УДК 517.9

О.А. КАПУСТЯН, О.Г. НАКОНЕЧНИЙ

НАБЛИЖЕНЕ МІНІМАКСНЕ ОЦІНЮВАННЯ ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД РОЗВ'ЯЗКІВ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ З НЕЛІНІЙНИМ СПОСТЕРЕЖЕННЯМ

Анотація. Розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язку хвильового рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами та за умови, що спостереження є нелінійним (має оператор типу суперпозиції). Для значення малого параметра $\varepsilon > 0$ існування розв'язку вихідної задачі встановлюється за допомогою традиційного мінімаксного підходу. Перехід до задачі з усередненими параметрами дає змогу уникнути нелінійності у спостереженні. Основним результатом роботи є доведення того, що мінімаксна оцінка задачі з усередненими коефіцієнтами є наближеною мінімаксною оцінкою вихідної задачі.

Ключові слова: мінімаксне оцінювання, хвильове рівняння, швидко коливні коефіцієнти, усереднена задача, невизначеність, наближена оцінка.

ВСТУП

Розвиток сучасних технологій зумовлює розроблення нових ефективних алгоритмів розв'язування задач оцінювання, прогнозування, оптимізації, дослідження стійкості та аналізу систем, що функціонують за умов невизначеності та неповноти даних. Основи теорії керування системами, що описуються звичайними диференціальними рівняннями або рівняннями з частинними похідними, обґрунтовано в роботах [1–4]. Проте задачі мінімаксного оцінювання для нескінченновимірних систем досліджено недостатньо. Також виникає багато проблем у разі узагальнення задач оцінювання на випадок рівнянь із частинними похідними. З цією метою побудовано теорію мінімаксного оцінювання функціоналів від розв'язків рівнянь із частинними похідними, зокрема для параболічних та еліптичних рівнянь [5, 6]. Методами мінімаксної теорії оцінювання розв'язано низку задач прогнозування розв'язків рівнянь параболічного типу зі швидко коливними коефіцієнтами за даними вимірювань, зокрема [7].

У роботах [8–10] запропоновано та обґрунтовано процедуру побудови наближеного оптимального керування із зворотним зв'язком (синтезу) для широких класів розподілених процесів у мікронеоднорідних середовищах, які досліджувалися раніше в [11, 12]. У загальному випадку знайти точну формулу оптимального синтезу для таких задач не є можливим. Проте перехід до усереднених параметрів значно спрощує структуру задачі. На базі цього підходу було отримано наближену мінімаксну оцінку функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами для нелінійних спостережень [13].

У цій роботі розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язку хвильового рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами. Вимірюють не саму величину, яка описує досліджуване явище, а спостерігають деяке значення від розв'язку із оператором, що визначає спосіб вимірювання. Проблема ускладнюється не лише через наявність швидко коливних коефіцієнтів, а ще й через те, що спостереження має оператор типу суперпозиції. Тому виправданим є перехід до задачі з усередненими параметрами. Основним результатом роботи є доведення того, що мінімаксна оцінка задачі з усередненими коефіцієнтами є наближеною мінімаксною оцінкою вихідної задачі.

© О.А. Капустян, О.Г. Наконечний, 2020

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У циліндрі $Q_T = (0, T) \times \Omega$, де $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область, розглянемо задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y^\varepsilon}{\partial t^2} = \operatorname{div} (a^\varepsilon (x) \nabla y^\varepsilon) + f(t, x), \\ y^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\ y^\varepsilon|_{t=0} = y_0(x), \ \ y_t^\varepsilon|_{t=0} = y_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

де $a^\varepsilon (x) = a(x/\varepsilon)$, $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ — задана симетрична матриця.

Спостерігаємо функцію

$$\nu^\varepsilon (x) = \int_0^T C^\varepsilon (t, x, y^\varepsilon (t, x)) \cdot y^\varepsilon (t, x) dt + g(x), \tag{2}$$

де $C^\varepsilon = C^\varepsilon (t, x, \xi): (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — задана вимірна функція.

