УДК 519.65

П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ, Я.В. ПІЗЮР, Р.П. МАЛАЧІВСЬКИЙ

ЧЕБИШОВСЬКЕ НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Анотація. Запропоновано метод побудови чебишовського наближення раціональним виразом для таблично заданих функцій багатьох змінних. Він ґрунтується на побудові граничного середньостепеневого наближення у нормі простору E^p для $p \to \infty$. Для побудови середньостепеневих наближень використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів з уточненням значень двох вагових функцій, одна з яких забезпечує побудову середньостепеневого наближення, а друга — уточнення параметрів раціонального виразу за схемою лінеаризації. Збіжність методу забезпечено завдяки оригінальному способу послідовного уточнення значень вагових функцій. Описано алгоритми обчислення параметрів чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом з абсолютною та відносною похибками.

Ключові слова: чебишовське наближення раціональним виразом, функції багатьох змінних, середньостепеневе наближення, метод найменших квадратів.

ВСТУП

Нехай неперервна дійсна функція $f(X)$ від n змінних $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ задана на множині точок $\Omega = \{X_j\}_{j=1}^{s}$ з обмеженої області D, $\Omega \subset D$, де $D \subset R^n$, R^n — n-вимірний векторний простір. Функцію $f(X)$ на множині точок Ω необхідно наблизити нескорочуваним раціональним виразом

$$R_{k,l}(a, b; X) = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i \varphi_i(X)}{\sum_{i=0}^{l-1} b_i \psi_i(X) + \psi_l(X)}, \tag{1}$$

де $\varphi_i(X)$, $i = \overline{0, k}$, та $\psi_i(X)$, $i = \overline{0, l}$, — системи лінійно незалежних неперервних на D дійсних функцій, а a_i, $i = \overline{0, k}$, і b_i, $i = \overline{0, l-1}$, — невідомі параметри: $\{a_i\}_{i=0}^{k} \in A$, $A \subseteq R^{k+1}$, $\{b_i\}_{i=0}^{l-1} \in B$, $B \subseteq R^l$.

Побудова чебишовського наближення раціональним виразом (1) для функції $f(X)$ на множині точок Ω полягає в обчисленні таких значень параметрів a^* та b^*, для яких виконується умова

$$\max_{X \in \Omega} | f(X) - R_{k,l}(a^*, b^*; X)| = \min_{a \in A,\, b \in B} \max_{X \in \Omega} | f(X) - R_{k,l}(a, b; X)|. \tag{2}$$

Наближення раціональним виразом порівняно з поліноміальним наближенням у багатьох випадках для однієї й тієї самої кількості параметрів забезпечує кращу точність наближення [1]. Чебишовське наближення раціональним виразом використовують для представлення елементарних і спеціальних математичних функцій [1], апроксимації розв’язків диференціальних та інтегральних рівнянь [1, 2], у нейронних мережах [3] тощо.

Для обчислення параметрів чебишовського наближення функцій однієї змінної розроблено низку методів [1, 4]. Зокрема, у праці [4] для побудови чебишовського наближення функцій однієї змінної запропоновано комбінований алгоритм, який враховує переваги методів Ремеза і Вернера. У праці [5] описано алгоритм обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом функцій однієї змінної на основі схеми Ремеза з використанням диференціальної корекції, а в [6] наведено варіант програмної реалізації визначення параметрів раціонального виразу з використанням цього алгоритму. У працях [1, 7] побудову чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом зведено до послідовного розв'язування задачі лінійного програмування. Проте, здебільшого, для обчислення параметрів чебишовського наближення функцій багатьох змінних застосовують методи нелінійної оптимізації [8].

У цій статті запропоновано метод побудови чебишовського наближення функцій багатьох змінних раціональним виразом як граничного наближення у нормі простору L^p для $p \to \infty$. Він ґрунтується на методі, описаному в [8, 9], і полягає в послідовній побудові середньостепеневих наближень. Середньостепеневі наближення раціональним виразом обчислюють за методом найменших квадратів з використанням двох змінних вагових функцій, значення яких уточнюють з урахуванням усіх попередніх наближень [9]. Параметри раціонального наближення за методом найменших квадратів визначають з використанням лінеаризації [10, 11]. Метод побудови чебишовського наближення раціональним виразом на основі обчислення середньостепеневих наближень для функцій однієї змінної описано в праці [12], а для функцій від двох змінних — у праці [13].

