СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ

І.В. СЕРГІЄНКО, О.М. ЛИТВИН, О.О. ЛИТВИН, О.В. ТКАЧЕНКО, А.А. БІЛОБОРОДОВ

УДК 519.6

ОПТИМІЗАЦІЯ ПОХИБКИ В ОПЕРАТОРАХ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЇ НА *M* ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Анотація. Розглянуто питання оцінки похибки та оптимізації вибору параметрів в операторах інтерлінації функції ермітового типу на системі M паралельних прямих. Для цього застосовано формули узагальненої ермітової інтерлінації, які на відміну від формул звичайної ермітової інтерлінації надають змогу автоматично зберігати той самий клас диференційовності, якому належить наближувана функція. Під час побудови цих операторів використано довільну систему не рівних одне одному чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$. Запропоновано метод оптимального вибору цих параметрів та оцінку похибки залишку.

Ключові слова: інтерлінація, оператор, залишок, оптимізація.

Методи наближення функцій багатьох змінних за допомогою операторів інтерлінації та суміжні питання розглянуто в роботах [1–6]. У випадку використання формул ермітової інтерлінації функції двох і більше змінних без збереження класу гладкості [1] інформація про наближувану функцію задається слідами функції та слідами її нормальних похідних на системі заданих ліній. Тоді, коли сліди похідних не належать тому самому класу диференційовності, якому належить наближувана функція, формули ермітової інтерлінації можуть представляти функції, які не належать тому самому класу диференційовності, що і наближувана функція, а в деяких випадках можуть бути отримані функції, які навіть не є диференційовними.

У роботі [1] О.М. Литвином запропоновано метод побудови операторів інтерлінації функції ермітового типу на системі M паралельних прямих, які надають змогу автоматично зберігати клас диференційовності наближуваної функції. У побудові цих операторів використано систему довільних не рівних один одному чисел $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$. У цій статті запропоновано метод оптимального вибору цих параметрів, а також досліджено оцінку похибки цих операторів.

Стаття складається з трьох розділів. У першому розділі розглянуто узагальнену ермітову інтерлінацію на системі M ($M \geq 2$) паралельних прямих. У другому розділі запропоновано оптимальний вибір параметрів $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$ під час побудови узагальненої ермітової інтерлінації, який відповідає оптимальній похибці наближення функції, за допомогою узагальненого оператора Даламбера. У третьому розділі наведено обчислювальний експеримент, який підтверджує оптимальний вибір параметрів $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$ за допомогою теореми 5 для функції вигляду $f(x, y) = g(x + y)$.

1. ФОРМУЛА УЗАГАЛЬНЕНОЇ ЕРМІТОВОЇ ІНТЕРЛІНАЦІЇ НА СИСТЕМІ M ($M \ge 2$) ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

Розглянемо формулу ермітової інтерлінації без збереження класу диференційовності на системі M паралельних прямих. Нехай $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $-\infty < a \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{M-1} \le b < \infty$. Поліном Ерміта для $f(x, y)$ за змінною y має вигляд

$$e_{MN} f(x, y) := \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=0}^{N} f^{(0,s)}(x, y_k) h_{ks}(y) \frac{(y - y_k)^s}{s!}, \quad (1)$$

де

$$h_{ks}(y) = \prod_{i=0,\, i \ne k}^{M-1} (y - y_i)^{N+1} \left\{ \prod_{i=0,\, i \ne k}^{M-1} (y - y_i)^{-(N+1)} \right\}_{(y_k)}^{(N-s)}.$$

Запис $\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)}$ слід розуміти так:

$$\{\varphi(y)\}_{(y_k)}^{(\nu)} := \sum_{s=0}^{\nu} \varphi^{(s)}(y_k) \frac{(y - y_k)^s}{s!}, \quad k = \overline{0, M-1}, \quad s = \overline{0, N}.$$

Важливо відмітити, що функція (1) є поліномом степеня $(M+1)(N+1)-1$ відносно змінної y. Отже, за змінною y вона є диференційовною довільну кількість разів. Однак, як функція двох змінних вона не належить класу $C^r(R^2)$, якому належить відновлювана функція $f(x, y)$, оскільки $f^{(0,s)}(x, y_k) \in C^{r-s}(R)$. Отже, оператор Ерміта не зберігає диференціальні властивості f крім того випадку, коли $f(x, y) \in C^{\infty}(R^2)$.