Функції $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_T)$ з (1), а також функція $g \in L^2(\Omega)$ з (2) — невідомі, проте відомо, що вони належать опуклій замкненій множині G з простору $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega)$:

$$\{y_0, y_1, f, g\} \in G = \{\alpha_0 || y_0 ||^2_{H_0^1} + \alpha_1 || y_1 ||^2 + \beta || f ||^2_{Q_T} + \gamma || g ||^2 \le 1\}. \tag{3}$$

Тут і надалі $||\cdot||$ та $(\cdot, \cdot)$ — відповідно норма і скалярний добуток в $L^2(\Omega)$; $||\cdot||_{H_0^1}$ — норма в $H_0^1(\Omega)$; $||\cdot||_{Q_T}$ та $(\cdot, \cdot)_{Q_T}$ — відповідно норма і скалярний добуток в $L^2(Q_T)$.

Розглянемо таку задачу мінімаксного оцінювання [1]: провести оцінювання функціоналу

$$l(y^\varepsilon) = \int_{Q_T} l(t, x) y^\varepsilon (t, x) \, dt dx, \tag{4}$$

де $l \in L^2(Q_T)$ — задана функція, y^ε — розв'язок задачі (1), у класі функціоналів від спостережень

$$\hat{\hat{l}}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon (x) u(x) dx, \ \ u \in L^2(\Omega), \tag{5}$$

де функція $\hat{u}^\varepsilon$ є розв'язком задачі

$$J^\varepsilon (u) := \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} (l(y^\varepsilon) - \hat{\hat{l}}(y^\varepsilon))^2 \to \inf. \tag{6}$$

При цьому значення (6)

$$\sigma_\varepsilon^2 := \inf_u J^\varepsilon (u) \tag{7}$$

називається похибкою мінімаксного оцінювання.

Раніше [13] нами був обґрунтований той факт, що через наявність швидко коливних коефіцієнтів у рівнянні та спостереженні, а також через специфічний вигляд оператора спостереження отримати точний розв'язок задачі мінімаксного оцінювання (1)–(6) неможливо. Для знаходження наближеного розв'язку задачі мінімаксного оцінювання (1)–(6) скористаємось підходом, обґрунтованим у роботі [13] для параболічного рівняння. Для цього підходу використана теорія усереднення диференціальних операторів [11].

Нехай a^0 — стала матриця, що є усередненою до $a^{\varepsilon}(x)$ [11]; $C^0 = C^0(t, x)$ — задана функція з простору $L^{\infty}(Q_T)$, яка не залежить від фазової змінної y і є усередненою функцією для $C^{\varepsilon}(t, x, \xi)$.

Розглянемо задачу (1) з диференціальним оператором div $(a^0 \nabla)$ і спостереженням $C^0(t, x)$. Існування та методи знаходження розв'язку відповідної задачі мінімаксного оцінювання добре відомі [1]. Нехай $\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ — розв'язок відповідної задачі (6). Основне питання, яке досліджується в цій статті, — чи буде оцінка

$$\hat{l}(y^{\varepsilon}) = \int_{\Omega} \nu^{\varepsilon}(x) \hat{u}^0(x) dx$$

для достатньо малих $\varepsilon > 0$ слугувати наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (1)–(6), тобто чи буде коректно, що $\forall \eta > 0$ $\exists \varepsilon_0 > 0$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ виконується нерівність

$$|\sigma_{\varepsilon}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon}^2| < \eta, \tag{8}$$

де

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = J^{\varepsilon}(\hat{u}^0) = \inf_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} ((l, y^{\varepsilon})_{Q_T} - (\nu^{\varepsilon}, \hat{u}^0))^2, \tag{9}$$

y^{ε} — розв'язок задачі (1), ν^{ε} має вигляд (2).

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ОЦІНЮВАННЯ

Спочатку доведемо розв'язність вихідної задачі (1)–(6). Вважатимемо, що симетрична матриця $a \in L^{\infty}(R^n)$ задовольняє умови еліптичності та обмеженості:

$$\exists \nu_1 > 0,\ \nu_2 > 0\ \ \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \ \forall \eta \in \mathbb{R}^n,\ \nu_1 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x) \eta_i \eta_j \le \nu_2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \tag{10}$$

Тоді оцінка (10) справедлива і для сталої матриці a^0, яка є усередненою до $a^{\varepsilon}(x)$ [11]. До того ж за виконання (10) для фіксованих $y_0 \in H_0^1(\Omega)$, $y_1 \in L^2(\Omega)$, $f \in L^2(Q_T)$ задача (1) має єдиний розв'язок y^{ε} у класі

$$W(0, T) = \{ y \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \mid y_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \}.$$

Теорема 1. Нехай функція $C^{\varepsilon}: (0, T) \times \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна за третім аргументом і обмежена. Тоді задача (1)–(6) має розв'язок, тобто існує така функція $\hat{u}^{\varepsilon}$, на якій досягається рівність (7).

