{-\omega}$ ПЗ в отличие от $ab\Sigma^*$, которому не принадлежит префикс a.

2. Пусть $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$. Если R_1, R_2 — ПЗ множества слов, то множества $((R_1)^*(R_2)^*)^*$ и $((R_1)^*(R_2)^*)^{-\omega}$ также ПЗ.

Введем унарную операцию $\wp(R)$ над $-\omega$-регулярными множествами, определив ее как множество всех таких обратных сверхслов из R, каждый префикс которых принадлежит R. Операция $\wp(R)$ определяется аналогично для множества слов $R \subseteq \Sigma^*$. Из этого определения следует, что $\wp(R)$ — ПЗ множество. Так как $\wp(R) \subseteq R$, множество $\wp(R)$ можно определить как максимальное ПЗ подмножество множества R. Например: $\wp(\Sigma^{-\omega}a) = a^{-\omega}$, $\wp(\Sigma^{-\omega}a\Sigma^k) = a^{-\omega}\Sigma^k$, $\wp(\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*) = (a\Sigma^*)^{-\omega}$. Если R ПЗ, то $\wp(R) = R$. Таким образом, $\wp(\wp(R)) = \wp(R)$.

Теперь $R(\forall t_1(t_1 \le t) \to F(t_1))$ можно определить как $\wp(R(F(t)))$, например:

$$R(\forall t_1(t_1 \le t) \to a(t_1)) = \wp(\Sigma^{-\omega}a) = a^{-\omega}\ ,$$

$$R(\forall t_1(t_1 \le t) \to a(t_1 - k)) = \wp(\Sigma^{-\omega}a\Sigma^k) = a^{-\omega}\Sigma^k,$$

$$R(\forall t_1(t_1 \le t) \to \exists t_2(t_2 \le t_1)a(t_2)) = \wp(\Sigma^{-\omega}a\Sigma^*) = (a\Sigma^*)^{-\omega},$$

$$R(\exists t_1(t_1 \le t)\forall t_2(t_2 \le t_1) \to a(t_2)) = \wp(\Sigma^{-\omega}a)\Sigma^* = a^{-\omega}\Sigma^*.$$

Методы вычисления $\wp(R)$ рассмотрим в разд. 3.

3. ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА $\wp(R)$

Утверждение 2. Для $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^{-\omega}$ имеем $\wp(R_1 \cap R_2) = \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$.

Доказательство. 1. Пусть $g \in \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$. Каждый префикс g принадлежит R_1 и R_2, т.е. принадлежит $R_1 \cap R_2$, а следовательно, $g \in \wp(R_1 \cap R_2)$. Поскольку это справедливо для любого обратного сверхслова из $\wp(R_1) \cap \wp(R_2)$, отсюда следует, что $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) \subseteq \wp(R_1 \cap R_2)$.

2. Пусть $g \in \wp(R_1 \cap R_2)$. Каждый его префикс принадлежит $R_1 \cap R_2$, т.е. принадлежит R_1 и R_2. Таким образом, $g \in \wp(R_1)$ и $g \in \wp(R_2)$, т.е. $g \in \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$. Это справедливо для любого обратного сверхслова из $\wp(R_1 \cap R_2)$, что влечет $\wp(R_1 \cap R_2) \subseteq \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$. Следовательно, $\wp(R_1 \cap R_2) = \wp(R_1) \cap \wp(R_2)$.

Утверждение 3. Из $R_1 \subseteq R_2$ следует $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$.

Доказательство. Из $R_1 \cap R_2 = R_1$ и утверждения 2 следует, что $\wp(R_1) \cap \wp(R_2) = \wp(R_1)$, т.е. $\wp(R_1) \subseteq \wp(R_2)$.

Утверждение 4. Справедливо равенство $\wp(\Sigma^{-\omega}R) = \wp(R^{-\omega})$, где $R \subseteq \Sigma^*$.

1. Каждый префикс обратного сверхслова из $\wp(\Sigma^{-\omega}R)$ заканчивается словом из R. Таким образом, каждое обратное сверхслово из $\wp(\Sigma^{-\omega}R)$ можно представить как бесконечную конкатенацию слов из R, т.е. $\wp(\Sigma^{-\omega}R) \subseteq R^{-\omega}$.

2. Каждое обратное сверхслово из $R^{-\omega}$ принадлежит $\Sigma^{-\omega}R$, т.е. $R^{-\omega} \subseteq \Sigma^{-\omega}R$. Применив утверждение 3 к каждому из этих включений, получим $\wp(\Sigma^{-\omega}R) \subseteq \wp(R^{-\omega})$ и $\wp(R^{-\omega}) \subseteq \wp(\Sigma^{-\omega}R)$, из чего следует $\wp(\Sigma^{-\omega}R) = \wp(R^{-\omega})$.

Приведем примеры использования операции $\wp$ и утверждений 2–4 для построения $-\omega$-регулярного выражения, соответствующего $R(F(t))$.

Пример 1. Пусть $F(t) = \forall t_1(t_1 \le t) \to (b(t_1)\exists t_2(t_2 < t_1)a(t_2))$. Множество $\wp(F(t))$ равно $\wp(\Sigma^{-\omega}b \cap \Sigma^{-\omega}(a\Sigma^*\Sigma))$. Согласно утверждениям 2 и 4 имеем $\wp(\Sigma^{-\omega}b \cap \Sigma^{-\omega}(a\Sigma^*\Sigma)) = b^{-\omega} \cap \wp((a\Sigma^*\Sigma)^{-\omega})$. Поскольку обратное сверхслово $b^{-\omega}$ не принадлежит $(a\Sigma^*\Sigma)^{-\omega}$, а следовательно, и $\wp((a\Sigma^*\Sigma)^{-\omega})$, это пересечение пусто.

Пример 2. Пусть $r \in \Sigma^*$. Согласно утверждению 4 $\wp(\Sigma^{-\omega}r\Sigma^*) = \wp((r\Sigma^*)^{-\omega})$. Множество $(r\Sigma^*)^{-\omega}$ ПЗ. Действительно, всякий префикс обратного сверхслова из $(r\Sigma^*)^{-\omega}$ принадлежит множеству $(r\Sigma^*)^{-\omega}r_1$, где $r_1 \in r\Sigma^*$, или является префиксом слова r. Очевидно, что $(r\Sigma^*)^{-\omega}r_1 \subseteq (r\Sigma^*)^{-\omega}$. Таким образом, $\wp(\Sigma^{-\omega}r\Sigma^*) = (r\Sigma^*)^{-\omega}$. Аналогично для $R \in \Sigma^*$ имеем $\wp(\Sigma^{-\omega}R\Sigma^*) = \wp((R\Sigma^*)^{-\omega}) = (R\Sigma^*)^{-\omega}$.

