УДК 519.872

О.В. КОБА, С.В. СЕРЕБРЯКОВА

СИСТЕМА ОБСЛУГОВУВАННЯ $GI/G/1$ ТИПУ ЛАКАТОША З T-ПОВЕРНЕННЯМ

Анотація. Розглянуто систему обслуговування $GI/G/1$ типу Лакатоша з T-поверненням заявок, тобто систему з *FCFS* дисципліною обслуговування та сталим часом T циклу орбіти. Для такої системи побудовано ланцюг Маркова, доведено умову ергодичності, за певного співвідношення часу обслуговування та часу перебування на орбіті розв'язано систему рівнянь для стаціонарного розподілу ймовірностей станів системи, виведено формули для середніх показників кількості заявок та кількості циклів заявки на орбіті. Розроблено алгоритм статистичного моделювання функціонування такої системи. Результати аналітичного та статистичного моделювання узгоджуються. Вказано важливу властивість систем типу Лакатоша: вона може застосовуватися для оцінювання системи, у якій не обов'язкове обслуговування за дисципліною *FCFS*.

Ключові слова: системи масового обслуговування з поверненням заявок, система типу Лакатоша, системи з циклічним часом очікування, система з T-поверненням, орбіта, цикл орбіти, ланцюг Маркова, ергодичність системи обслуговування.

ВСТУП

Протягом трьох останніх десятиліть значний розвиток отримала теорія систем масового обслуговування (СМО) з заявками, що повертаються. Цей процес зумовило значне поширення телекомунікаційних систем. Дійсно, за класичною схемою Ерланга виклик, який одержав відмову, зникає. Тим не менш, у випадку зайнятості лінії він може повторюватися через сталий чи випадковий час [1–3]. Іншим чинником є обчислювальні системи і мережі, в яких у випадку переповнення буфера заявки, що надходять до процесора, блокуються і повертаються через визначений час [4].

Істотною причиною розвитку теорії систем обслуговування з поверненням заявок є сучасні оптичні інформаційні системи [5, 6] та системи керування рухом повітряних суден під час заходження на посадку [7, 8]. Такі системи потребують дослідження нових моделей СМО, які іноді називають системами типу Лакатоша або системами з поверненням і *FCFS* (first come, first served) дисципліною обслуговування. Зазначимо, що Ласло Лакатош — угорський математик, який вперше дослідив подібну систему для моделювання процесу заходження на посадку повітряного судна [9]. У цій роботі було розглянуто одноканальну систему обслуговування з вхідним потоком Пуассона з параметром λ, показниковим часом обслуговування з параметром μ. Якщо в момент надходження заявки канал обслуговування зайнятий, вона повертається через час, що є кратним деякому сталому T, проте не раніше, ніж буде обслуговано всі попередні заявки. Методом вкладених ланцюгів Маркова знайдено твірну функцію величини черги, а також умову ергодичності системи, що має вигляд

$$\frac{\lambda}{\mu} < \frac{e^{-\lambda T}(1-e^{-\mu T})}{1-e^{-\lambda T}}. \quad (1)$$

Зазначимо, що в класичній СМО з поверненням заявка, яка надходить в систему ззовні або з орбіти, коли існує бодай один вільний канал обслуговування, приймається на обслуговування негайно; якщо зайняті всі канали обслуговування, заявка спрямовується (можливо знову) на орбіту. Таким чином, для класичної СМО з поверненням унеможливлюється будь-яка можливість черговості обслуговування.

На відміну від класичної СМО в системах типу Лакатоша заявка, що повертається з орбіти, знову туди потрапляє, якщо залишилась не обслуженою хоча б одна заявка, що надійшла в систему раніше. Заявка з первинного потоку також надсилається на орбіту, якщо в каналі обслуговування, чи на орбіті є хоча б одна заявка. Таким чином, система типу Лакатоша об'єднує в собі два принципи: повторення заявок і обслуговування за дисципліною *FCFS* (див. [10–13]).

Назвемо систему з повторенням (поверненням) через сталий час T системою з T-поверненням.