Доведення. Для фіксованих u, y_0, y_1, f, g маємо

$$l(y^{\varepsilon}) - \hat{\hat{l}}(y^{\varepsilon}) = -(g, u) - (z_t^{\varepsilon}(0), y_0) + (z^{\varepsilon}(0), y_1) + (z^{\varepsilon}, f)_{Q_T},$$

де z^{ε} — розв'язок задачі

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 z^\varepsilon}{\partial t^2} = \operatorname{div}\,(a^\varepsilon(x)\nabla z^\varepsilon) + l - C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t,x)) \cdot u\,, \\
z^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \\
z^\varepsilon|_{t=T} = z_t^\varepsilon|_{t=T} = 0.
\end{cases} \tag{11}
$$

Оскільки функції $u \in L^2(\Omega)$ і $C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon) \in L^\infty(Q_T)$, то задача (11) має узагальнений розв'язок $z^\varepsilon \in W(0,T)$ [1].

Для фіксованого $u \in L^2(\Omega)$ задача максимізації в (6) має вигляд

$$
\begin{cases}
(-(g,u) - (z_t^\varepsilon(0),\, y_0) + (z^\varepsilon(0),\, y_1) + (z^\varepsilon, f)_{Q_T})^2 \to \sup, \\
\alpha_0 \|\, y_0 \,\|_{H_0^1}^2 + \alpha_1 \|\, y_1 \,\|^2 + \beta \|\, f \,\|_{Q_T}^2 + \gamma \|\, g \,\|^2 \le 1.
\end{cases} \tag{12}
$$

Оскільки $C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon)$ (а отже, і z^ε) залежить від $\{y_0, y_1, f\}$, то для (12) не існує явного розв'язку (на відміну від випадку, коли C^ε не залежить від y^ε [1]).

Проте функціонал $u \mapsto J^\varepsilon(u)$ є опуклим, неперервним, а отже, слабо напівнеперервним знизу; і для того, щоб існувала $\hat{u}^\varepsilon$ така, що

$$
\sigma_\varepsilon^2 = \inf_u J^\varepsilon(u) = J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon)\,,
$$

згідно з теоремою Веєрштраса [3] достатньо довести, що $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J^\varepsilon(u) = \infty$.

Зафіксуємо $u \in L^2(\Omega)$ і набір $\{y_0, y_1, f, g\} \in G$. Цим зафіксованим значенням відповідають розв'язок $y^\varepsilon(t,x)$ задачі (1) і розв'язок $z^\varepsilon(t,x)$ задачі (11) з правою частиною $C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t,x)) \cdot u(x)$. Розглянемо задачу (1)–(6) із фіксованою функцією $C^\varepsilon(t,x) := C^\varepsilon(t, x, y^\varepsilon(t,x))$. Згідно з [1] розв'язок задачі максимізації (12) у цьому випадку має вигляд

$$
\bar{y}_0^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\alpha_0} \Lambda^{-1} z_t^\varepsilon(0),\;\; \bar{y}_1^\varepsilon = \frac{\lambda}{\alpha_1} z^\varepsilon(0),\;\; \bar{f}^\varepsilon = \frac{\lambda}{\beta} z^\varepsilon,\;\; \bar{g}^\varepsilon = -\frac{\lambda}{\gamma} u\,,
$$

де Λ — канонічний ізоморфізм між $H_0^1(\Omega)$ та $H^{-1}(\Omega)$,

$$
\lambda^2 = \left(\frac{\|\, z_t^\varepsilon(0) \,\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\, z^\varepsilon(0) \,\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\, z^\varepsilon \,\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|\, u \,\|^2}{\gamma} \right)^{-1}.
$$

Розглянемо відображення $\Psi : G \to G$, $\Psi(y_0, y_1, f, g) = \{\bar{y}_0^\varepsilon, \bar{y}_1^\varepsilon, \bar{f}^\varepsilon, \bar{g}^\varepsilon\}$. Нехай

$\{y_0^k, y_1^k, f^k, g^k\} \to \{y_0, y_1, f, g\} \in G$ слабко в $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega)$.