Рассмотрим построение $\wp(R)$ для $R = \Sigma^{-\omega}R_1$, где R_1 — конечное множество слов в алфавите Σ', называемых первичными термами. Множество всех первичных термов множества R обозначим $T(R)$. Так, для $R = \Sigma^{-\omega}(r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_k)$ или $R = (r_1 \vee r_2 \vee \ldots \vee r_k)^{-\omega}$, где $r_1, r_2, \ldots, r_k \in (\Sigma')^*$, $T(R) = \{r_1, r_2, \ldots, r_k\}$. Если первичные термы содержат символ Σ, их следует рассматривать как множества слов, полученные в результате замены каждого символа Σ конкретным символом из множества Σ.

Сформулируем алгоритм построения $\wp(R)$, одновременно иллюстрируя его на примере.

Пусть $R=\Sigma^{-\omega}(b\vee a\Sigma\Sigma)$, где $\Sigma=\{a, b, c\}$.

Если обратное сверхслово $\ldots\sigma_{-2}\sigma_{-1}\sigma_0$ принадлежит $\wp(R)$, то каждый его префикс заканчивается первичным термом из $T(R)$. Для каждого первичного терма $r\in T(R)$ построим множество обратных сверхслов, принадлежащих $\wp(R)$ и заканчивающихся этим термом. Рассмотрим процесс построения одного из таких обратных сверхслов g, заканчивающегося термом $a\Sigma\Sigma$.

Построение осуществляется пошагово так, что на каждом шаге сокращается множество обратных сверхслов, которому принадлежит обратное сверхслово g. Процесс построения начинается с множества $\Sigma^{-\omega}a\Sigma\Sigma$. Всякое обратное сверхслово, принадлежащее этому множеству, имеет –1-префикс, принадлежащий $\Sigma^{-\omega}a\Sigma$, и –1-суффикс Σ. Кроме того –1-префикс должен заканчиваться одним из первичных термов. Если это терм r_1, тогда должно выполняться $\Sigma^{-\omega}a\Sigma\cap\Sigma^{-\omega}r_1\neq\varnothing$. В данном случае таким термом может быть любой первичный терм. Выбрав $r_1=a\Sigma\Sigma$, получим, что –1-префикс принадлежит $\Sigma^{-\omega}aa\Sigma=\Sigma^{-\omega}a\Sigma\cap\Sigma^{-\omega}a\Sigma\Sigma$. Отсюда следует, что –2-префикс обратного сверхслова g принадлежит множеству $\Sigma^{-\omega}aa$, а –2-суффикс равен $\Sigma\Sigma$. На этом заканчивается первый шаг.

На втором шаге уточняется множество обратных сверхслов, которому принадлежит -3-префикс обратного сверхслова g. Поскольку –2-префикс заканчивается одним из первичных термов, выбираем терм r_2, для которого $\Sigma^{-\omega}aa\cap\Sigma^{-\omega}r_2\neq\varnothing$. Таким термом может быть только $a\Sigma\Sigma$ и, следовательно, –2-префикс принадлежит множеству $\Sigma^{-\omega}aaa=\Sigma^{-\omega}aa\cap\Sigma^{-\omega}a\Sigma\Sigma$. Отсюда следует, что –3-префикс принадлежит $\Sigma^{-\omega}aa$, а соответствующий суффикс равен $a\Sigma\Sigma$.

В общем случае на i-м шаге уточняется множество обратных сверхслов, которому принадлежит $-(i+1)$-префикс обратного сверхслова g, а также определяется $-(i+1)$-суффикс этого обратного сверхслова.

В дальнейшем под выражением «префикс p» обратного сверхслова g, $p\in\Sigma^*$, будем понимать как множество обратных сверхслов $\Sigma^{-\omega}p$, так и слово p. Будем говорить, что терм r применим к префиксу $\Sigma^{-\omega}p$, если $\Sigma^{-\omega}r\cap\Sigma^{-\omega}p\neq\varnothing$, а применение его состоит в замене префикса $\Sigma^{-\omega}p$ префиксом $\Sigma^{-\omega}r\cap\Sigma^{-\omega}p$. Таким образом, шаг алгоритма представляет собой применение некоторого первичного терма к определенному на предыдущем шаге префиксу p и определение нового префикса путем сдвига позиции в построенной части обратного сверхслова на единицу влево. Для указания префикса, к которому на следующем шаге нужно применить терм, будем использовать точку. Каждый шаг увеличивает полученный ранее суффикс обратного сверхслова g на один символ. Суффикс обратного сверхслова, полученный после выполнения k шагов, назовем k-продолжением исходного первичного терма. Выполнение последовательности шагов можно представить в виде последовательности таких суффиксов.

Для рассматриваемого примера такая последовательность может иметь следующий вид: $a\Sigma.\Sigma\to aa.\Sigma\Sigma\to aa.a\Sigma\Sigma\to aa.aa\Sigma\Sigma\to\ldots$ Здесь на каждом шаге применялся терм $a\Sigma\Sigma$, при этом всегда получался префикс aa, к которому применим только терм $a\Sigma\Sigma$. Бесконечная последовательность таких шагов дает обратное сверхслово $a^{-\omega}\Sigma\Sigma$. Поочередное применение термов b и $a\Sigma\Sigma$ дает последовательность $a\Sigma.\Sigma\to a.b\Sigma\to a\Sigma.ab\Sigma\to a.bab\Sigma\to a\Sigma.abab\Sigma\to a.babab\Sigma\to\ldots$, которая в итоге приводит к обратному сверхслову $(ab)^{-\omega}\Sigma$. Аналогично можно получить последовательность $a\Sigma.\Sigma \to a.b\Sigma \to a\Sigma.ab\Sigma \to aa.\Sigma ab\Sigma \to aa.a\Sigma ab\Sigma \to \ldots$, в итоге дающую $a^{-\omega}\Sigma ab\Sigma$. Здесь на первом шаге применялся терм b, на втором и последующих — терм $a\Sigma\Sigma$.

Начиная с терма b и применяя его на каждом шаге, получаем $.b \to .bb \to .bbb \to \ldots$, что дает $b^{-\omega}$. Здесь выражение $.b$ равносильно $\Sigma.b$, и к префиксу Σ применимы все первичные термы.