Метою цієї роботи є дослідження більш загальної, ніж у [9], системи $GI/G/1$ зі сталим часом T повторення (повернення) заявки і обслуговуванням за дисципліною *FCFS*, тобто системи обслуговування $GI/G/1$ типу Лакатоша з T-поверненням.

СИСТЕМА $GI/G/1$ ТИПУ ЛАКАТОША З T-ПОВЕРНЕННЯМ

Розглянемо одноканальну СМО з рекурентним вхідним потоком і неперервною функцією розподілу $A(x)$ часу між надходженням заявок; загальною функцією розподілу $B(x)$ часу обслуговування, сталим часом T перебування заявки на циклі орбіти і *FCFS* дисципліною обслуговування. Таким чином, модель Лакатоша $M/M/1$ узагальнено за вхідним потоком і часом обслуговування.

Визначимо вкладений ланцюг Маркова і знайдемо умову його ергодичності.

Нехай t_n — момент надходження *n*-ї заявки, $t_n + Tk_n$ — момент початку її обслуговування. Зазначимо, що k_n — завжди ціле невід'ємне число, яке дорівнює кількості циклів *n*-ї заявки на орбіті. Нехай також $\xi_n = t_{n+1} - t_n$, Y_n — час обслуговування *n*-ї заявки.

Знайдемо співвідношення між k_n і k_{n+1}. Нехай $k_n = i$. Якщо $(k-1)T < Ti + Y_n - \xi_n < kT$, де $k \ge 1$ — ціле число, то $k_{n+1} = k$; якщо $Ti + Y_n - \xi_n < 0$, то $k_{n+1} = 0$. Таким чином, k_n є однорідним ланцюгом Маркова з імовірностями переходу $p_{ik} = P\{(k-i-1)T < Y_n - \xi_n < (k-i)T\}$, $k \ge 1$, та $p_{i0} = P\{Y_n - \xi_n < -Ti\}$.

Позначимо $f_j = P\{(j-1)T < Y_n - \xi_n < jT\}$. Маємо

$$f_j = \int_0^\infty [B(x + jT) - B(x + (j-1)T)]\, dA(x). \tag{2}$$

Тоді ймовірності переходу можна виразити так:

$$p_{ik} = f_{k-i}, \text{ якщо } 1 \le k \le i+1; \tag{3}$$

$$p_{i0} = \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j. \tag{4}$$

Сформулюємо та доведемо теорему ергодичності.

Теорема 1. Якщо ряд $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j$ абсолютно збігається, причому $\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j < 0$, то ланцюг Маркова (k_n) ергодичний.

Доведення. За умови, що $k_n = i$,

$$\mathrm{E}\{k_{n+1}\} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_{ik} = \sum_{k=1}^{\infty} kf_{k-i} = \sum_{j=1-i}^{\infty} (i+j) f_j = i \sum_{j=1-i}^{\infty} f_j + \sum_{j=1-i}^{\infty} jf_j \le i + \sum_{j=1-i}^{\infty} jf_j.$$

З умови теореми 1 випливає, що цей вираз завжди скінченний і менший, ніж $i-\varepsilon$, $i>N$. За критерієм Мустафи [14] ланцюг Маркова k_n додатний, тобто має стаціонарний розподіл.

Для встановлення його ергодичності достатньо довести, що він аперіодичний. Оскільки $\sum jf_j < 0$, то знайдеться таке $k>0$, що $f_{-k}>0$. Зафіксуємо значення $k_n = i$. Якщо $i \geq k$, то з імовірністю f_{-k} буде $k_{n+1} = i-k$; якщо $i<k$, то з імовірністю, не меншою f_{-k}, буде $k_{n+1}=0$. Таким чином, за скінченну кількість кроків зі стану (i) можна перейти в стан ($k_{n+l}=0$); після цього з імовірністю, не меншою f_{-k}, також буде $k_{n+l+1}=0$. Звідси випливає, що ланцюг Маркова k_n аперіодичний. Отже, він ергодичний.