Для оцінки похибки середньостепеневого наближення функції $f(X)$, заданої на множині точок Ω, використовують норму простору E^p $(1 \le p < \infty)$

$$|| \Delta ||_{E^p} = \left(\sum_{X \in \Omega} | \Delta(X) |^p \right)^{1/p}, \tag{3}$$

де $\Delta(X) = f(X) - R_{k,l}(a, b; X)$. Граничне значення норми $|| \Delta ||_{E^p}$ для $p \to \infty$ аналогічно до норми простору L^p для $p \to \infty$ відповідає нормі у просторі неперервних функцій $|| \Delta ||_C$ [1].

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ

Якщо неперервне чебишовське наближення раціональним виразом $R_{k,l}(a, b; X)$ (1) для функції $f(X)$ на множині точок Ω існує, то побудова такого наближення ґрунтується на ідеї послідовного обчислення середньостепеневих наближень для $p = 2, 3, 4, \dots$ у просторі E^p з нормою (3). Для побудови середньостепеневого наближення функції $f(X)$ раціональним виразом (1) у просторі E^p використано ітераційну схему на основі методу найменших квадратів [9]

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_r(X)(f(X) - R_{k,l}(a, b; X))^2 \xrightarrow[a \in A,\, b \in B]{} \min, \quad r = 0, 1, \dots, p-2, \tag{4}$$

з послідовним уточненням значень вагової функції $\rho_r(X)$

$$\rho_0(X) = 1, \ \rho_r(X) = \prod_{i=1}^{r} | \Delta_i(X) |, \ r = 1, \dots, p-2, \ p = 3, 4, \dots, \tag{5}$$

де $\Delta_s(X) = f(X) - R_{k,l,s-1}(a, b; X)$, $s = \overline{1, r}$, $R_{k,l,s}(a, b; X)$ — наближення за методом найменших квадратів функції $f(X)$ з ваговою функцією $\rho_s(X)$, яке відповідає середньостепеневому наближенню степеня $p = s+2$.

Можливість отримання чебишовського наближення як граничного наближення у просторі L^p для $p \to \infty$ детально досліджено в праці [14], в якій Є.Я. Ремез теоретично обґрунтував збіжність обчислювальних схем для побудови чебишовського наближення на основі середньостепеневого наближення.

Побудова наближення раціональним виразом за методом найменших квадратів — це нелінійна задача. Для побудови такого наближення застосовано лінеаризацію, яка полягає в ітераційному уточненні наближення раціональним виразом (1) з використанням змінної вагової функції [10, 11]. Відповідно до цього методу лінеаризації для кожного фіксованого значення p обчислюємо наближення функції $f(X)$ раціональним виразом $R_{k,l}(a, b; X)$ (1) за методом найменших квадратів

$$\sum_{X \in \Omega} \rho_r(X)\, \upsilon_{r,t}(X)(\Phi_{r,t}(a, b; X))^2 \xrightarrow[a \in A,\, b \in B]{} \min, \quad r = p-2, \quad t = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

де

$$\Phi_{r,t}(a, b; X) = f(X)\left(\sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t}\psi_i(X) + \psi_l(X)\right) - \sum_{i=0}^{k} a_{i,r,t}\varphi_i(X). \tag{7}$$

Значення вагової функції $\rho_r(X)$ обчислюємо за формулою (5), а вагової функції $\upsilon_{r,t}(X)$ — за формулою

$$\upsilon_{r,t}(X) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \quad r = 0, \ t = 0, \\ \left(\sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r,t-1}\psi_i(X) + \psi_l(X)\right)^{-2}, \text{ якщо } \ t > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Уточнення наближення раціональним виразом (1) за ітераційною схемою (6), (8) можна контролювати точністю ε_1 виконання умови

$$|\eta_{r,t-1} - \eta_{r,t}| \le \varepsilon_1 \eta_{r,t}, \tag{9}$$

де

$$\eta_{r,t} = \sum_{X \in \Omega} \rho_r(X)\, \upsilon_{r,t}(X)(\Phi_{r,t}(a, b; X))^2. \tag{10}$$

Під час тестування використовували значення $\varepsilon_1 = 0.003$, яке забезпечувало збіжність двох-трьох значущих цифр суми квадратів відхилень (10) на множині точок Ω. Виконання умови (9) означає, що середньостепеневе наближення степеня $p = r+2$ раціональним виразом $R_{k,l,r}(a, b; X)$ обчислено з точністю ε_1. Значення параметрів наближення $R_{k,l,r}(a, b; X)$ є такими:

$$a_{j,r} = a_{j,r,t} \ \ (j = \overline{0, k}), \ \ b_{j,r} = b_{j,r,t} \ \ (j = \overline{0, l-1}). \tag{11}$$