Для получения $-\omega$-регулярного выражения, задающего множество всех обратных сверхслов, принадлежащих $\wp(R)$, на основе описанной выше техники строится граф. При этом нет необходимости на каждом шаге записывать весь получившийся суффикс, достаточно оставлять только последний полученный символ. Вершины этого графа соответствуют словам вида $p\sigma$, где $\sigma \in \Sigma'$, p — префикс некоторого первичного терма, который назовем префиксом вершины. Из вершины, соответствующей слову $p_1\sigma_1$, в вершину, соответствующую слову $p_2\sigma_2$, ведет дуга, отмеченная символом σ_2, тогда и только тогда, когда существует первичный терм, применение которого к префиксу p_1 дает слово $p_2\sigma_2$. Выполнение одного шага для слова, которому соответствует некоторая вершина графа, буем называть элементарным продолжением этого слова. Граф строится, начиная с вершин, соответствующих всем первичным термам, путем применения к префиксу каждой вершины всех применимых к нему первичных термов. Вершины, соответствующие первичным термам, назовем начальными. Построенный таким образом граф назовем графом элементарных продолжений.

Построим граф элементарных продолжений для рассматриваемого примера.

Исходный граф содержит две вершины. Пусть вершина 1 соответствует слову $\Sigma.b$, а вершина 2 — слову $a\Sigma.\Sigma$. К префиксу Σ вершины 1 применимы оба первичных терма: b и $a\Sigma\Sigma$. В результате применения первого из них получаем дугу, ведущую в вершину 1 и отмеченную символом b. Применение второго дает дугу, ведущую в вершину 2 и отмеченную символом Σ. Применение первичных термов к префиксу $a\Sigma$ вершины 2 приводит к появлению новой вершины 3, соответствующей слову $aa.\Sigma$, и вершины 4, соответствующей слову $a.b$. Дуги, ведущие из вершины 2 в вершины 3 и 4, отмечены соответственно символами Σ и b. К префиксам aa и a этих вершин применим только терм $a\Sigma\Sigma$, поэтому из вершины 3 выходит лишь одна дуга, ведущая в вершину 5, соответствующую слову $aa.a$, а из вершины 4 — дуга, ведущая в вершину 6, соответствующую слову $a\Sigma.a$. Из вершины 5 выходит одна дуга, ведущая в нее, а из вершины 6 выходят две дуги, ведущие в вершины 3 и 4. Как уже отмечалось, все дуги, ведущие в некоторую вершину, отмечаются последним символом слова, которому она соответствует. На этом процесс построения графа элементарных продолжений заканчивается.

При переходе от полученного таким образом графа к соответствующему $-\omega$-регулярному выражению часто полезно отождествлять эквивалентные вершины графа. Две вершины называются эквивалентными, если между выходящими из них дугами имеется такое взаимно-однозначное соответствие, что соответствующие дуги отмечены одним и тем же символом и ведут в одни и те же вершины, т.е. если префиксы этих вершин совпадают. Так, в построенном графе вершина 2 эквивалентна вершине 6, а вершина 3 — вершине 5. После отождествления эквивалентных вершин, получим граф, приведенный на рис. 1.

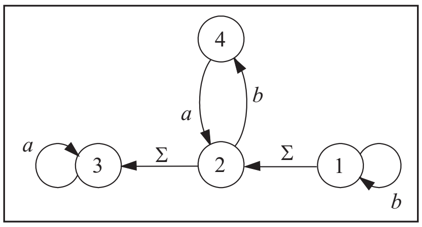

Рис. 1

Если из вершины q дуги ведут в эквивалентные вершины, которые соответствуют словам $p\sigma_1$ и $p\sigma_2$, то после их объединения, дуга, ведущая из вершины q в полученную вершину, отмечается парой символов (σ_1, σ_2).

Каждая вершина q графа определяет множество обратных сверхслов в алфавите Σ'. Процесс построения такого обратного сверхслова состоит в последовательном порождении его символов, начиная с последнего символа слова, которому соответствует вершина q, и продолжается влево в соответствии с движением по дугам, выходящим из вершин. Порождаемые символы являются отметками дуг, по которым осуществляется движение. Так, в приведенном графе пути 2, 4, 2, 3, 3, … соответствует суффикс $a\Sigma ab\Sigma$ обратного сверхслова. Каждое такое обратное сверхслово называется допустимым продолжением слова, которому соответствует вершина q. Множество всех обратных сверхслов, принадлежащих $\wp(R)$, представляет собой объединение всех допустимых продолжений слов, которым соответствуют начальные вершины или вершины, полученные в результате объединения других вершин с начальной.

В задаваемом графом $-\omega$-регулярном выражении каждому циклу в графе соответствует либо выражение вида r^*, либо периодическое обратное сверхслово $r^{-\omega}$. Таким образом, получаем $\wp(R) = a^{-\omega}\Sigma(ab)^*\Sigma b^* \cup (ab)^{-\omega}\Sigma b^* \cup b^{-\omega}$.

Утверждение 5. Если применение двух различных первичных термов: r_1 и r_2 к префиксу p некоторой вершины в графе элементарных продолжений дает $\Sigma^{-\omega}r_1 \cap \Sigma^{-\omega}p \subseteq \Sigma^{-\omega}r_2 \cap \Sigma^{-\omega}p$, то терм r_1 применять не следует.

Очевидно, что множество допустимых продолжений для вершины, соответствующей слову $r_1 \cap p$, содержится во множестве допустимых продолжений для вершины, соответствующей $r_2 \cap p$.

Некоторые достаточные условия префиксной замкнутости.

Утверждение 6. Множество $(r_1 \vee r_2 \vee \dots)^{-\omega}$, где $r_1, r_2, \dots \in \Sigma^*$, является ПЗ, если каждый непустой префикс каждого первичного терма принадлежит этому множеству первичных термов.

Таким образом, множества $a^{-\omega}$ и $(a \vee ab \vee abc)^{-\omega}$ ПЗ. Это справедливо и для бесконечного количества первичных термов, например, множества $(a\Sigma^*)^{-\omega} = (a \vee a\Sigma \vee a\Sigma\Sigma \vee \dots)^{-\omega}$ и $(ab(cb)^* \cup a(bc)^*)^{-\omega} = (a \vee ab \vee abc \vee abcb \vee abcbc \vee \dots)^{-\omega}$ префиксно замкнутые.

Рассмотрим примеры использования утверждения 6.

Определим $\wp((a \vee ab \vee bc)^{-\omega})$. Префикс обратного сверхслова из этого множества, заканчивающийся на *bc*, должен заканчиваться на *abc* (в силу наличия только одного первичного терма, заканчивающегося на *b*). Таким образом, терм *bc* можно заменить термом *abc*, что дает множество первичных термов, удовлетворяющее утверждению 6, следовательно, $\wp((a \vee ab \vee bc)^{-\omega}) = (a \vee ab \vee abc)^{-\omega}$.