Звідси для розв'язку задачі (1) з умовами f^k, y_0^k, y_1^k за теоремою про компактність [1] маємо

$$
y_k^\varepsilon \to y^\varepsilon \;\text{ в }\; C([0,T]; L^2(\Omega)) \;\text{ і слабко в }\; L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), \tag{13}
$$

$$
y_{kt}^\varepsilon \to y_t^\varepsilon \;\text{ в }\; C([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \;\text{ і слабко в }\; L^2(0,T; L^2(\Omega)), \tag{14}
$$

де $y^\varepsilon = y^\varepsilon(t,x)$ — розв'язок задачі (1) з умовами f, y_0, y_1.

Тоді з обмеженості C^{ε} і за теоремою Лебега отримуємо

$$C^{\varepsilon}(t, x, y_k^{\varepsilon}(t, x)) \to C^{\varepsilon}(t, x, y^{\varepsilon}(t, x)) \text{ в } L^2(Q_T). \tag{15}$$

Отже, для z_k^{ε} — розв'язку задачі (11) з y_k^{ε} відповідно до [14] маємо, що $z_k^{\varepsilon} \to z^{\varepsilon}$ у сенсі (13), (14), де $z^{\varepsilon} = z^{\varepsilon}(t, x)$ — розв'язок задачі (11) з y^{ε}. Звідси випливає, що

$$\Psi(y_0^k, y_1^k, f^k, g^k) \to \Psi(y_0, y_1, f, g) \text{ в } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega).$$

Отже, Ψ — неперервне відображення і $\Psi(G)$ — компакт. Тоді за теоремою Шаудера Ψ має нерухому точку, тобто $\exists \{\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{y}_1^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}\} \in G$:

$$\{\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{y}_1^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}\} = \Psi(\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{y}_1^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}, \hat{g}^{\varepsilon}).$$

Нехай $\hat{y}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (1), який відповідає $\hat{y}_0^{\varepsilon}, \hat{y}_1^{\varepsilon}, \hat{f}^{\varepsilon}$; $\hat{z}^{\varepsilon}$ — розв'язок задачі (11), який відповідає $\hat{y}^{\varepsilon}$. Тоді

$$\frac{\|\hat{z}_t^{\varepsilon}(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\hat{z}^{\varepsilon}(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\hat{z}^{\varepsilon}\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \le J^{\varepsilon}(u). \tag{16}$$

Отже, $\lim\limits_{\|u\| \to \infty} J^{\varepsilon}(u) = \infty$ і теорему доведено. □

ПРОЦЕДУРА ПОБУДОВИ ТА ОБҐРУНТУВАННЯ НАБЛИЖЕНОЇ ОЦІНКИ ДЛЯ ВИХІДНОЇ ЗАДАЧІ

Перейдемо до побудови та обґрунтування мінімаксної оцінки для задачі з усередненими параметрами. Нехай стала, додатно визначена матриця a^0 є усередненою для матриці $a^{\varepsilon}(x)$ [11], функція $C^0 = C^0(t, x) \in L^{\infty}(Q_T)$ така, що

$$\forall r > 0 \;\; C^{\varepsilon}(t, x, \xi) \to C^0(t, x), \;\; \varepsilon \to 0 \text{ в } L^2(Q_T) \text{ рівномірно по } |\xi| \le r. \tag{17}$$

Розглянемо задачу (1)–(6) з диференціальним оператором $A^0 = \operatorname{div}(a^0 \nabla)$ і спостереженням

$$\nu^0(x) = \int_0^T C^0(t, x) \cdot y(t, x) dt + g(x).$$

Відомо [1], що для фіксованого $u \in L^2(\Omega)$ розв'язок задачі

$$\begin{cases} (l(y) - \hat{\hat{l}}(y))^2 \to \sup, \\ \{y_0, y_1, f, g\} \in G \end{cases} \tag{18}$$