Отже, побудова чебишовського наближення раціональним виразом (1) полягає в застосуванні двох ітераційних процесів: вкладених ітерацій (6), (8) і зовнішніх (4), (5). Завершення ітерацій (4), (5) можна контролювати досягненням деякої заданої точності ε

$$\mu_{r-1} - \mu_r \le \varepsilon \mu_r, \tag{12}$$

де

$$\mu_r = \max_{X \in \Omega} |f(X) - R_{k,l,r}(a, b; X)|. \tag{13}$$

Під час розв'язування тестових прикладів досягнення точності $\varepsilon = 0.003$ у випадку наближення функцій однієї та двох змінних спостерігалося за вісім-дванадцять ітерацій (4), (5). У випадку наближення функцій від трьох змінних для досягнення точності $\varepsilon = 0.003$ потребувалося від двадцяти до двадцяти п'яти ітерацій. Ця точність забезпечувала збіжність двох-трьох значущих цифр похибки чебишовського наближення раціональним виразом. При цьому точність $\varepsilon_1 = 0.003$ визначення проміжних наближень раціональним виразом досягалася за три–чотири внутрішні ітерації (6)–(8). Якщо для $r \geq 1$ значення вагової функції $\upsilon_{r,0}(X)$ покласти рівними значенням $\upsilon_{r-1,t}(X)$, що відповідає значенням цієї вагової функції на попередній ітерації

$$\upsilon_{r,0}(X) = \upsilon_{r-1,t}(X),$$

то для уточнення раціонального виразу достатньо було лише двох-трьох ітерацій (6), (8).

Збіжність ітерацій (4), (5) забезпечує послідовне уточнення значень вагової функції з урахуванням її попередніх значень. Відповідно до (5) значення вагової функції змінюються пропорційно до модулів значень отриманої похибки наближення функції, а саме точці з найбільшою похибкою наближення відповідає найбільше зростання значення вагової функції. Таке уточнення значень вагової функції забезпечує послідовне зменшення значення найбільшої похибки наближення за результатом наступної ітерації.

АЛГОРИТМ ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ

Опишемо процес обчислення значень параметрів чебишовського наближення узагальненим раціональним виразом (1) неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок Ω.

Нехай r — номер ітерації ітераційного процесу (4), (5), t — номер ітерації ітераційного процесу (6), (8), ε — точність побудови чебишовського наближення, а ε_1 — точність уточнення параметрів раціонального виразу за схемою лінеаризації.

Реалізація ітераційних процесів (4), (5) і (6), (8) полягає у здійсненні таких дій.

1. Приймаємо $r=0$, $t=0$, $\mu_{r-1}=10^{10}$, $\eta_{0,t-1}=0$, $\rho_0(X)=1$, $\upsilon_{0,0}(X)=1$ для всіх $X \in \Omega$.

2. Знаходимо розв'язок задачі (6), тобто обчислюємо значення параметрів середньостепеневого наближення степеня $p=r+2$ раціональним виразом $R_{k,l,r,t}(a,b;X)$ на t-й ітерації.

3. Перевіряємо неперервність отриманого наближення $R_{k,l,r,t}(a,b;X)$ на множині точок задання функції. Цю перевірку можна реалізувати, як відстеження знаку значення знаменника раціонального виразу $R_{k,l,r,t}(a,b;X)$ у точках множини Ω. У разі виявлення зміни знаку значення знаменника раціонального виразу $R_{k,l,r,t}(a,b;X)$ чи значення, рівного нулеві, виконання алгоритму припиняємо. Це означає, що для заданої функції не існує неперервного наближення раціональним виразом (1) для вказаних значень степеня чисельника та знаменника.

4. Обчислюємо за формулою (10) похибку $\eta_{r,t}$ процесу уточнення значень параметрів середньостепеневого наближення степеня $p=r+2$ раціональним виразом $R_{k,l,r,t}(a,b;X)$ на t-й ітерації.

5. Перевіряємо виконання умови (9). Якщо значення похибки $\eta_{r,t}$ задовольняє умову (9), то середньостепеневе наближення степеня $p=r+2$ раціональним виразом $R_{k,l,r}(a,b;X)$ вважаємо побудованим. Параметри цього наближення визначають за формулами (11). Обчислення продовжуємо з п. 6.

В іншому разі приймаємо $t=t+1$, обчислюємо нові значення вагової функції $\upsilon_{r,t}(x,y)$ за формулою (8) і переходимо до обчислень за п. 2.

6. За формулою (13) обчислюємо значення похибки μ_r процесу уточнення чебишовського наближення раціональним виразом.