Пусть $R = \Sigma^{-\omega}(a \vee ab \vee cbc)$. Терм *cbc* имеет префикс *cb*, однако не существует первичного терма, применимого к нему, поэтому терм *cbc* можно удалить. В результате имеем $\wp(R) = (a \vee ab)^{-\omega}$.

Можно ослабить условие префиксной замкнутости: множество R ПЗ, если каждый непустой префикс каждого первичного терма из $T(R)$ можно представить в виде конкатенации имеющихся первичных термов, например, множество $(acab \vee a \vee ac)^{-\omega}$ ПЗ.

Пусть $R \subseteq \Sigma^{-\omega}$ и $R_1 \subseteq R$. Множество R_1 называется префиксно замкнутым в R, если каждый префикс каждого его обратного сверхслова принадлежит R, т.е.

$\mathrm{Pref}\,(R_1) \subseteq R$. Аналогично определяется понятие префиксной замкнутости множества $R_1 \subseteq R$ в $R \subseteq \Sigma^*$. Очевидно, что если множество R_1 ПЗ, то оно ПЗ в R.

Приведем утверждение, позволяющее использовать это понятие при построении $\wp(R)$ для R вида $\Sigma^{-\omega}(R_1 \cup R_2)$.

Утверждение 7. Пусть $R = \Sigma^{-\omega}(R_1 \cup R_2)$ или $R = (R_1 \cup R_2)^{-\omega}$, где R_1, $R_2 \subseteq \Sigma^*$, тогда:

— если $(R_1)^{-\omega}$ и $(R_2)^{-\omega}$ ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^{-\omega}$, а $(R_1)^*$ и $(R_2)^*$ не ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^*$, то $\wp((R_1 \cup R_2)^{-\omega}) = (R_1)^{-\omega} \cup (R_2)^{-\omega}$;

— если $(R_1)^{-\omega}$ и $(R_2)^{-\omega}$ ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^{-\omega}$ и $(R_1)^*$ ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^*$, а $(R_2)^*$ не ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^*$, то $\wp((R_1 \cup R_2)^{-\omega}) = (R_1)^{-\omega} \cup (R_2)^{-\omega}(R_1)^*$;

— если $(R_1)^*$ и $(R_2)^*$ ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^*$, то $\wp((R_1 \cup R_2)^{-\omega}) = ((R_1)^*(R_2)^*)^{-\omega}$.

Пример 3. Пусть $R = (R_1 \cup R_2)^{-\omega}$, где $R_1 = cab$, $R_2 = a \vee ab \vee abc$. Множество R_2 ПЗ и, следовательно, $(R_2)^*$ и $(R_2)^{-\omega}$ ПЗ соответственно в $(R_1 \cup R_2)^*$ и $(R_1 \cup R_2)^{-\omega}$. Множество $(R_1)^*$ не ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^*$, поскольку префикс c не принадлежит этому множеству, однако $(R_1)^{-\omega}$ ПЗ в $(R_1 \cup R_2)^{-\omega}$, так как $(cab)^{-\omega} = (abc)^{-\omega}ab$ и каждый его префикс принадлежит $(R)^{-\omega}$. Таким образом, $\wp(R) = (cab)^{-\omega}(a \vee ab \vee abc)^* \cup (a \vee ab \vee abc)^{-\omega}$.

4. РАСШИРЕНИЕ МЕТОДА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПРОДОЛЖЕНИЙ

Естественное распространение метода элементарных продолжений на формулы, имеющие вид, отличный от $\Sigma^{-\omega}R$, получается, если термы рассматривать как множества обратных сверхслов. При этом всякий терм должен заканчиваться символом из Σ'. Применимость терма к префиксу определяется так же, как и раньше. Так, для формулы $\Sigma^{-\omega}(a \vee b)$ имеем два первичных терма: $\Sigma^{-\omega}a$ и $\Sigma^{-\omega}b$, применимых к префиксу $\Sigma^{-\omega}$ каждого из них. В результате элементарных продолжений этих термов получим граф с двумя эквивалентными вершинами, объединив которые, получим $(a^*b^*)^{-\omega} = (a \vee b)^{-\omega}$. Можно рассматривать один первичный терм $\Sigma^{-\omega}(a \vee b)$, применимый к своему префиксу $\Sigma^{-\omega}$. Его элементарное продолжение дает граф из одной вершины с петлей, отмеченной парой (a, b).

Пусть $R = \Sigma^{-\omega}a \cup (ab)^{-\omega}$, здесь имеем два первичных терма: $\Sigma^{-\omega}.a$ и $(ab)^{-\omega}a.b$. К префиксу первого из них применимы оба первичных терма, а к префиксу второго — только первый. В результате получаем граф с тремя вершинами, которому соответствует $-\omega$-регулярное выражение $a^{-\omega} \cup (ab)^{-\omega}a^*$. Заметим, что применение первичного терма к префиксу обратного сверхслова, например $(ab)^{-\omega}a.b$, не изменяет обратное сверхслово, а изменяет только рассматриваемый префикс.

Приведем еще один пример. Пусть $R = (ab \vee ba)^{-\omega}$. Здесь в качестве первичных термов можно рассматривать $\Sigma^{-\omega}a.b$ и $\Sigma^{-\omega}b.a$ или $(ab \vee ba)^{-\omega}a.b$ и $(ab \vee ba)^{-\omega}b.a$. Элементарные продолжения в обоих случаях дают один и тот же результат: $\wp(R)=(ab)^{-\omega}\cup(ba)^{-\omega}$. В таком виде метод элементарных продолжений применим к любому $-\omega$-регулярному выражению, не содержащему оператора конечной итерации. При наличии такого оператора получается граф с бесконечным количеством вершин, однако, как будет показано, и с таким графом иногда можно работать.

Пример 4. Построим $\wp(R)$, где $R=\Sigma^{-\omega}(a\cup a\Sigma^{*}b)$. Выражение $a\Sigma^{*}b$ будем рассматривать как множество первичных термов $\{ab, a\Sigma b, a\Sigma\Sigma b, \dots\}$.

Для преобразования исходного выражения удобно использовать следующий прием.

Обозначим $|r|$ длину терма r. Если $k\geq|r|-1$, то замена терма r в исходном $-\omega$-регулярном выражении множеством всех возможных его k-продолжений приводит к эквивалентной задаче.