Приклад 1. Підставляючи $dA(x)=\lambda e^{-\lambda x}dx$, $B(x)=1-e^{-\mu x}$, $x \geq 0$, у формулу (2), отримуємо

$$f_j = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-\mu(j-1)T}(1-e^{-\mu T}), \; j \geq 1,$$

$$f_j = \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{\lambda jT}(1-e^{-\lambda T}), \; j \leq 0.$$

Підсумувавши по j, одержимо

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f_j = \frac{1}{\lambda+\mu}\left(\frac{\lambda}{1-e^{-\mu T}} - \frac{\mu e^{-\lambda T}}{1-e^{-\lambda T}}\right).$$

Звідси випливає, що в цьому разі умова Лакатоша (1) виконується тоді і тільки тоді, коли виконується умова теореми 1.

Зауважимо, що систему типу Лакатоша можна застосовувати для оцінювання складнішої системи, в якій не обов'язкове обслуговування за дисципліною *FCFS*. Часто моделі з *FCFS* дисципліною обслуговування не є адекватними реальним системам. Як відомо, це стосується систем приземлення літаків, коли під час перебування в повітрі літака, відправленого на коло, може здійснюватися приземлення іншого літака. Якщо, однак, розглянути час W_n від моменту t_n до останнього моменту початку приземлення раніше прибулих літаків, то завжди буде $W_n \leq Tk_n$, а отже, умова теореми 1 гарантує ергодичність W_n — послідовності складнішої структури.

Виведемо рівняння для стаціонарного розподілу. Припустимо, що виконано умову теореми 1, і позначимо $\pi_k = \lim_{n\to\infty} P\{k_n = k\}$, $k \geq 0$. Маємо систему рівнянь

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i p_{ik}, \; k \geq 0; \tag{5}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k = 1. \tag{6}$$

З рівностей (3)–(5) маємо

$$\pi_k = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i f_{k-i}, \; k \geq 1; \tag{7}$$

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \sum_{j=-\infty}^{-i} f_j. \tag{8}$$

До рівнянь (7), (8) додається умова нормування (6). Систему (7), (8) можна розв'язати рекурентним способом. Приймемо умову, що час обслуговування заявки завжди менший або дорівнює T, тобто

$$B(T+)=1. \tag{9}$$

Припустимо також, що $f_{-1}>0$. У цьому разі з формули (2) випливає, що $f_j=0$, якщо усі $j\geq 2$. Маємо

$$\pi_k=\sum_{j=0}^{k+1}\pi_i f_{k-i},\ k\geq 1.$$

З цієї системи рівнянь усі невідомі $\pi_2, \pi_3, \ldots$ можна виразити через π_0 і π_1, наприклад, $\pi_2=\frac{1}{f_{-1}}(\pi_1(1-f_0)-\pi_0 f_1)$. Таким чином, маємо

$$\pi_k=a_k\pi_0+b_k\pi_1,\ k\geq 0, \tag{10}$$

де a_k, b_k — відомі константи ($a_0=1$, $b_0=0$, $a_1=0$, $b_1=1$). Підставляючи (10) у (8), отримуємо лінійне співвідношення між π_0 і π_1, що дає змогу всі π_k виразити через π_0. Для визначення π_0 достатньо використати умову нормування (6).

Розглянемо систему (7), (8). З урахуванням (9) умову ергодичності ланцюга Маркова (k_n) запишемо так:

$$\sum_{k=-\infty}^{1} kf_k<0. \tag{11}$$

Безпосередньо підстановкою можна пересвідчитися, що за умови (11) система (7), (8) має такий імовірнісний розв'язок:

$$\pi_j=(1-z)z^j,\ j\geq 1,$$

де z — корінь рівняння

$$\sum_{k=-\infty}^{1} f_k z^{-k}=1, \tag{12}$$

що лежить в інтервалі (0, 1).

Ліва частина рівняння (12) є опуклою у напівінтервалі (0, 1] функцією, що прямує до нескінченності за умови, що $z\to 0$, оскільки $f_1>0$, і дорівнює одиниці, якщо $z=1$. Крім того, ліва похідна цієї функції в точці $z=1$ додатна унаслідок умови (11). Отже, в інтервалі $(0,1)$ існує єдиний корінь рівняння (12).