7. Перевіряємо виконання умови (12). Якщо значення похибки μ_r задовольняє умову (12), то виконання ітерацій (4), (5) припиняємо. Значення параметрів раціонального виразу (1) покладаємо рівними

$$a_j = a_{j,r} \ \ (j=\overline{0,k}), \ \text{а} \ b_j = b_{j,r} \ \ (j=\overline{0,l-1}), \tag{14}$$

і переходимо до виконання п. 8.

В іншому разі приймаємо $r=r+1$, $t=0$, $\eta_{r,0}=0$ і обчислюємо нові значення вагової функції $\rho_r(X)$ за формулою (5). Значення вагової функції $\upsilon_{r,0}(X)$ покладаємо рівними

$$\upsilon_{r,0}(X) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} b_{i,r-1}\psi_i(X) + \psi_l(X) \right)^{-2}, \tag{15}$$

тобто значення цієї вагової функції залишаємо тими самими, що використовувалися на попередній ітерації. Обчислення продовжуємо з п. 2.

8. Для отриманого наближення раціональним виразом (1), значення параметрів якого відповідають (14), здійснюємо симетризувальне коригування [14]. Визначаємо значення адитивної поправки

$$\bar{a}_0 = (\mu_{\max} + \mu_{\min})/2, \tag{16}$$

в якій

$$\mu_{\max} = \max_{X\in\Omega} (f(X) - R_{k,l}(a,b;X)), \ \mu_{\min} = \min_{X\in\Omega} (f(X) - R_{k,l}(a,b;X)).$$

У результаті шукане чебишовське наближення неперервної функції $f(X)$ раціональним виразом (1) матиме вигляд

$$R_{k,l}(a,b;X) = R_{k,l}(a,b;X) + \bar{a}_0. \tag{17}$$

ОБЧИСЛЕННЯ ПАРАМЕТРІВ ЧЕБИШОВСЬКОГО НАБЛИЖЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИМ ВИРАЗОМ З ВІДНОСНОЮ ПОХИБКОЮ

Якщо неперервна функція $f(X)$ не набуває значень, рівних нулеві на множині точок Ω, і чебишовське наближення $f(X)$ узагальненим раціональним виразом (1) існує, то таке наближення з відносною похибкою можна обчислити за схемою, аналогічною до наведеної в описаному вище алгоритмі. Алгоритм обчислення чебишовського наближення раціональним виразом з відносною похибкою передбачає такі зміни.

У п. 1 описаного вище алгоритму початкові значення вагової функції $\rho_0(X)$ покладаємо рівними

$$\rho_0(X) = \frac{1}{f(X)^2}. \tag{18}$$

У п. 6 значення похибки μ_r чебишовського наближення раціональним виразом у процесі його уточнення обчислюємо за формулою

$$\mu_r = \max_{X\in\Omega} \left| 1 - \frac{R_{k,l,r-1}(a,b;X)}{f(X)} \right|. \tag{19}$$

У п. 7 нові значення вагової функції $\rho_r(X)$ обчислюємо за формулою (5), в якій

$$\Delta_s(X) = 1 - \frac{R_{k,l,s}(a,b;X)}{f(X)}. \tag{20}$$

У п. 8 значення коригувальної поправки обчислюємо за формулою

$$c=\frac{2f(X_{\max})f(X_{\min})}{R_{k,l,r}(a,b;X_{\min})f(X_{\max})+R_{k,l,r}(a,b;X_{\max})f(X_{\min})}, \qquad (21)$$

де $X_{\max}$ — точка, в якій відносна похибка наближення μ_r (19) досягає найбільшого значення на множині точок Ω, а $X_{\min}$ — найменшого значення. З урахуванням коригувальної поправки чебишовське наближення неперервної функції $f(X)$, заданої на множині точок Ω раціональним виразом (1) з відносною похибкою, буде мати вигляд

$$R_{k,l}(a,b;X)=cR_{k,l}(a,b;X). \qquad (22)$$

Значення коригувальної поправки c (21) визначаємо як розв'язок однопараметричної задачі чебишовського наближення функції $f(X)$ виразом $cR_{k,l}(a,b;X)$ на множині точок Ω з відносною похибкою

$$\max_{X\in\Omega}\left|\frac{f(X)-cR_{k,l}(a,b;X)}{f(X)}\right|\xrightarrow[c]{}\min. \qquad (23)$$

Приклад 1. Знайдемо чебишовське наближення функції $y(x)=e^x$, заданої в точках x_i, $i=\overline{0,30}$, де $x_i=-1+0.1i$, раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$, в якому чисельник і знаменник відповідно є поліномами другого та першого степеня за змінною x.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon=0.003$ за вісім ітерацій (4) з ваговою функцією (5) для функції $y(x)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,1}(a,b;x)=\frac{1.043227312x^2+3.029780712x+3.863602586}{3.903847747-x}, \qquad (24)$$