Рассмотрим продолжения первичных термов вида $a\Sigma^{k}b$ $(k>0)$. К префиксу $a\Sigma^{k}$ применим терм a, а из термов, принадлежащих $a\Sigma^{*}b$, достаточно (в силу утверждения 5) применить терм $a\Sigma^{k-1}b$, что приводит к замене в префиксе последнего Σ символами a или b и переходу к префиксу $a\Sigma^{k-1}$. Здесь на каждом шаге будем сразу объединять получающиеся эквивалентные состояния графа. Таким образом, $(k+1)$-продолжение терма $a\Sigma^{k}b$ равно $a(a\vee b)^{k}b$. Например,

$$a\Sigma\Sigma\Sigma.b\to a\Sigma\Sigma.(a\vee b)b\to a\Sigma.(a\vee b)(a\vee b)b\to a.(a\vee b)^{3}b\to.a(a\vee b)^{3}b,$$

т.е. 4-продолжение этого терма равно $a(a\vee b)^{3}b$. Построив $(k+1)$-продолжения для всех термов вида $a\Sigma^{k}b$ $(k\geq 0)$ и заменив ими эти термы, получим $ab\cup a(a\vee b)b\cup a(a\vee b)^{2}b\cup a(a\vee b)^{3}b\cup\ldots=a(a\vee b)^{*}b$. Таким образом, $\wp(R)=$ $=\wp(\Sigma^{-\omega}(a\cup a(a\vee b)^{*}b))=\wp((a\cup a(a\vee b)^{*}b)^{-\omega})$. Легко видеть, что $(a(a\vee b)^{*}b)^{*}$ и a^{*} ПЗ в $(a\cup a(a\vee b)^{*}b)^{*}$, поэтому $\wp(R)=(a^{*}(a(a\vee b)^{*}b)^{*})^{-\omega}$.

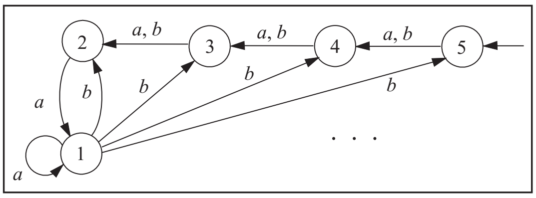

Рис. 2

Этот же результат получается из бесконечного графа элементарных продолжений, построенного для первичных термов $a, ab, a\Sigma b, a\Sigma\Sigma b, \ldots$ с учетом утверждения 5. Граф, полученный после объединения эквивалентных вершин, приведен на рис. 2.

Здесь перечисленным термам соответствуют вершины 1, 2, 3, 4 и т.д. Множество обратных сверхслов, задаваемое этим графом, имеет вид

$$(a^{*}(ab)^{*}(a(a\vee b)b)^{*}(a(a\vee b)(a\vee b)b)^{*}\ldots.)^{-\omega}=(a^{*}(a(a\vee b)^{*}b)^{*})^{-\omega}.$$

Пример 5. Построим $\wp(R)=\wp(\Sigma^{-\omega}(b\cup ca\cup ab\Sigma^{*}c))$.

Рассмотрим продолжения термов вида $ab\Sigma^{k}c$ $(k=1, 2, \ldots)$. К префиксу $ab\Sigma^{k}$ применим терм b, а из всех термов, принадлежащих $ab\Sigma^{k}c$, согласно утверждению 5 достаточно применять только терм $ab\Sigma^{k-1}c$, что дает $ab\Sigma^{k-1}.(b\vee c)c$. Кроме того, при $k>1$ к этому префиксу применим также терм ca, что дает $ab\Sigma^{k-2}c.ac$. Заметим, что длина терма $ab\Sigma^{k}c$ равна $k+3$, поэтому будем рассматривать $(k+2)$-продолжения таких термов. Так, 3-продолжение терма $ab\Sigma c$ равно $ab(b\vee c)c$; 4-продолжения терма $ab\Sigma\Sigma c$ равны $ab(b\vee c)^2 c$ и $abcac$; 5-продолжения терма $ab\Sigma\Sigma\Sigma c$ имеют вид $ab(b\vee c)^3 c$, $ab(b\vee c)cac$ и $abca(b\vee c)c$. Для упрощения записи k-продолжений $(b\vee c)$ обозначим α, а ca — β. Для термов $ab\Sigma^k c$ $(k\geq 0)$ их $(k+2)$-продолжения имеют вид $abR_k c$, где $R_0=\varepsilon$, $R_1=\alpha$ и для $k\geq 2$ $R_k=R_{k-2}\beta\cup R_{k-1}\alpha$. Заменив каждый терм вида $ab\Sigma^k c$ множеством его $(k+2)$-продолжений, получим $abc\cup ab\alpha c\cup ab(\beta\vee\alpha^2)c\cup ab(\alpha\beta\cup(\beta\vee\alpha^2)\alpha)\cup\ldots$ Нетрудно показать, что $\bigcup\limits_{k\geq 0}R_k=(\alpha\vee\beta)^*$. Таким образом, получим $\wp((b\cup ca\cup ab(b\vee c\vee ac)^* c)^{-\omega})$.

Применение к префиксу терма ca всех термов из $ab\Sigma^* c$ приводит к бесконечному множеству термов вида $ab\Sigma^k ca$ $(k\geq 0)$. Множество $(k+2)$-продолжений этих термов, определяется выражением $b(b\vee c\vee ca)^* ca$. В результате задача сводится к построению $\wp((b^*(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^*(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^*)^{-\omega})$.

Можно показать, что множества $(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^{-\omega}$ и $(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^{-\omega}$ префиксно замкнутые в $R=((b^*(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^*(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^*)^{-\omega})$, а множества слов $(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^*$ и $(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^*$ не ПЗ в $(b^*(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^*(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^*)^*$.

Таким образом,

$$\wp(R)=(ab(b\vee c\vee ca)^* c)^{-\omega}b^*\cup(b(b\vee c\vee ca)^* ca)^{-\omega}b^*\cup b^{-\omega}.$$

5. ФОРМУЛЫ, ИМЕЮЩИЕ ПОДФОРМУЛЫ С ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Рассмотрим формулы, имеющие подформулы, содержащие две свободные переменные, т.е. подформулы вида $\exists t_2(t_1<t_2\leq t)F(t_2)$ и $\forall t_2(t_1<t_2\leq t)\to F(t_2)$. Например, $F(t)=\forall t_1(t_1\leq t)\to(F_1(t_1)\vee\forall t_2(t_1<t_2\leq t)\to F_2(t_2))$. Каждую такую формулу охарактеризуем тройкой параметров $Q_1Q_2\rho$, где Q_1, Q_2 — соответственно внешний и внутренний кванторы в формуле, а $\rho\in\{\vee,\&\}$. Так, приведенная выше формула характеризуется тройкой $\forall\,\forall\vee$. Для каждой такой формулы определим $R(F(t))$.

1. Начнем с формулы вида $\exists t_1(t_1\leq t-k)F_1(t_1)(\forall t_2(t_1<t_2\leq t)\to F_2(t_2))$, которая характеризуется тройкой $\exists\forall\&$. Для описания множеств обратных сверхслов, задаваемых такими формулами введем бинарную операцию $\Im$.