має вигляд

$$y_0 = -\frac{\lambda}{\alpha_0} \Lambda^{-1} z_t(0), \;\; y_1 = \frac{\lambda}{\alpha_1} z(0), \;\; f = \frac{\lambda}{\beta} z, \;\; g = -\frac{\lambda}{\gamma} u, \tag{19}$$

де

$$\lambda^2 = \left(\frac{\|z_t(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|z(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|z\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|u\|^2}{\gamma} \right)^{-1},$$

а z є розв'язком задачі

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2} = A^0 z + l - C^0 \cdot u, \\ z|_{\partial\Omega} = 0, \\ z|_{t=T} = 0, \ z_t|_{t=T} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Для значення задачі максимізації (18) маємо

$$J^0(u) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} (l(y) - \hat{\hat{l}}(y))^2 =$$

$$= \frac{\| z_t(0) \|^2_{H^{-1}}}{\alpha_0} + \frac{\| z(0) \|^2}{\alpha_1} + \frac{\| z \|^2_{Q_T}}{\beta} + \frac{\| u \|^2}{\gamma}. \tag{21}$$

Тоді задача

$$\sigma_0^2 = \inf_u J^0(u) \tag{22}$$

має єдиний розв'язок $\hat{u}^0$, який має вигляд

$$\hat{u}^0 = -\gamma \int_0^T C^0(t, x) p(t, x) dt, \tag{23}$$

де p є розв'язком системи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2} = A^0 p - \dfrac{1}{\beta} z, \\ \dfrac{\partial^2 q}{\partial t^2} = A^0 q - C^0 \hat{u}, \\ p|_{\partial\Omega} = 0, \ q|_{\partial\Omega} = 0, \\ p|_{t=0} = \dfrac{1}{\alpha_0} \Lambda^{-1} q_t(0), \ p_t|_{t=0} = -\dfrac{1}{\alpha_1} z(0), \\ q|_{t=0} = q_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Згідно із запропонованим раніше підходом [13] розглянемо функціонал

$$\hat{l}(y^\varepsilon) = \int_\Omega \nu^\varepsilon(x) \hat{u}^0(x) dx \tag{25}$$

($\hat{u}^0 \in L^2(\Omega)$ визначається з (23)) і похибку мінімаксного оцінювання

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = J^\varepsilon(\hat{u}^0) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} ((l, y^\varepsilon)_{Q_T} - (\nu^\varepsilon, \hat{u}^0))^2 \tag{26}$$

(y^ε — розв'язок задачі (1), спостереження ν^ε має вигляд (2)).

Наступна теорема є основним результатом роботи.

Теорема 2. За умови (17) оцінка (25) є наближеною мінімаксною оцінкою для вихідної задачі (1)–(6), а похибки (7) і (26) є близькими для достатньо малих $\varepsilon > 0$, тобто $\forall \eta > 0 \ \exists \varepsilon_0 > 0, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$| \sigma_\varepsilon^2 - \hat{\sigma}_\varepsilon^2 | < \eta. \tag{27}$$

Доведення. За теоремою 1 маємо

$$\sigma_\varepsilon^2 = \inf_u J^\varepsilon(u) = J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon).$$

Тоді

$$J^\varepsilon(\hat{u}^\varepsilon) \le J^\varepsilon(0) = \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} (l, y^\varepsilon)_{Q_T}^2, \qquad (28)$$

де y^ε — розв'язок задачі (1). Для $\forall \{y_0, y_1, f, g\} \in G$ для майже всіх (м.в.) t виконується рівність

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\| y_t^\varepsilon(t) \|^2 + (a^\varepsilon \nabla y^\varepsilon(t), \nabla y^\varepsilon(t))) = (f(t), y_t^\varepsilon(t)).$$

З цієї рівності, оцінки (10) та леми Гронуола виводимо, що

$$\forall \varepsilon \in (0,1) \sup_{\{y_0, y_1, f, g\} \in G} \sup_{t \in [0,T]} (\| y^\varepsilon(t) \|_{H_0^1}^2 + \| y_t^\varepsilon(t) \|^2) \le C, \qquad (29)$$

де константа $C > 0$ не залежить від ε.