О.М. Литвин запропонував формулу узагальненої ермітової інтерлінації на системі M ($M \ge 2$) паралельних прямих із збереженням класу диференційовності [1]. Аспекти узагальненої ермітової інтерлінації та суміжні питання розглянуто в роботах [1–5]. У роботі [1] сформульовано та доведено таку теорему.

Теорема 1. Нехай $f(x, y) \in C^r(\Omega)$, y_k, N, β_i — фіксовані числа, які задовольняють умови:

$$a \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{M-1} \le b, \quad \beta = \{\beta_i\}, \quad \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_N,$$
$$\Omega = \{-\infty < x < \infty, \ a \le y \le b\},$$

тоді існують такі числа λ_{si}, що функція

$$E_{M,N,\beta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \sum_{i=0}^{N} \lambda_{0i} f(x + \beta_i (y - y_k), y_k) +$$
$$+ \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=1}^{N} h_{ks}(y) \sum_{i=0}^{N} \lambda_{si} \int_{x}^{x + \beta_i (y - y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{(x + \beta_i (y - y_k) - t)^{s-1}}{(s-1)!} dt,$$

де

$$h_{ks}(y) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \ne k}}^{M-1} (y - y_l)^{N+1} \left\{ \prod_{\substack{l=0 \\ l \ne k}}^{M-1} (y - y_l)^{-(N+1)} \right\}_{(y_k)}^{(N-s)}, \quad (2)$$

$$\left\{\varphi(y)\right\}_{(y_k)}^{(\nu)} := \sum_{s=0}^{\nu} \varphi^{(s)}(y_k) \frac{(y-y_k)^s}{s!}, \; k=\overline{0, M-1}, \; s=\overline{0, N},$$

задовольняє умови

$$f(x, y) \in C^r(\Omega) \to E_{M,N} f(x, y) \in C^r(\Omega),$$

$$\left.\frac{\partial^p E_{M,N} f(x, y)}{\partial y^p}\right|_{y=y_l} = f^{(0,p)}(x, y_l), \; l=\overline{0, M-1}, \; p=\overline{0, N}.$$

Числа λ_{Nsi}, $i, s=\overline{0, N}$, для кожного $p=\overline{0, N}$ знаходять шляхом розв'язання таких систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} (\beta_i)^p = \delta_{s,p}, \; s, p=\overline{0, N}.$$

Зауважимо, що набори чисел $\{\beta_i\}$, $i=\overline{0, N}$, а значить і числа λ_{Nsi}, можуть бути різними для різних k, $k=\overline{0, M-1}$.

Якщо замість допоміжних функцій $h_{ks}(y)$, $k=\overline{0, M-1}$, $s=\overline{0, N}$, взяти $h_{k0}(y)$, отримуємо простішу формулу для інтерлінації на M $(M \geq 2)$ паралельних прямих:

$$T_{M,N,\beta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) D_{k,N} f(x, y), \tag{3}$$

$$D_{k,N,\beta} f(x, y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left[\lambda_{0i} f(x+\beta_i (y-y_k), y_k) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{si} \int_0^{x+\beta_i (y-y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{(x+\beta_i (y-y_k)-t)^{s-1}}{(s-1)!} dt \right].$$

У роботі [3] наведено таку теорему.