Пусть $P,Q\subseteq\Sigma^{-\omega}$, $P\Im Q=\{x\in\Sigma^{-\omega}\mid x=vu, v\in P, u\in\Sigma^*$, такое, что для каждого непустого его префикса u' $vu'\in Q\}$. Как правило, Q имеет вид $\Sigma^{-\omega}R$.

Тогда $R(\exists t_1(t_1\leq t-k)F_1(t_1)(\forall t_2(t_1<t_2\leq t)\to F_2(t_2)))=R(F_1(t))\Im R(F_2(t))$, где $F_1(t)$, $F_2(t)$ — формулы с одной свободной переменной и $k\geq 0$. При этом $|u|\geq k$, где $|u|$ — длина слова u. Заметим, что u может совпадать с ε при $k=0$. Подобная операция, соответствующая оператору $\varphi U\psi$ темпоральной логики LTL, рассмотрена в [5].

Пример 6. Пусть $F(t)=\exists t_1(t_1\leq t)a(t_1)(\forall t_2(t_1<t_2\leq t)\to b(t_2))$. Здесь $R(F_1(t))=\Sigma^{-\omega}a$, $R(F_2(t))=\Sigma^{-\omega}b$, $R(F(t))=\Sigma^{-\omega}a\Im\Sigma^{-\omega}b=\Sigma^{-\omega}ab^*$. Каждое обратное сверхслово, принадлежащее $R(F(t))$, имеет вид vu, где $v\in\Sigma^{-\omega}a$, $u\in b^*$ и для каждого непустого префикса u' слова из b^* $vu'\in\Sigma^{-\omega}b$.

Пример 7. Пусть $F(t)=\exists t_1(t_1\leq t)(\forall t_2(t_2\leq t_1)\to a(t_2))(\forall t_3(t_1<t_3\leq t)\to$ $\to b(t_3))$. Здесь $R(F_1(t))=\wp(\Sigma^{-\omega}a)=a^{-\omega}$, $R(F_2(t))=\Sigma^{-\omega}b$, $R(F(t))=a^{-\omega}\Im\Sigma^{-\omega}b=$

$= a^{-\omega} b^*$, каждое обратное сверхслово, принадлежащее $R(F(t))$, имеет вид vu, где $v = a^{-\omega}$, $u \in b^*$.

2. Формула вида $\exists \forall \vee$, т.е. $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t)(F_1(t_1) \vee \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow \rightarrow F_2(t_2))$. Имеем $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) F_1(t_1) \vee \exists t_1 (t_1 \le t)(\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow F_2(t_2))$. Здесь $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega}$, поскольку $\exists t_1 (t_1 \le t)(\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow F_2(t_2)) = 1(t)$, так как при $t_1 = t$ значение этой формулы равно 1. Для $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t-1)(F_1(t_1) \vee \vee \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow F_2(t_2))$ заметим, что $\exists t_1 (t_1 \le t-1)(\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow \rightarrow F_2(t_2)) = F_2(t)$, поэтому $R(F(t)) = R(F_2(t)) \cup R(F_1(t)) \Sigma^* \Sigma$.

3. Формула вида $\exists \exists \&$, т.е. $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) F_1(t_1) \& \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) F_2(t_2)$. Можно показать, что $F(t)$ равносильна формуле $\exists t_1 (t_1 \le t) F_2(t_1) \exists t_2 (t_2 \le t_1 - 1) F_1(t_2)$. В обоих случаях $R(F(t)) = (R(F_1(t)) \Sigma^+ \cap R(F_2(t))) \Sigma^*$.

4. Формула вида $\exists \exists \vee$, т.е. $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t)(F_1(t_1) \vee \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) F_2(t_2))$. Показано, что $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) F_1(t_1) \vee \exists t_1 (t_1 \le t) \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) F_2(t_2) = = \exists t_1 (t_1 \le t)(F_1(t_1) \vee F_2(t_1))$. Таким образом, $R(F(t)) = (R(F_1(t)) \cup R(F_2(t))) \Sigma^*$.

5. Формула вида $\forall \forall \&$, т.е. $F(t) = \forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow (F_1(t_1) \& \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow \rightarrow F_2(t_2))$.

Имеем $F(t) = \forall t_1 ((t_1 \le t) \rightarrow F_1(t_1)) \& \forall t_1 ((t_1 \le t) \rightarrow (\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow F_2(t_2)))$. Несложно показать, что формула $\forall t_1 (t_1 \le t-k) \rightarrow (\forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow F_2(t_2))$ при всех значениях $k \ge 0$ равносильна $\forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow F_2(t_1)$. Таким образом, получим $R(F(t)) = \wp(R(F_1(t))) \cap \wp(R(F_2(t)))$.

6. Формула вида $\forall \forall \vee$, т.е. $F(t) = \forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow (\alpha(t_1) \vee \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \rightarrow \beta(t_2))$.

Рассмотрим случай, когда $\alpha(t)\beta(t) = 0$. При этом формула $F(t)$ равносильна формуле $F_1(t) = \forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow (\alpha(t_1 - 1) \vee \beta(t_1))$ в том смысле, что $R(F_1(t)) = R(F(t))$.

Построив последовательности значений, которые принимают эти формулы при $t_1 = t, t-1, t-2, \ldots$, несложно убедиться, что бесконечные конъюнкции этих значений для формул $F_1(t)$ и $F(t)$ совпадают. Действительно,

$$(\alpha(t-1) \vee \beta(t))(\alpha(t-2) \vee \beta(t-1)\beta(t))(\alpha(t-3) \vee \beta(t-2)\beta(t-1)\beta(t)) \ldots =$$
$$= (\alpha(t-1) \vee \beta(t))(\alpha(t-2) \vee \beta(t-1))(\alpha(t-3) \vee \beta(t-2)) \ldots,$$

что можно легко показать индукцией по количеству сомножителей. Таким образом, $R(F_1(t)) = \wp(R_1 \Sigma \cup R_2)$, где $R_1 = R(\alpha(t))$ и $R_2 = R(\beta(t))$.

7. Формула вида $\forall \exists \&$, т.е. $F(t) = \forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow (\alpha(t_1) \& \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) \beta(t_2))$. Имеем $F(t) = (\forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow \alpha(t_1)) \& (\forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) \beta(t_2))$. Поскольку при $t_1 = t$ формула $\forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) \beta(t_2)$ принимает значение 0, то $F(t) = 0(t)$, т.е. $R(F(t)) = \varnothing$.