З нерівностей (28), (29) і (16) отримуємо, що $\{\hat{u}^\varepsilon\}_{\varepsilon \in (0,1)}$ обмежена в $L^2(\Omega)$, отже, за підпослідовністю для деякої функції $v \in L^2(\Omega)$

$$\hat{u}^\varepsilon \to v \text{ слабко в } L^2(\Omega), \ \varepsilon \to 0. \qquad (30)$$

Доведемо, що $v = \hat{u}^0$. Нехай $\varepsilon = \varepsilon_k \to 0$, $\hat{u}^{\varepsilon_k} := \hat{u}^k$. Тоді унаслідок (16)

$$\sigma_{\varepsilon_k}^2 = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \ge \frac{\| \hat{z}_t^k(0) \|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\| \hat{z}^k(0) \|^2}{\alpha_1} + \frac{\| \hat{z}^k \|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\| \hat{u}^k \|^2}{\gamma},$$

де $\{\hat{y}_0^k, \hat{y}_1^k, \hat{f}^k, \hat{g}^k\} \in G$ є нерухомою точкою відображення Ψ_k з теореми 1, побудованого за функцією $\hat{u}^k$. Тоді за підпослідовністю

$$\{\hat{y}_0^k, \hat{y}_1^k, \hat{f}^k, \hat{g}^k\} \to \{\hat{y}_0, \hat{y}_1, \hat{f}, \hat{g}\} \text{ слабко в } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega),$$

а $\hat{z}^k$ є розв'язком задачі (11) з $\hat{y}^k$ і $\hat{u}^k$, $\hat{y}^k$ — розв'язок задачі (1) для $\varepsilon = \varepsilon_k$ за умов $\hat{f}^k$, $\hat{y}_0^k$, $\hat{y}_1^k$. Тоді, скориставшись теоремою про компактність, виводимо, що

$$\hat{y}^k \to \hat{y} \text{ в } C([0,T]; L^2(\Omega)), \qquad (31)$$

де $\hat{y}$ — розв'язок задачі (1) за умов $\hat{f}$, $\hat{y}_0$, $\hat{y}_1$ і $\varepsilon = 0$. Тоді має місце збіжність

$$C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k)\hat{u}^k \to C^0(t,x)v \text{ слабко в } L^2(Q_T). \qquad (32)$$

Дійсно, на основі (17) і (31) отримуємо, що

$$C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k) \to C^0(t,x) \text{ в } L^2(Q_T).$$

Тоді унаслідок нерівності Гельдера маємо

$$\int_{Q_T} | C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t,x)) - C^0(t,x) | \cdot | \hat{u}^k(x) | \, dt \cdot dx \to 0, \ k \to \infty.$$

Отже, за підпослідовністю

$$(C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k(t, x)) - C^0(t, x)) \cdot \hat{u}^k(x) \to 0, \ k \to \infty \text{ для м.в. } (t, x).$$

За лемою Ліонса [5]

$$(C^{\varepsilon_k}(t, x, \hat{y}^k) - C^0(t, x)) \cdot \hat{u}^k \to 0, \ k \to \infty \text{ слабко в } L^2(Q_T). \tag{33}$$

Оскільки

$$C^0(t, x)(\hat{u}^k - v) \to 0, \ k \to \infty \text{ слабко в } L^2(Q_T), \tag{34}$$

то зі збіжностей (33), (34) отримуємо збіжність (32). Тоді

$$\hat{z}^k \to \hat{z} \text{ в } C([0, T]; L^2(\Omega)), \ \hat{z}_t^k \to \hat{z}_t \text{ в } C([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \tag{35}$$

де $\hat{z}$ — розв'язок задачі (11) з диференціальним оператором $\operatorname{div}(a^0\nabla)$ і з правою частиною $C^0(t, x) \cdot v$.