Теорема 2. Нехай $r, N \in \mathrm{N}$, $r > N$, $f(x, y) \in C^r(R^2)$, $\{\beta_i\}$, $i=\overline{0, N}$, — фіксовані числа, які задовольняють умову $-B \leq \beta_0 < \beta_0 \; ... < \beta_N \leq B$, $B \in \mathrm{N}$, $B > 0$. Тоді для чисел $\{\widetilde{\beta}_i\}$, $\widetilde{\beta}_i = \dfrac{\beta_i}{B}$, $i=\overline{0, N}$, узагальнений оператор Даламбера має вигляд

$$\widetilde{D}_{k,N,\beta} f(x, y) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \left[\lambda_{0i} f\left(x + \frac{\beta_i}{B}(y-y_k), y_k \right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{s=1}^{N} \lambda_{si} B^s \int_0^{x+\frac{\beta_i}{B}(y-y_k)} f^{(0,s)}(t, y_k) \frac{\left(x + \frac{\beta_i}{B}(y-y_k) - t \right)^{s-1}}{(s-1)!} dt \right].$$

2. ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$

Із теорем 1, 2 випливає, що інтерлінаційні властивості із збереженням потрібного класу диференційовності в побудованих операторах інтерлінації виконуються незалежно від вибору параметрів $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_N$. Потрібно лише, щоб вони задовольняли умову $-B < \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_N < B$. Тому згідно з твердженням теореми 2 будемо вважати, що всі $\{\beta_i\}$, $i = \overline{0, N}$, належать інтервалу $[-1, 1]$, крім випадку, коли $B = \infty$.

Для наближення функції $f(x, y)$ оператором (3) можна оцінити похибку залишку $R_{M,N,\beta} f(x, y) = (I - T_{M,N,\beta}) f(x, y)$.

Теорема 3. Нехай $f(x, y) \in C^r(\Omega)$; y_k, N, β_i — фіксовані числа, які задовольняють умову $-\infty < a \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{M-1} \le b < \infty$, $N \le r \in \mathrm{N}$, $\beta = \{\beta_i\}$, $-1 < \beta_0 < \beta_1 < \ldots < \beta_N < 1$. Числа λ_{Nsi}, $i, s = \overline{0, N}$, є розв'язками систем лінійних алгебраїчних рівнянь. $\sum_{i=0}^{N} \lambda_{Nsi} (\beta_i)^p = \delta_{s,p}$, $0 \le s, p \le N$. Тоді залишок наближення функції $f(x, y)$ оператором $T_{M,N,\beta}$ має вигляд

$$R_{M,N,\beta} f(x, y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) R_{k,N} f(x, y), \tag{4}$$

де $R_{k,N} f(x, y)$ — залишок наближення функції $f(x, y)$ узагальненим оператором Даламбера $D_{k,N,\beta}$ на прямій $y = y_k$, який має вигляд

$$R_{k,N} f(x, y) =$$

$$= \int_0^{y-y_k} \left[\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} (A_{N+1} f)(t, y_k + z) \frac{(x + \beta_i (y - y_k - z) - t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz, \tag{5}$$

де

$$(A_{N+1} f)(x, y) = \prod_{i=0}^{N} \left(-\beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y),$$

$$\Delta_{Ni} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \ne i}}^{N} (\beta_i - \beta_k), \; 0 \le s, i \le N.$$

Для доведення теореми 3 скористаємося такою лемою.

Лема 1. Для функцій $h_{k0}(y)$ виду (2), $k = \overline{0, M-1}$, виконується тотожність

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \equiv 1.$$

Доведення. З визначення функції $h_{k0}(y)$ випливає:

$$h_{k0}^{(q)}(y_l) = 0, \; l \ne k,$$

$$h_{k0}^{(q)}(y_k) = \delta_{0,q},$$

або

$$h_{k0}^{(q)}(y_l) = \delta_{0,q} \delta_{k,l}.$$

Позначивши

$$s(y) = \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y),$$

отримуємо

$$s^{(q)}(y_l)=\sum_{k=0}^{M-1}h_{k0}^{(q)}(y_l)=\sum_{k=0}^{M-1}\delta_{0,q}\delta_{k,l}=\delta_{0,q}\sum_{k=0}^{M-1}\delta_{k,l}=\delta_{0,q}. \qquad (6)$$

Виконання умов (6) $q=\overline{0,N}$, $l=\overline{0,M-1}$, з урахуванням того, що $s(y)$ є поліномом степеня $M(N+1)-1$, є можливим тільки у випадку, коли $s(y)\equiv 1$. Лему 1 доведено.