Для $F(t) = \forall t_1 (t_1 \le t-1) \rightarrow (\alpha(t_1) \& \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) \beta(t_2))$ соответственно имеем $R(F_1(t)) = \wp(R(\alpha(t))) \Sigma \cap \wp(R(\beta(t)))$.

8. Формула вида $\forall \exists \vee$, т.е. $F(t) = \forall t_1 (t_1 \le t) \rightarrow (\alpha(t_1) \vee \exists t_2 (t_1 < t_2 \le t) \beta(t_2))$.

Конъюнкция значений формулы для $t_1 = t, t-1, t-2, \ldots$ имеет вид

$$\alpha(t) \& (\alpha(t-1) \vee \beta(t)) \& (\alpha(t-2) \vee \beta(t-1) \vee \beta(t)) \&$$
$$\& (\alpha(t-3) \vee \beta(t-2) \vee \beta(t-1) \vee \beta(t)) \&$$
$$\& (\alpha(t-4) \vee \beta(t-3) \vee \beta(t-2) \vee \beta(t-1) \vee \beta(t)) \& \ldots$$

Раскрыв скобки и выполнив поглощения, получим

$$F(t) = \alpha(t)\alpha(t-1)\alpha(t-2)\alpha(t-3)\alpha(t-4) \ldots \vee \alpha(t)\beta(t) \vee \alpha(t)\alpha(t-1)\beta(t-1) \vee$$
$$\vee \alpha(t)\alpha(t-1)\alpha(t-2)\beta(t-2) \vee \alpha(t)\alpha(t-1)\alpha(t-2)\alpha(t-3)\beta(t-3) \vee \ldots,$$

чему соответствует $R(F(t)) = \wp(R(\alpha(t))) \cup (R(\alpha(t)) \cap R(\beta(t))) \Im R(\alpha(t))$, например, если $\alpha(t) = a(t) \vee c(t)$, $\beta(t) = b(t) \vee c(t)$, то $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega} c(a \vee c)^* \cup$ $\cup\, (a \vee c)^{-\omega}$. Очевидно, что при $R(\alpha(t)) \cap R(\beta(t)) = \varnothing$ $R(F(t)) = \wp(R(\alpha(t)))$.

6. ПОСТРОЕНИЕ МНОЖЕСТВА $P \Im Q$

Рассмотрим применение метода элементарных продолжений при вычислении значения $R(F(t))$ для формул $F(t)$ вида $\exists t_1 (t_1 \le t - k) F_1(t_1) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to F(t_2)$, где $k \ge 0$. Первичные термы для $R(F_1(t))$ и $R(F_2(t))$ называются соответственно заключительными и основными. Заключительный терм может применяться только один раз, завершая процесс построения продолжения. Начало процесса зависит от значения k в формуле $F(t)$. При $k = 0$ в качестве исходного терма можно использовать любой терм. При $k = 1$ исходным термом может быть только основной терм. При $k = 2$ заключительный терм может применяться не ранее второго шага и т.д. Это определяется множеством исходных значений переменной t_2: при $k = 0$ оно пусто, при $k = 1$ состоит из одного значения $\{t\}$, при $k = 2$ равно $\{t - 1, t\}$ и т.д. Допускаются только конечные процессы элементарных продолжений, заканчивающиеся применением заключительного терма. Процесс, начинающийся заключительным термом, на нем и заканчивается. Если заключительный терм не может быть применен, такой процесс называется недопустимым.

Пример 8. Пусть $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) a(t_1) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to b(t_2)$. Для этой формулы $R(F(t)) = R(F_1(t)) \Im R(F_2(t))$, где $R(F_1(t)) = \Sigma^{-\omega} a$, $R(F_2(t)) = \Sigma^{-\omega} b$. Здесь основной терм — b, заключительный — a.

Начиная процесс продолжения с заключительного терма, получаем $\Sigma^{-\omega} a$. Начиная с основного терма, в зависимости от того, когда будет применен заключительный терм, получаем $.b \to .ab$, $.b \to .bb \to .abb$, $.b \to .bb \to .bbb \to .abbb$ и т.д. В результате $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega} ab^*$. Очевидно, что $v \in \Sigma^* a$, $u \in b^*$.

Пример 9. Пусть $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) c(t_1) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to (a(t_2 - 1) b(t_2) \vee$ $\vee\, b(t_2 - 1) a(t_2))$, здесь $R(F_1(t)) = \Sigma^{-\omega} c$, $R(F_2(t)) = \Sigma^{-\omega}(ab \vee ba)$. Таким образом, $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega} c \Im \Sigma^{-\omega}(ab \vee ba)$. Заключительный терм — c, основные термы — ab и ba. Начиная процесс продолжения с заключительного терма, получаем $\Sigma^{-\omega} c$. Если этот процесс начинается с основного терма, то заключительный терм никогда не может быть применен. Например, $b.a \to a.ba \to b.aba \to \ldots$ и т.д. Такой процесс недопустим. В результате получим $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega} c$.

Отсюда следует, что если в рассматриваемой формуле ограничение квантора $\exists t_1$будет иметь вид $(t_1 \le t - k)$, то при $k > 0$ $R(F(t)) = \varnothing$.

Пример 10. Пусть $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) \forall t_2 (t_2 < t_1) \to c(t_2)) \forall t_3 (t_1 < t_3 \le t) \to$ $\to (a(t_3 - 1) b(t_3) \vee b(t_3 - 1) a(t_3))$, $R(F_1(t)) = c^{-\omega} \Sigma$, $R(F_2(t)) = \Sigma^{-\omega}(ab \vee ba)$. Здесь заключительный терм равен $c^{-\omega} \Sigma$, основные термы — ab и ba.

Начиная процесс с заключительного терма, получаем $c^{-\omega} \Sigma$. В зависимости от того, с какого основного терма начнется процесс, и от значения четности номера шага, на котором будет применен заключительный терм, можно получить любое обратное сверхслово, принадлежащее таким множествам: $c^{-\omega}(ab)^+$, $c^{-\omega}(ba)^+$, $c^{-\omega}(ab)^+ a$, и $c^{-\omega}(ba)^+ b$. Приведем пример одного из таких процессов: $a.b \to b.ab \to a.bab \to c^{-\omega}.abab$.

Пример 11. Пусть $F(t) = \exists t_1 (t_1 \le t) b(t_1) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to (a(t_2 - 1) b(t_2) \vee$ $\vee\, b(t_2 - 1) a(t_2))$. Здесь заключительный терм — b, основные термы — ab и ba.