Отже,

$$\varliminf_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \ge \varliminf_{k\to\infty} \left(\frac{\|\hat{z}_t^k(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\hat{z}^k(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\hat{z}^k\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|\hat{u}^k\|^2}{\gamma} \right) \ge$$

$$\ge \frac{\|\hat{z}_t(0)\|_{H^{-1}}^2}{\alpha_0} + \frac{\|\hat{z}(0)\|^2}{\alpha_1} + \frac{\|\hat{z}\|_{Q_T}^2}{\beta} + \frac{\|v\|^2}{\gamma} = J^0(v). \tag{36}$$

Проте оскільки $\hat{u}^k$ така, що

$$\inf_u J^{\varepsilon_k}(u) = J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k),$$

то $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \le J^{\varepsilon_k}(u) = (-(\bar{z}_t^k(0), \bar{y}_0^k) + (\bar{z}^k(0), \bar{y}_1^k) + (\bar{z}^k, \bar{f}^k)_{Q_T} - (\bar{g}^k, u))^2,$$

де $\{\bar{y}_0^k, \bar{y}_1^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\}$ — розв'язок задачі (12) з функцією u; $\bar{z}^k$ — розв'язок задачі (11) для $\varepsilon = \varepsilon_k$ і з правою частиною $C^{\varepsilon_k}(t, x, \bar{y}^k) \cdot u$; $\bar{y}^k$ — розв'язок задачі (1) для $\varepsilon = \varepsilon_k$ з відповідними умовами $\bar{y}_0^k$, $\bar{y}_1^k$, $\bar{f}^k$.

Аналогічно до попередніх міркувань, але з фіксованою функцією u отримуємо, що

$$\{\bar{y}_0^k, \bar{y}_1^k, \bar{f}^k, \bar{g}^k\} \to \{\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{f}, \bar{g}\} \text{ слабко в } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(Q_T) \times L^2(\Omega),$$

$$\bar{y}^k \to \bar{y} \text{ в } C([0, T]; L^2(\Omega)), \ \bar{z}^k \to \bar{z} \text{ в сенсі (35)},$$

де $\bar{z}$ — розв'язок задачі (11) з диференціальним оператором $\operatorname{div}(a^0\nabla)$ і з правою частиною $C^0(t, x) \cdot u$; $\bar{y}$ — розв'язок задачі (1) з диференціальним оператором $\operatorname{div}(a^0\nabla)$ та відповідними умовами $\bar{y}_0$, $\bar{f}$.

Тоді

$$\lim_{k\to\infty} J^{\varepsilon_k}(u) = (-(\bar{z}_t(0), \bar{y}_0) + (\bar{z}(0), \bar{y}_1) + (\bar{z}, \bar{f})_{Q_T} - (\bar{g}, u))^2 = J^0(u). \tag{37}$$

Отже, $\forall u \in L^2(\Omega)$

$$J^0(v) \le \varliminf_{k \to \infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^k) \le J^0(u). \qquad (38)$$

Із (38) одержуємо, що $v = \hat{u}^0$ і

$$\sigma_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2 = J^0(\hat{u}^0), \ \varepsilon \to 0.$$

Як і у попередніх міркуваннях, але з функцією $u = \hat{u}^0$, аналогічно (37) виводимо

$$\lim_{k \to \infty} J^{\varepsilon_k}(\hat{u}^0) = J^0(\hat{u}^0).$$

Отже,

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 \to \sigma_0^2, \ \varepsilon \to 0,$$

теорему доведено. □

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто задачу мінімаксного оцінювання функціоналу від розв'язку хвильового рівняння зі швидко коливними коефіцієнтами та з невідомими функціями у правій частині рівняння, у початковій умові та у спостереженні. Оскільки через наявність швидко коливних коефіцієнтів у рівнянні та спостереженні, а також через специфічний вигляд оператора спостереження отримати точний розв'язок задачі мінімаксного оцінювання (1)–(6) неможливо, то для знаходження наближеного розв'язку задачі мінімаксного оцінювання застосовано підхід, обґрунтований у роботі [13] для параболічного рівняння. Для цього підходу істотно використано теорію усереднення диференціальних операторів [11]. Спершу обґрунтовано існування мінімаксної оцінки вихідної задачі. Зрештою було доведено, що оцінка задачі з усередненими параметрами є наближеною оцінкою вихідної задачі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Наконечный А.Г. Минимаксное оценивание функционалов от решений вариационных уравнений в гильбертовых пространствах. Киев: КГУ, 1985. 83 с.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. Москва: Наука, 1968. 476 с.
3. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. Москва: Мир, 1972. 414 с.
4. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. Москва: Мир, 1972. 588 с.
5. Nakonechnyi A.G., Podlipenko Yu.K., Zaitsev Yu.A. Minimax prediction estimation of solutions of initial-boundary-value problems for parabolic equations with discontinuous coefficients based on imperfect data. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2000. Vol. 36, N 6. P. 845–854.
6. Podlipenko Y., Shestopalov Y. Mixed variational approach to finding guaranteed estimates for solutions and right-hand sides of the second-order linear elliptic equations under incomplete data. *Minimax Theory and its Applications.* 2016. Vol. 01, N 2, P. 197–244.
7. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. The minimax problems of pointwise observation for a parabolic boundary value problem. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2002. Vol. 34, N 5. P. 52–63.
8. Kapustyan E.A., Nakonechnyj A.G. Optimal bounded control synthesis for a parabolic boundary-value problem with fast oscillatory coefficients. *Journal of Automation and Information Sciences*. 1999. Vol. 31, N 12. P. 33–44.
9. Kapustyan O.V., Kapustyan O.A., Sukretna A.V. Approximate bounded synthesis for one weakly nonlinear boundary-value problem. *Nonlinear Oscillations*. 2009. Vol. 12, N 3. P. 297–304.