Цей факт також випливає з теорії неперервних справа випадкових блукань [15].

Розглянемо важливий випадок, коли час обслуговування $Y_n=\tau$, t_n-t_{n-1} розподілений експоненціально з параметром λ. Тоді

$$f_1=1-e^{-\lambda\tau};$$

$$f_k=e^{-\lambda\tau+\lambda kT}(1-e^{-\lambda T}),\ k\leq 0.$$

Умова ергодичності (11) набуває вигляду $z<1$, де $z=e^{\lambda T}(1-e^{-\lambda\tau})$.

Нехай потік заявок, що надходять до системи є груповий пуассонівський, причому кількість ζ заявок в одній групі — геометрично розподілена випадкова величина

$$\mathrm{P}\{\zeta=k\}=(1-\theta)\theta^{k-1},\ k\geq 1,$$

а інтервали між групами є експоненціально розподілені випадкові величини з параметром λ. Тоді маємо таку формулу:

$$f_k=\theta 1_{\{k=1]}+(1-\theta)f_k^0,$$

де f_k^0 — значення f_k в ординарному (негруповому) потоці Пуассона з параметром λ; $1_{\{k=1]}$ — величина, що дорівнює 1, якщо $k=1$, та дорівнює 0 в іншому разі.

Для f_k^0 справджується така формула:

$$f_k^0 = e^{-\lambda(\tau - kT)}(1-e^{-\lambda T}), \text{ якщо } k \le 0;$$
$$f_1^0 = 1 - e^{-\lambda\tau}.$$

Для параметра z маємо рівняння

$$\frac{\theta}{z} + (1-\theta)\left(\frac{1-a}{z} + \frac{a(1-b)}{1-bz}\right) = 1$$

або

$$\theta + (1-\theta)\left(1 - a + az\frac{1-b}{1-bz}\right) = z,$$

де для спрощення запису позначено $a = e^{-\lambda\tau}$, $b = e^{-\lambda T}$. Розв'язавши його, отримаємо таку формулу для z за умови, що $z < 1$:

$$z = \frac{1-a+a\theta}{b} = \frac{1-e^{-\lambda\tau} + e^{-\lambda\tau}\theta}{e^{-\lambda T}}.$$

Якщо $\theta \to 0$, то $z \to \dfrac{1-a}{b}$, що відповідає випадкові пуассонівського потоку заявок.

Виведемо середні значення кількості заявок на орбіті і кількості циклів заявки на орбіті. Нехай $N(t)$ — кількість заявок на орбіті в момент t. Тоді інтеграл $\int_0^T N(t)dt$ є сумарний час перебування на орбіті тих заявок, що надійшли до системи в інтервалі $(0, T)$, за винятком залишкового часу очікування тих із них, що не були прийняті до обслуговування до моменту T. З ергодичних міркувань [14] у разі великих значень s маємо

$$\int_0^s \mathrm{E}[N(t)]dt \sim \lambda s \mathrm{E}[KT],$$
$$\lambda = 1 / \int_0^\infty x dA(x),$$

де K — стаціонарна версія k_n. Звідси ергодичне середнє значення кількості заявок на орбіті

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \mathrm{E}[N(t)] = \lambda T \sum_{k=0}^\infty k(1-z)z^k = \frac{\lambda T z}{1-z}.$$

Стаціонарне середнє значення кількості $\overline{K}$ циклів заявки на орбіті визначається формулою: $\overline{K} = \dfrac{z}{1-z}$.

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМИ $GI/G/1$ ТИПУ ЛАКАТОША З T-ПОВЕРНЕННЯМ

Використаємо метод статистичного моделювання (Монте-Карло) для отримання чисельних характеристик СМО і перевіримо їхню узгодженість з аналітичними результатами, отриманими вище. Для оцінювання характеристик систем обслуговування застосуємо метод прямого моделювання. Змоделюємо систему обслуговування як випадковий процес з дискретним часом $\{X_n, n \ge 1\}$, де X_n — вектор розмірності k, що містить інформацію про шукані характеристики системи обслуговування; n — деякі моменти часу, які обираються в залежності від задачі моделювання. Для генерації псевдовипадкових чисел використовувався модуль AMRandom фірми ESB Consultancy [16], автором якого є Алан Міллер.