Залишок узагальненого оператора Даламбера має вигляд

$$R_{M,N,\beta}f(x,y)-T_{M,N,\beta}f(x,y)=f(x,y)-\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\cdot D_{k,N}f(x,y)=$$

$$=f(x,y)\left(1-\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\right)+\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\cdot(f(x,y)-D_{k,N}f(x,y))=$$

$$=f(x,y)\left(1-\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\right)+\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\cdot R_{k,N}f(x,y).$$

З урахуванням леми 1 $f(x,y)\left(1-\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)\right)=0$. Отже, маємо:

$$R_{M,N,\beta}f(x,y)=\sum_{k=0}^{M-1}h_k(y)R_{k,N}f(x,y).$$

Теорему 3 доведено.

Як було встановлено раніше, інтерлінаційні властивості оператора (3) виконуються незалежно від вибору параметрів $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N$. Тому актуальною є задача оптимального вибору цих параметрів з метою мінімізації похибки. Отже, можна сформулювати таку задачу мінімізації норми залишку $R_{M,N,\beta}f(x,y)$:

$$\| R_{M,N,\beta}f(x,y)\|_{L_2[D]}\to \min_{-1<\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_N<1}.$$

У роботі [1] наведено оцінку похибки $R_{k,N,\beta}f(x,y)$.

Нехай

$$a_k(z)\le x,\ x+\beta_i(y-y_k-z)\le b_k(z),\ i=\overline{0,N},$$

$$D_k=\{(t,z)|\,a_k(z)\le t\le b_k(z);0\le z\le y-y_k\};\ (A_{N+1,\beta}f)(t,z)\in C(D_k).$$

Тоді $\exists\,(\theta_{ik}(\kappa_i+y_k),\kappa_i)\in D_k$, $i=\overline{0,N}$,

$$\overline{\theta_k}(\kappa)=(\theta_{0k}(\kappa_{0k}+y_k),\ldots,\theta_{Nk}(\kappa_{Nk}+y_k),\kappa_{0k},\ldots,\kappa_{Nk}),$$

$$R_{k,N,\beta}f(x,y)=\frac{(y-y_k)^{N+1}}{(N+1)!}(\widetilde{A}_{N+1,\beta}f)(\overline{\theta}_k(\kappa),\kappa),$$

$$(\widetilde{A}_{N+1,\beta}f)(\overline{\theta}(\kappa),\kappa)=\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\beta_i^N\,(A_{N+1,\beta}f)(\theta_i(\kappa_i+y_k),\kappa_i),$$

$$\left|R_{k,N,\beta}f(x,y)\right|\le \max_{(\theta_{ik}(z),z)\in D_k,\,i=\overline{0,N}}\left|(\widetilde{A}_{N+1,\beta}f)(\overline{\theta_k}(z),z)\right|.$$

Цю нерівність можна отримати, якщо до (5) двічі застосувати узагальнену теорему про середнє в інтегральному численні:

$$\exists\, \theta_{ki}(z) \in [x, x+\beta_i (y-y_k-z)] \quad \forall\, i=\overline{0, N}:$$

$$R_{k,N,\beta} f(x, y) =$$

$$= \int_0^{y-y_k} \left[\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(z),\, y_k+z) \times \right.$$

$$\left. \times \int_x^{x+\beta_i (y-y_k-z)} \frac{(x+\beta_i (y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dt \right] dz =$$

$$= \int_0^{y-y_k} \left[\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(z),\, y_k+z) \frac{\beta_i^N (y-y_k-z)^N}{N!} \right] dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{y-y_k} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(z),\, y_k+z) \frac{\beta_i^N (y-y_k-z)^N}{N!} dz,$$

$$\exists\, \kappa_i \in [y_k, y] \quad \forall\, i=\overline{0, N}:$$

$$\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{y-y_k} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(z),\, y_k+z) \frac{\beta_i^N (y-y_k-z)^N}{N!} dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\, \kappa_i) \int_0^{y-y_k} \frac{\beta_i^N (y-y_k-z)^N}{N!} dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\, \kappa_i) \int_0^{y-y_k} \frac{\beta_i^N (y-y_k-z)^N}{N!} dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\, \kappa_i) \frac{\beta_i^N (y-y_k)^{N+1}}{(N+1)!} =$$

$$= \frac{(y-y_k)^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1,\beta} f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\, \kappa_i).$$