10. Kapustian O.A., Sobchuk V.V. Approximate homogenized synthesis for distributed optimal control problem with superposition type cost functional. *Statistics, Optimization and Information Computing.* 2018. Vol. 6, N 2. P. 233–239.

11. Жиков В.В., Козлов С.М., Олейник О.А. Усреднение дифференциальных операторов. Москва: Физматлит, 1993. 464 с.

12. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. Москва: Наука, 1984. 352 с.

13. Капустян О.А., Наконечний О.Г. Наближене мінімаксне оцінювання функціоналів від розв'язку параболічної задачі зі швидко коливними коефіцієнтами при нелінійних спостереженнях. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2019. № 2. С. 94–104.

14. Denkiwski Z., Mortola S. Asymptotic behavior of optimal solutions to control problems for systems described by differential inclusions corresponding to partial differential equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 1993. Vol. 78. P. 365–391.

Надійшла до редакції 15.01.2020

Е.А. Капустян, А.Г. Наконечный

ПРИБЛИЖЕННОЕ МИНИМАКСНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ ОТ РЕШЕНИЙ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОМ НАБЛЮДЕНИИ

Аннотация. Рассмотрена задача минимакного оценивания функционала от решения волнового уравнения с быстро колеблющимися коэффициентами и при условии, что наблюдение является нелинейным (имеет оператор типа суперпозиции). При значении малого параметра $\varepsilon > 0$ существование решения исходной задачи устанавливается с помощью традиционного минимаксного подхода. Переход к задаче с усредненными параметрами позволяет освободиться от нелинейности в наблюдении. Основной результат работы — это доказательство того, что минимаксная оценка задачи с усредненными коэффициентами является приближенной минимаксной оценкой исходной задачи.

Ключевые слова: минимаксное оценивание, волновое уравнение, быстро колеблющиеся коэффициенты, усредненная задача, неопределенность, приближенная оценка.

O.A. Kapustian, O.G. Nakonechnyi

APPROXIMATE MINIMAX ESTIMATION OF FUNCTIONALS OF SOLUTIONS TO THE WAVE EQUATION UNDER NONLINEAR OBSERVATIONS

Abstract. The paper deals with the problem of minimax estimation of a functional of the solution to the wave equation with rapidly oscillating coefficients. The observation (output signal) is nonlinear (has the operator of superposition type). For the small parameter $\varepsilon > 0$, the existence of the solution of original problem is proved using the traditional minimax approach. Transition to homogenized parameter problem allows us to remove the nonlinearity in the observation. The main result of the paper is to prove that the estimate of the problem with homogenized parameters is an approximate minimax estimate of the original problem.

Keywords: minimax estimation, wave equation, rapidly oscillating coefficients, homogenized problem, uncertainty, approximate estimate.

Капустян Олена Анатоліївна,
кандидат фіз.-мат. наук, старший науковий співробітник, заступник декана Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: olena.kap@gmail.com.

Наконечний Олександр Григорович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач кафедри Київського національного університету імені Тараса Шевченка, e-mail: a.nakonechniy@gmail.com.