який з урахуванням коригувальної поправки $\bar{a}_0=0.000010784$ забезпечує абсолютну похибку наближення 0.015695232. Під час обчислення чебишовського наближення функції $y(x)$ похибка наближення на ітераціях (4), (5) набувала таких значень:

0.023871778, 0.016934248, 0.01628043, 0.016008242, 0.015879723,

0.015801285, 0.015747203, 0.015706016.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ раціональним виразом $R_{2,1}(a,b;x)$, отримане за ітераційною схемою Ремеза з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена [1, 15], забезпечує похибку апроксимації 0.0155. Перевищення похибки наближення раціональним виразом (24) порівняно з похибкою чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза, дорівнює 0.000195232, що становить 1.26 % від похибки чебишовського наближення, отриманого за схемою Ремеза.

Криву похибки апроксимації функції $y(x)$ раціональним виразом (24) зображено на рис. 1.

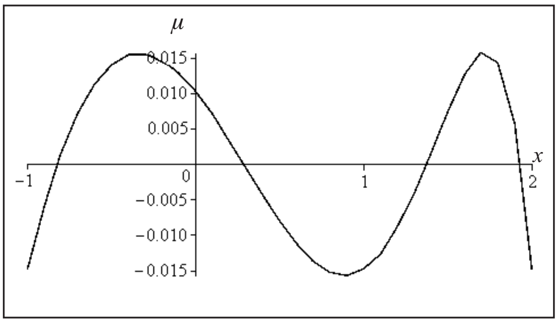

Рис. 1. Крива похибки апроксимації функції $y(x)$ раціональним виразом (24)

Наведена на рисунку крива похибки наближення функції $y(x)$ раціональним виразом (24) відповідає характеристичній властивості чебишовського наближення [11, 15] — має п'ять екстремальних точок, у яких досягає найбільшого за модулем відхилення, при цьому значення модулів цих відхилень збігаються (в межах заданої точності) і знак відхилень у цих точках чергується:

$$(-1,\ -0.014891218),\ (-0.3,\ 0.015635164),\ (0.9,\ -0.01569526),$$

$$(1.7,\ 0.015695258),\ (2.0,\ -0.0149359).$$

Ці екстремальні точки збігаються з точками альтернансу, отриманими під час наближення функції $y(x)$ за схемою Ремеза, з уточненням точок альтернансу за алгоритмом Валле–Пуссена [11, 15]. У крайніх екстремальних точках спостерігається дещо менше за модулем значення похибки наближення. Для досягнення кращого вирівнювання значень модулів похибок наближення в екстремальних точках можна підвищити точність обчислення чебишовського наближення, зменшивши значення ε в умові (12).

Чебишовське наближення функції $y(x)$ з абсолютною похибкою 0.0155 було отримано за методом (4), (5) для $\varepsilon = 0.00003$ за сімдесят одну ітерацію:

$$\overline{R}_{2,1}(a,\, b;x) = \frac{1.04479306565x^2 + 3.02875502095x + 3.86394680668}{3.9043274993 - x}. \tag{25}$$

Для наближення функції $y(x)$ виразом (25) в екстремальних точках спостерігалися такі значення похибок:

$$(-1,\ -0.015452392123),\ (-0.3,\ 0.015529413659),\ (0.9,\ -0.01552941366),$$

$$(1.7,\ 0.01546524431),\ (2.0,\ -0.01546288028).$$

З підвищенням точності обчислення наближення раціональним виразом екстремальні точки не змінилися, а значення модулів похибки чебишовського наближення в цих точках майже вирівнялися (збігалися дві-три значущі цифри). Обчислення наближення (25) здійснено з використанням 12 розрядів у середовищі Maple.

Чебишовське наближення функції $y(x)$ раціональним виразом $R_{2,1}(a,\, b;x)$ з відносною похибкою з використанням ітерацій (4), (5) і врахуванням (20) для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за десять ітерацій. Раціональний вираз

$$\overline{R}_{2,1}(a,\, b;x) = -\frac{0.7972125368x^2 + 2.746838210x + 3.678106394}{-3.659074535 + x} \tag{26}$$