Обравши область $D = \bigcap_{k=0}^{M} D_k$, задачу оптимізації можна звести до такого вигляду:

$$\left\| \left(\sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \max_{(\theta_{ik}(z),\, z) \in D_k,\, i=\overline{0, N}} \left| \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \beta_i^N (A_{N+1,\beta} f)(\theta_i(\kappa), \kappa) \right| \right) \right\|_{L_2[D]} \to$$

$$\to \min_{-1<\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_N<1}.$$

Якщо виконується умова $\Delta_{Ni}^{-1} \beta_i^N \geq 0 \ \forall i = \overline{0, N}$, тоді $\exists\, (\tilde{\theta}_k(\tilde{\kappa}+y_k), \tilde{\kappa})$ таке, що

$$\min\{\theta_{0k}(\kappa_0+y_k), \ldots, \theta_{Nk}(\kappa_N+y_k)\} \leq \tilde{\theta}_k(\tilde{\kappa}+y_k) \leq$$

$$\leq \max\{\theta_{0k}(\kappa_0+y_k), \ldots, \theta_{Nk}(\kappa_N+y_k)\},$$

$$\left|(A_{N+1,\beta}f)(\widetilde{\theta}_k(\widetilde{\kappa}+y_k),\widetilde{\kappa})\right| = \max_{i=0,\,N}\left|(A_{N+1,\beta}f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\kappa_i)\right|,$$

$$\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\beta_i^N\,(A_{N+1,\beta}f)(\theta_{ki}(\kappa_i+y_k),\kappa_i) \le \sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\beta_i^N\left|(A_{N+1,\beta}f)(\widetilde{\theta}_k(\widetilde{\kappa}+y_k),\widetilde{\kappa})\right| =$$

$$=\left|(A_{N+1,\beta}f)(\widetilde{\theta}_k(\widetilde{\kappa}+y_k),\widetilde{\kappa})\right|\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\beta_i^N .$$

Враховуючи, що $\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\beta_i^N = 1$, отримуємо

$$R_{k,N,\beta}f(x,\,y) \le |(A_{N+1,\beta}f)(\widetilde{\theta}_k(\widetilde{\kappa}+y_k),\widetilde{\kappa})| .$$

У роботі [3] сформульовано та доведено таку теорему.

Теорема 4. Якщо наближувана функція $f(x,\,y)$ має вигляд $f(x,\,y)=g(x+y)$, то залишок (5) узагальненого оператора Даламбера має вигляд

$$R_{k,\,N}f(x,\,y)=\prod_{i=0}^{N}(1-\beta_i)\times$$

$$\times\int_0^{y-y_k}\left(\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\cdot\int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} g^{(N+1)}(t+z+y_k)\cdot\frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}\,dt\right)dz.$$

Теорема 5. Якщо наближувана функція $f(x,\,y)$ має вигляд $f(x,\,y)=g(x+y)$, то узагальнена формула ермітової інтерлінації (3) із збереженням класу диференційовності буде точно наближувати цю функцію за відповідного вибору чисел $\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_N$, а саме $\beta_i=1$ та β_k $(k\ne i)$ — довільні, та не дорівнюють одне одному.

Доведення. Згідно з теоремою 3 залишок наближення (3) має вид:

$$R_{M,N,\beta}f(x,\,y)=\sum_{k=0}^{M-1}h_{k0}(y)R_{k,N}f(x,\,y) .$$

З урахуванням теореми 4 маємо

$$R_{k,N}f(x,\,y)=\prod_{i=0}^{N}(1-\beta_i)\overline{R}_{k,N}f(x,\,y), \tag{7}$$

$$\overline{R}_{k,N}f(x,\,y)=$$

$$=\int_0^{y-y_k}\left(\sum_{i=0}^{N}\Delta_{Ni}^{-1}\cdot\int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} g^{(N+1)}(t+z+y_k)\cdot\frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!}\,dt\right)dz.$$