Перевіримо умову ергодичності системи обслуговування $M/D/1$ типу Лакатоша з T-поверненням вимог.

Нехай вимоги (заявки) надходять до системи за законом Пуассона з інтенсивністю λ; час обслуговування сталий і дорівнює τ. Нехай час вимоги на орбіті теж сталий і дорівнює T ($T \geq \tau$). Спочатку знайдемо аналітичний вираз умови ергодичності для цієї системи обслуговування. Маємо

$$f_j = e^{j\lambda T} e^{-\lambda\tau}[1-e^{-\lambda T}], \; j \leq 0;$$

$$f_j = 1-e^{-\lambda\tau}, \; j=1;$$

$$f_j = 0, \; j>1.$$

Розглянемо ряд
$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} jf_j = 1-\frac{e^{-\lambda\tau}}{1-e^{-\lambda T}}.$$

Тоді, позначивши $\rho = \lambda\tau$, отримаємо таку умову ергодичності для цієї системи:

$$\rho < \ln\left(\frac{1}{1-e^{-\lambda T}}\right). \tag{13}$$

Моделюємо цю систему обслуговування випадковим процесом з дискретним часом $\{X_n, n \geq 1\}$, де X_n — кількість вимог у системі; n — моменти надходження вимог.

Наведемо алгоритм моделювання залежності кількості вимог в системі від часу.

Крок 1. Введення параметрів (вважатимемо, що інтенсивність вхідного потоку $\lambda = 1$): $\rho = \lambda\tau = 1 \cdot \tau = \tau$ — завантаження системи/час обслуговування; T — час вимоги на орбіті; N — кількість вимог, що надходять до системи.

Крок 2. Ініціалізація змінних: $N_L \leftarrow 0$, оскільки спочатку кількість вимог у системі дорівнює нулю.

Кожна вимога в системі задається інтервалом часу між поточним моментом часу та моментом, коли вимога залишає систему (моментом завершення її обслуговування) $\gamma_i, \; i = 1, \ldots, N$.

До системи надходить перша вимога. Тоді $\gamma_1 \leftarrow \tau$, $N \leftarrow 1$, $C \leftarrow 1$ — лічильник кількості вимог, що надійшли до системи.

Крок 3. Основна частина алгоритму.

Генеруємо експоненціально розподілений з параметром $\lambda = 1$ проміжок часу між надходженням вимог $\xi \leftarrow -\ln(1-\omega)$, де ω — випадкова величина, рівномірно розподілена на відрізку [0, 1]; $C \leftarrow C+1$, оскільки до системи надходить наступна вимога.

Проводимо перерахування значень γ_i та N:

$$\gamma_i \leftarrow \gamma_i - \xi, \; i = 1, \ldots, N_L,$$

$$N_L \leftarrow \sum_{i=1}^{N_L} I\{\gamma_i > 0\},$$

де $I\{\cdot\}$ — індикаторна функція. Вилучаємо з масиву γ_i^L усі нульові та від'ємні елементи.

Оскільки в цій системі вимогу, що надходить, буде обслуговано останньою, знаходимо таке мінімальне ціле $j > 0$, для якого виконується нерівність $\gamma_i < jT$, $i = 1, \ldots, N_L$. Тоді

$$\gamma_{N_L+1} \leftarrow jT + \tau,$$

$$N_L \leftarrow N_L + 1.$$

Крок 4. Перевірка, чи всі вимоги надійшли до системи. Якщо $C < N$, то повертаємося до кроку 3.

Роботу алгоритму закінчено.

У результаті роботи цього алгоритму отримуємо залежність кількості вимог в системі від часу.