з урахуванням коригувальної поправки $c = 0.9999941962$ забезпечує відносну похибку наближення 0.874 %. Під час обчислення наближення (26) відносна похибка відтворення функції $y(x)$ на ітераціях (4), (5) набувала таких значень (у відсотках):

$$2.543313149,\ 1.096813398,\ 1.002098232,\ 0.9440792358,\ 0.9157450516,$$

$$0.899304183,\ 0.8888750491,\ 0.8818886266,\ 0.8769965656,\ 0.8746088798.$$

Графік відносної похибки наближення (26) також відповідає характерним ознакам чебишовського наближення [11, 15] — в екстремальних точках відносна похибка набувала таких значень:

$$(-1,\ -0.008461594347),\ (-0.6,\ 0.008740234325),\ (0.3,\ -0.008740234112),$$

$$(1.5,\ 0.00870258476),\ (2.0,\ -0.008290903896).$$

Приклад 2. Знайдемо чебишовське наближення функції $z(x,\ y)=e^{-(x^2+y^2)}$, заданої в точках (x_i, y_j), $i=\overline{0,10}$, $j=\overline{0,10}$, де $x_i=-1+0.2\,i$, $y_j=-1+0.2\,j$, раціональним виразом $R_{2,2}(a,\ b; x,\ y)$, в якому чисельник і знаменник є поліномами другого степеня за змінними x та y.

З використанням запропонованого методу для $\varepsilon=0.003$ за сім ітерацій (4), (5) для функції $z(x,\ y)$ отримано раціональний вираз

$$R_{2,2}(a,\ b; x,\ y)=\frac{P_2(a; x,\ y)}{Q_2(b; x,\ y)}, \tag{27}$$

в якому

$$P_2(a; x,\ y)=1.007258776-0.115894128\;10^{-8}x-0.234478414\;10^{-8}y-$$

$$-0.3393352184x^2-0.3393352234y^2+0.1445200801\;10^{-9}xy,$$

$$Q_2(b; x,\ y)=1+0.2634009507\;10^{-8}x-0.5167223229\;10^{-8}y+$$

$$+0.7853630535x^2+0.7853630273y^2+0.4766678537\;10^{-9}xy.$$

Раціональний вираз (27) з урахуванням коригувальної поправки $\bar{a}_0=-0.00014942155$ забезпечує абсолютну похибку наближення функції $z(x,\ y)$, що дорівнює 0.007665. Під час обчислення наближення (27) похибка наближення функції $z(x,\ y)$ на ітераціях (4), (5) набувала таких значень:

$$0.0153866457,\ 0.010443066,\ 0.009504082,\ 0.0085679,$$

$$0.007935789,\ 0.0078146481,\ 0.0078186119.$$

Поверхню похибки апроксимації функції $z(x,\ y)$ раціональним виразом (27) зображено на рис. 2, *а*. Цей приклад взято з праці Л.В. Петрак [7], в якій для отримання чебишовського наближення функції $z(x,\ y)$ застосовано метод зведення нелінійної задачі (2) до послідовного розв'язування задач лінійного програмування. Чебишовське наближення функції $z(x,\ y)$ у праці [7] отримано з похибкою 0.007666 за сім звертань до процедури розв'язування задачі лінійного програмування.

Чебишовське наближення функції $z(x,\ y)$ раціональним виразом $R_{2,2}(a, b; x,\ y)$ з відносною похибкою з використанням ітерацій (4), (5) і врахуванням (20) для $\varepsilon=0.003$ отримано за десять ітерацій. Раціональний вираз

$$\bar{R}_{2,2}(a,\ b; x,\ y)=\frac{\bar{P}_2(a; x,\ y)}{\bar{Q}_2(b; x,\ y)}, \tag{28}$$

де

$$\bar{P}_2(a; x,\ y)=1.020134607-2.378435424\;10^{-9}y-1.017216096\;10^{-9}x-$$

$$-0.3263939092x^2-7.456299599\;10^{-10}xy-0.32639402y^2,$$

$$\bar{Q}_2(b; x,\ y)=1-9.919727530\;10^{-9}y-4.896131881\;10^{-9}x+$$

$$+0.8842411113x^2-4.219121297\;10^{-9}xy+0.8842407983y^2,$$

забезпечує відносну похибку наближення 2 % з коригувальною поправкою $c=1.00009989$.

Поверхню похибки апроксимації функції $z(x,\ y)$ раціональним виразом (28) з відносною похибкою зображено на рис. 2, *б*.