Підставляючи (7) в (4), отримуємо

$$R_{M,N,\beta}f(x,\,y)=\sum_{k=0}^{M-1}h_{k0}(y)\prod_{i=0}^{N}(1-\beta_i)\overline{R}_{k,N}f(x,\,y)=$$

$$=\prod_{i=0}^{N}(1-\beta_i)\cdot\left[\sum_{k=0}^{M-1}h_{k0}(y)\overline{R}_{k,N}f(x,\,y)\right].$$

Якщо покласти $\beta_i = 1$ та β_k $(k \neq i)$ довільними, що не дорівнюють одне одному, то

$$R_{M,N,\beta} f(x, y) = \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \cdot \left[\sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y) \overline{R}_{k,N} f(x, y) \right] = 0 .$$

Теорему 5 доведено.

3. ОБЧИСЛЮВАЛЬНИЙ ЕКСПЕРИМЕНТ

Розглянемо функцію $f(x, y)$, оператор для якої має вигляд

$$(A_{N+1} f)(x, y) = \prod_{i=0}^{N} \left(-\beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = \mathrm{Const}.$$

Цьому оператору відповідає, наприклад, така функція

$$f(x, y) = \frac{(x+y-1)^{N+1}}{(N+1)!} ,$$

для якої

$$(A_{N+1} f)(x, y) = \prod_{i=0}^{N} \left(-\beta_i \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) = \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) .$$

Залишок узагальненого оператора Даламбера $D_{k,N,\beta}$ на прямій $y = y_k$ має вигляд

$$R_{k,N} f(x, y) =$$

$$= \int_0^{y-y_k} \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \cdot \int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} (A_{N+1} f)(x, y) \frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dtdz =$$

$$= \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \cdot \left[\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \int_0^{y-y_k} \int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} \frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dtdz \right] =$$

$$= \left| I_i = \int_0^{y-y_k} \int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} \frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dtdz \right| = \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \cdot \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} I_i ,$$

де величини I_i мають вигляд

$$I_i = \int_0^{y-y_k} \int_x^{x+\beta_i(y-y_k-z)} \frac{(x+\beta_i(y-y_k-z)-t)^{N-1}}{(N-1)!} dtdz =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x+\beta_i(y-y_k-z) & dt = -du \\ t = x+\beta_i(y-y_k-z) & u = x \\ t = x & u = \beta_i(y-y_k-z) \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_0^{y-y_k} \int_x^{\beta_i(y-y_k-z)} \frac{u^{N-1}}{(N-1)!} dudz = \frac{1}{N!} \cdot \int_0^{y-y_k} \left(\beta_i^N (y-y_k-z)^N - x^N \right) dz =$$

$$= \frac{1}{N!} \cdot \int_0^{y-y_k} (\beta_i^N v^N - x^N) dz = \frac{1}{N!} \cdot \left(\frac{\beta_i^N (y-y_k)^{N+1}}{N+1} - x^N (y-y_k) \right) =$$

$$= \frac{\beta_i^N (y-y_k)^{N+1} - (N+1)x^N (y-y_k)}{(N+1)!} .$$

У результаті спрощення отримуємо

$$R_{k,N} f(x, y) = \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \cdot \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \frac{\beta_i^N (y-y_k)^{N+1} - (N+1)x^N (y-y_k)}{(N+1)!} =$$

$$= \frac{1}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \left[(y-y_k)^{N+1} \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \beta_i^N - (N+1)x^N (y-y_k) \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \right].$$

Враховуючи, що

$$\sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} \beta_i^N = 1, \ \sum_{i=0}^{N} \Delta_{Ni}^{-1} = 0 ,$$

отримуємо

$$R_{k,N} f(x, y) = \frac{1}{(N+1)!} \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i)(y-y_k)^{N+1}.$$

Похибка наближення відповідно до теореми 5 має вигляд

$$R_{M,N,\beta} f(x, y) = \frac{1}{(N+1)!} \cdot \prod_{i=0}^{N} (1-\beta_i) \cdot \sum_{k=0}^{M-1} h_{k0}(y)(y-y_k)^{N+1} = 0$$

за рахунок вибору одного з параметрів $\beta_i = 1$.