Применение вначале заключительного терма дает $\Sigma^{-\omega}b$. Если процесс продолжений начинается с $b.a$, то заключительный терм может быть применен только на нечетном шаге, например, $b.a \to a.ba \to b.aba \to .baba$, что дает все обратные сверхслова из $\Sigma^{-\omega}b(ab)^* a$. Если процесс начинать с $a.b$, заключительный терм может быть применен только на четном шаге, например, $a.b \to b.ab \to a.bab \to b.abab \to .babab$, что дает все обратные сверхслова из $\Sigma^{-\omega}b(ab)^+$. В результате $R(F(t)) = \Sigma^{-\omega}b(ab)^* \cup \Sigma^{-\omega}b(ab)^* a$.

Нетрудно проверить, как изменяется результат при различных значениях k в ограничении первого квантора.

Пример 12. Пусть формула $F(t)$ имеет вид

$$\exists t_1 (t_1 \le t-1) c(t_1-1) b(t_1) \forall t_2 ((t_2 < t_1) \to c(t_2)) \forall t_3 (t_1 < t_3 \le t) \to$$
$$\to (a(t_3-1)b(t_3) \vee b(t_3-1)a(t_3)).$$

Здесь $c^{-\omega}b$ — заключительный терм, ab и ba — основные термы.

Процесс не может начинаться с заключительного терма. Рассмотрим примеры продолжений, начинающихся основными термами:

$$b.a \to a.ba \to b.aba \to a.baba \to b.ababa \to c^{-\omega}bababa,$$

$$a.b \to b.ab \to a.bab \to b.abab \to c^{-\omega}babab.$$

В результате имеем $R(F(t)) = c^{-\omega}(ba)^+ \cup c^{-\omega}(ba)^+ b$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача построения по формуле вида $F(t)$ логики LP задаваемого ею множества обратных сверхслов, представленного $-\omega$-регулярным выражением. Наиболее просто эта задача решается для формул без кванторов. В этом случае имеется естественное соответствие между операциями, с помощью которых строятся формулы, и операциями языка $-\omega$-регулярных выражений. Для описания множеств обратных сверхслов, соответствующих кванторным подформулам, введены две операции над $-\omega$-регулярными множествами: $\wp(R)$, соответствующая подформуле $\forall t_1 (t_1 \le t) \to F(t_1)$, и $P\Im Q$, соответствующая подформуле $\exists t_1 (t_1 \le t) F_1(t) \forall t_2 (t_1 < t_2 \le t) \to F_2(t_2)$. Операция $\wp(R)$ определяет максимальное префиксно замкнутое подмножество множества R. Если выражение R не содержит операций конечной итерации, то для представления $\wp(R)$ в терминах операций языка $-\omega$-регулярных выражений предложен метод элементарных продолжений, который строит граф, задающий все обратные сверхслова из этого множества. Для перехода от полученного графа к $-\omega$-регулярному выражению построен алгоритм, который в виду ограниченного объема статьи здесь не приведен. Модификация метода элементарных продолжений применяется и для построения множества $P\Im Q$. Для множеств, задаваемых выражениями, содержащими операцию конечной итерации, показана возможность применения метода элементарных продолжений, приводящая к бесконечному графу с регулярной структурой. Однако в общем случае такой подход не годится.

В работе сформулирован ряд достаточных условий префиксной замкнутости множества, позволяющих легко получить $-\omega$-регулярное выражение для $\wp(R)$, не используя метод элементарных продолжений, даже в случае, когда он не применим. Иногда для перехода от формулы к $-\omega$-регулярному выражению ее следует преобразовать, применив равносильности, которые в работе приведены без доказательства.

Полученные в статье результаты позволяют строить $-\omega$-регулярные выражения для достаточно широкого класса формул языка LP. Кроме того, они легко распространяются на аналогичные формулы языка LF, а также на построение ω-регулярных выражений, соответствующих формулам темпоральной логики LTL.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чеботарев А.Н. Синтез Σ-автоматов, специфицированных в логических языках LP и LF. *Кибернетика и системный анализ.* 2018. Т. 54, № 4. С. 16–31.
2. Чеботарев А.Н. Определение фиктивных состояний в Σ-автомате, синтезированном по спецификации в языке LP. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 47–57.
3. Schneider K. Verification of reactive systems. Berlin; Heidelberg; Springer, 2004. 606 p.
4. Bresolin D., Montanari A., Puppis G. A theory of ultimately periodic languages and automata with an application to time granularity. *Acta Informatica*. 2009. Vol. 46. P. 331–360.
5. Cohen-Chesnot. J. On the expressive power of temporal logic for infinite words. *Theoretical Computer Science.* 1991. Vol. 83, Iss. 2. P. 301–312.

Надійшла до редакції 17.01.2020

А.М. Чеботарьов

ВІД ФОРМУЛ ВИГЛЯДУ $F(t)$ МОВИ LP ДО $-\omega$-РЕГУЛЯРНИХ ВИРАЗІВ

Анотація. Під час синтезу Σ-автомата, специфікованого мовою LP, виникає задача подання множини зворотних надслів, що задає формула $F(t)$, у вигляді $-\omega$-регулярного виразу. Побудова цього виразу базується на відповідності між структурними елементами формул і $-\omega$-регулярних виразів. Для забезпечення такої відповідності запроваджено дві додаткові операції над $-\omega$-регулярними множинами, що відповідають операціям квантифікації у формулах. Розглянуто методи подання цих операцій у термінах мови $-\omega$-регулярних виразів. Отримано результати, які дають можливість будувати відповідні $-\omega$-регулярні вирази для достатньо широкого класу формул вигляду $F(t)$ мови LP.

Ключові слова: логіка LP, зворотне надслово, обмежені справа формули, $-\omega$-регулярний вираз, префіксно замкнута множина зворотних надслів.

A.N. Chebotarev

FROM LP FORMULAS OF THE FORM $F(t)$ TO $-\omega$-REGULAR EXPRESSIONS

Abstract. In synthesis of a Σ-automaton specified in the language LP, the problem arises how to represent the set of left-infinite words defined by the formula $F(t)$ in the form of a $-\omega$-regular expression. Construction of this representation is based on the correspondence between structural components of formulas and $-\omega$-regular expressions. To provide such a correspondence, two additional operations on $-\omega$-regular sets relating to the operation of quantification in formulas are introduced. The paper focuses on the representation of these operations in terms of the $-\omega$-regular language. The results presented in this paper allow constructing $-\omega$-regular expressions for a wide class of LP formulas of the form $F(t)$.

Keywords: logic LP, left-infinite word, right-bounded formulas, $-\omega$-regular expression, prefix closed set of left-infinite words.

Чеботарев Анатолий Николаевич,
доктор техн. наук, ведущий научный сотрудник Института кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, Киев, e-mail: ancheb@gmail.com.