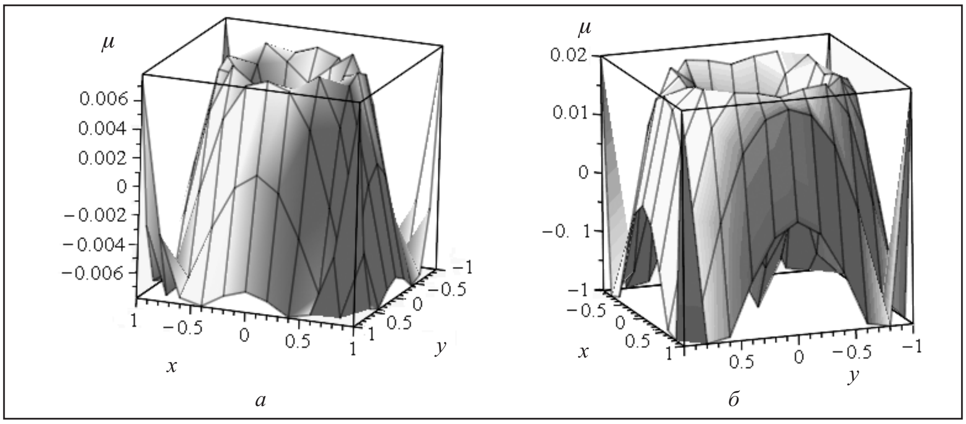

Рис. 2. Поверхні похибки апроксимації функції $z(x, y)$: раціональним виразом (27) з абсолютною похибкою (*а*), раціональним виразом (28) з відносною похибкою (*б*)

Приклад 3. Знайдемо чебишовське наближення функції $z_3(x, y, t) = e^{-(x+y+t)}$, заданої в точках (x_i, y_j, t_r), $i = \overline{0, 20}$, $j = \overline{0, 20}$, $r = \overline{0, 20}$, де $x_i = -1 + 0.1i$, $y_j = -1 + 0.1j$, $t_r = -1 + 0.1r$, раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник є поліномами першого степеня від змінних x, y та t.

З використанням запропонованого методу (4), (5) для $\varepsilon = 0.003$ за двадцять дві ітерації отримано для функції $z_3(x, y, t)$ наближення раціональним виразом

$$R_{1,1}(a, b; x, y, t) = \frac{P_1(a; x, y, t)}{Q_1(b; x, y, t)}, \tag{29}$$

в якому

$$P_1(a; x, y, t) = 1.588802979 - 0.9411049363t - 0.9411010086y - 0.94109332x,$$

$$Q_1(a; x, y, t) = 1 + 0.2626767504t + 0.2626767831y + 0.2626785615x.$$

Раціональний вираз (29) забезпечує абсолютну похибку наближення функції $z_3(x, y, t)$, що дорівнює 0.7402088392, з коригувальною поправкою $\overline{a}_0 = 0.0200267282$.

Чебишовське наближення функції $z_3(x, y, t)$ раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник є поліномами першого степеня від змінних x, y та t, з відносною похибкою не отримано. Під час обчислення наближення з відносною похибкою на ітераціях (6), (8) одержано розривний раціональний вираз.

Чебишовське наближення функції $z_3(x, y, t)$ раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник є поліномами другого степеня від змінних x, y та t, з використанням методу (4), (5) для $\varepsilon = 0.003$ отримано за одинадцять ітерацій. Абсолютна похибка цього наближення з врахуванням коригувальної поправки $\overline{a}_0 = 0.0002501987786$ дорівнює 0.0233863597314. Чебишовське наближення функції $z_3(x, y, t)$ раціональним виразом, в якому чисельник і знаменник є поліномами другого степеня від змінних x, y та t, з відносною похибкою для $\varepsilon = 0.003$ було отримано за дев'ятнадцять ітерацій. З урахуванням коригувальної поправки $c = 1.00006973092$ воно забезпечило відносну похибку наближення 2.156 %.