Це твердження стосується лише функцій спеціального вигляду і може бути розширене на випадок суми функцій з аналогічним твердженням для кожного значення окремо. У загальному вигляді для довільних функцій похибка буде залежати від усіх параметрів. Тому мінімізацію похибки слід виконувати з використанням класичних методів мінімізації залишкового члена за всіма параметрами.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. Харків: Основа, 2002. 544 с.
2. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Побудова та дослідження оператора наближення функцій двох змінних із збереженням класу диференційовності за слідами їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії. *Проблеми машинобудування*. 2016. Т. 19, № 2. С. 50–57.
3. Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Білобородов А.А. Оптимізація вибору параметрів в узагальненій формулі Даламбера для функції двох змінних. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 9-ї Міжнародної наукової конференції*. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. С. 96–99. URL: https://inf.kpnu.edu.ua/wp-content/uploads/2020/05/optima_2020_tezy.pdf.
4. Сергієнко І.В., Литвин О.М., Литвин О.О., Ткаченко О.В., Грицай О.Л. Відновлення функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії. *Доп. НАН України*. 2014. № 2. С. 50–55.
5. Литвин О.М. Інтерполяція функцій та їх нормальних похідних на гладких лініях в R^n. *Доп. АН УРСР*. 1984. № 7. С. 15–19.
6. Литвин О.Н. Интерполяция данных Коши на нескольких паралельных прямых в R^2 с сохранением класса дифференцируемости. *Український математичний журнал*. 1985. № 5. С. 509–514.

Надійшла до редакції 30.06.2020

И.В. Сергиенко, О.Н. Литвин, О.О. Литвин, $\boxed{\text{А.В. Ткаченко}}$, А.А. Белобородов

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОГРЕШНОСТИ В ОПЕРАТОРАХ ИНТЕРЛИНАЦИИ ФУНКЦИИ НА M ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

Аннотация. Рассмотрена задача оценки погрешности и оптимизации выбора параметров в операторах интерлинации эрмитового типа функций на системе M параллельных прямых. Для этого использованы формулы обобщенной эрмитовой интерлинации, которые в отличие от формул обычной эрмитовой интерлинации позволяют автоматически сохранять тот же класс дифференцируемости, к которому принадлежит приближенная функция. При построении этих операторов использована произвольная система не равных между собой чисел $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$. Предложены метод оптимального выбора этих параметров и оценка погрешности остатка.

Ключевые слова: интерлинация, оператор, остаток, оптимизация.

I.V. Sergienko, O.M. Lytvyn, O.O. Lytvyn, $\boxed{\text{O.V. Tkachenko}}$, A.A. Biloborodov

OPTIMIZATION OF THE ERROR IN THE OPERATORS OF INTERLINEATION OF A FUNCTION ON M PARALLEL LINES

Abstract. This article discusses the issue of estimating the error and optimizing the choice of parameters in Hermitian-type operators of interlineation of functions on a system of M parallel lines. For this, the formulas of generalized Hermitian-type interlineation are used, which, unlike the formulas of ordinary Hermitian-type interlineation, allow automatically preserving the same class of differentiability to which the approximate function belongs. When constructing these operators, an arbitrary system of unequal each other numbers $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_N$ is used. The article proposes a method for the optimal choice of these parameters and an estimation of error of the remainder.

Keywords: interlineation, operator, remainder, optimization.

Сергієнко Іван Васильович,
академік НАН України, доктор фіз.-мат. наук, професор, директор Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, e-mail: incyb@incyb.kiev.ua.

Литвин Олег Миколайович,
доктор фіз.-мат. наук, професор, професор кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net.

Литвин Олег Олегович,
доктор фіз.-мат. наук, доцент кафедри, завідувач кафедри Української інженерно-педагогічної академії, Харків, e-mail: Olegolitvin55@gmail.com.

$\boxed{\text{Ткаченко Олександр Володимирович}}$,
кандидат фіз.-мат. наук, начальник відділу ДП «Івченко-Прогрес», Запоріжжя.

Білобородов Артем Андрійович,
аспірант кафедри Харківського національного університету радіоелектроніки, e-mail: biloborodow23april@gmail.com.