ВИСНОВКИ

Запропонований метод побудови чебишовського наближення раціональним виразом неперервних таблично заданих функцій багатьох змінних полягає в послідовному визначенні середньостепеневих наближень з використанням методу найменших квадратів з двома змінними ваговими функціями. Одна вагова функція забезпечує побудову середньостепеневого наближення, а друга — уточнення параметрів раціонального виразу за схемою лінеаризації. Збіжність методу забезпечено завдяки оригінальному способу послідовного уточнення значень вагових функцій за формулами (5) і (8) для абсолютної похибки та врахуванню (18), (20) для відносної похибки. Наведені алгоритми обчислення параметрів наближення раціональним виразом є простими для реалізації, надійними та ефективними. Вони передбачають можливість обчислення параметрів наближення раціональним виразом з потрібною точністю для абсолютної і відносної похибки. Результати розв'язування тестових прикладів підтверджують досить швидку збіжність запропонованого методу у разі наближення раціональним виразом функцій однієї, двох і трьох змінних. Під час розв'язування тестових прикладів за цим методом збіжність двох-трьох значущих цифр похибки наближення раціональним виразом досягнуто з використанням від восьми до двадцяти двох ітерацій (4), (5).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Коллатц Л., Крабс В. Теория приближений. Чебышевские приближения и их приложения. Москва: Наука, 1978. 272 с.
2. Azizov T., Melnyk O., Orlova O., Kalenchuk-Porkhanova A., Vakal L. Calculation of reinforced concrete ceilings with normal cracks accounting the Chebyshev approximation. *Proc. 6th International Scientific Conference "Reliability and Durability of Railway Transport Engineering Structures and Buildings" Transbud-2017* (19–21 April 2017, Kharkiv, Ukraine). Kharkiv, 2017. P. 1–7.
3. Peiris V., Sharon N., Sukhorukova N., Ugon J. Rational approximation and its application to improving deep learning classifiers. arXiv:2002.11330v1 [math.OC] 26 Feb 2020.
4. Kalenchuk-Porkhanova A.A. Best Chebyshev approximation of functions of one and many variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2009. Vol. 45, N 6. P. 988-996.
5. Nakatsukasa Y., Sete O., Trefethen L.N. The AAA algorithm for rational approximation. *SIAM J. Sci. Comput.* 2018. Vol. 40, N 3. P. A1494–A1522.
6. Filip S.-I., Nakatsukasa Y., Trefethen L.N., Beckermann B. Rational minimax approximation via adaptive barycentric representations. *SIAM J. Sci. Comput*. 2018. Vol. 40, N 4. P. A2427–A2455.
7. Петрак Л.В. Приближение функций многих переменных рациональными дробями. *Труды ИММ УНЦ АН СССР*. 1975. Вып. 6: Программы оптимизации (приближение функций). С. 130–144.
8. Malachivskyy P.S., Matviychuk Y.N., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P. Uniform approximation of functions of two variables. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, N 3. P. 426–431.
9. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P., Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56, N 1. P. 76–86.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. Москва: Наука, 1978. 512 с.
11. Малачівський П.С., Пізюр Я.В. Розв'язування задач в середовищі Maple. Львів: РАСТР–7, 2016. 282 с.
12. Малачівський П.С., Пізюр Я.В., Малачівський Р.П. Рівномірне наближення раціональним виразом. *Комп'ютерні технології друкарства*. 2018. № 1 (39). С. 54–59.
13. Малачівський П.С., Монцібович Б.Р., Пізюр Я.В., Малачівський Р.П. Чебишовське наближення раціональним виразом функцій двох змінних. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Сер. Технічні науки.* 2019. Вип. 19. С. 75–81.
14. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. Киев: Наук. думка, 1969. 623 с.
15. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.

Надійшла до редакції 25.10.2019

П.С. Малачивский, Я.В. Пизюр, Р.П. Малачивский

ЧЕБЫШЕВСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫМ ВЫРАЖЕНИЕМ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Аннотация. Предложен метод построения чебышевского приближения рациональным выражением для таблично заданных функций многих переменных. Идея метода основывается на построении предельного среднестепенного приближения в норме пространства E^p при $p \to \infty$. Для построения среднестепенных приближений использована итерационная схема на основе метода наименьших квадратов с уточнением значений двух весовых функций, одна из которых обеспечивает построение среднестепенного приближения, а вторая — уточнение параметров рационального выражения по схеме линеаризации. Сходимость метода обеспечивается оригинальным способом последовательного уточнения значений весовых функций. Описаны алгоритмы вычисления параметров чебышевского приближения функций многих переменных рациональным выражением с абсолютной и относительной погрешностями.

Ключевые слова: чебышевское приближение рациональным выражением, функции многих переменных, среднестепенное приближение, метод наименьших квадратов.

P.S. Malachivskyy, Ya.V. Pizyur, R.P. Malachivskyi

CHEBYSHEV APPROXIMATION BY THE RATIONAL EXPRESSION OF FUNCTIONS OF MANY VARIABLES

Abstract. The method of constructing the Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables is proposed. The idea of the method is based on constructing the boundary mean-power approximation in E^p norm with $p \to \infty$. The least squares method with two variable weight functions is used to construct this approximation. One weight function ensures the construction of mean-power approximation, and another one refines parameters of rational expression by linearization scheme. The convergence of the method is provided by the original method of sequentially refining the values of the weight functions. Algorithms for calculating the parameters of the Chebyshev approximation of functions of many variables by a rational expression with absolute and relative errors is described.

Keywords: Chebyshev approximation by rational expression, functions of many variables, mean-power approximation, least squares method.

Малачівський Петро Стефанович,
доктор техн. наук, професор, провідний науковий співробітник Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Пізюр Ярополк Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua.

Малачівський Роман Петрович,
розробник програмного забезпечення компанії Lohika System, Львів,
e-mail: romanmalachivsky@gmail.com.