Нехай параметр вхідного потоку $\lambda = 1$, час вимоги на орбіті $T = 1.5$. Тоді з (13) випливає, що нерівність $\rho < -\ln(1 - e^{-1.5}) \approx 0.2525$ буде умовою ергодичності для цієї системи. Перевіримо це твердження за допомогою моделювання. Наведемо вигляд можливих залежностей кількості вимог у системі від часу для випадків $\rho = 0.2$, $\rho = 0.252$, $\rho = 0.253$, $\rho = 0.4$ (рис. 1–4). Зокрема, з рис. 1 можна

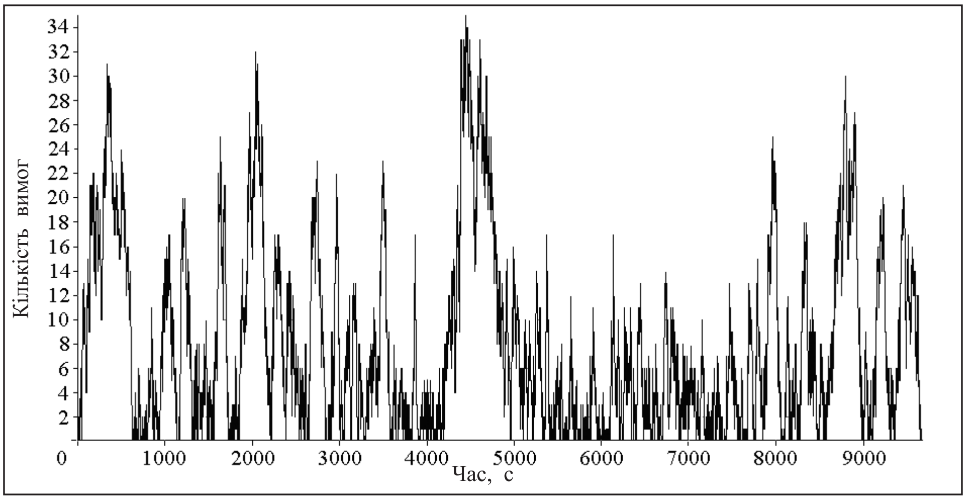

Рис. 1. Залежність кількості вимог у системі від часу, $\rho = 0.2$

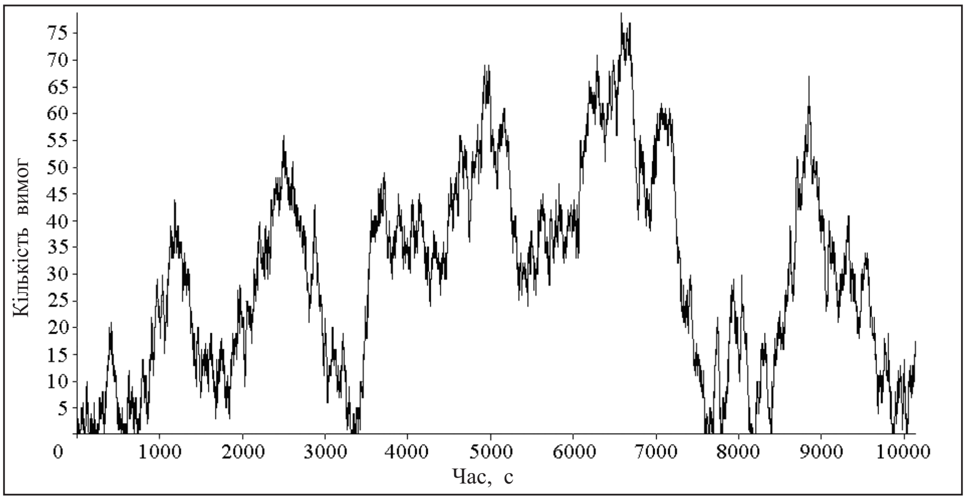

Рис. 2. Залежність кількості вимог у системі від часу, $\rho = 0.252$

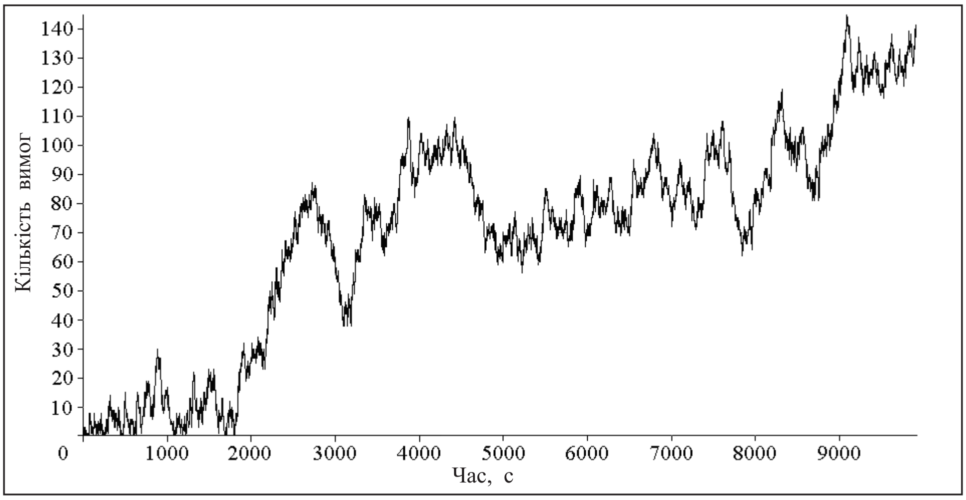

Рис. 3. Залежність кількості вимог у системі від часу, $\rho = 0.253$

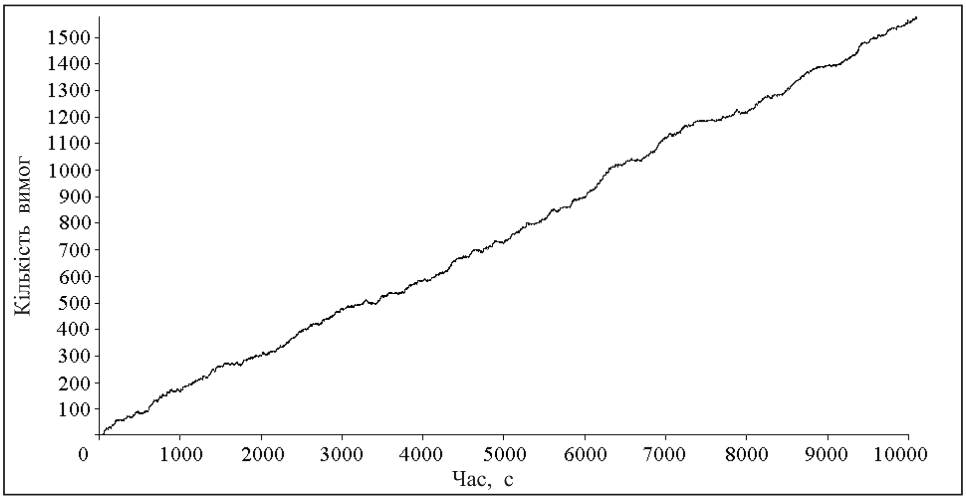

Рис. 4. Залежність кількості вимог у системі від часу, $\rho = 0.4$

зробити емпіричний висновок, що система ергодична, оскільки вона розвантажується і кількість вимог у середньому не зростає з часом. Із рис. 2 робимо емпіричний висновок, що система залишається ергодичною, але розвантаження відбуваються рідше. З рис. 3 випливає, що кількість вимог у системі у середньому зростає з часом, отже, емпірично робимо висновок, що система вже не буде ергодичною. З рис. 4 видно, що швидкість зростання кількості вимог у системі зростає, емпірично приходимо до висновку, що система не ергодична.

Таким чином, результати моделювання підтверджують справедливість формули (13).

Побудуємо графіки ергодичного середнього значення кількості заявок на орбіті в залежності від різного набору параметрів системи рис. 5–7.

Графіки на рис. 5–7 наочно демонструють, що у разі певного співвідношення параметрів системи кількість заявок на орбіті стрімко починає зростати. Цей факт свідчить про те, що у разі збільшення нефіксованого параметра системи нерівність (13) виконуватися не буде.

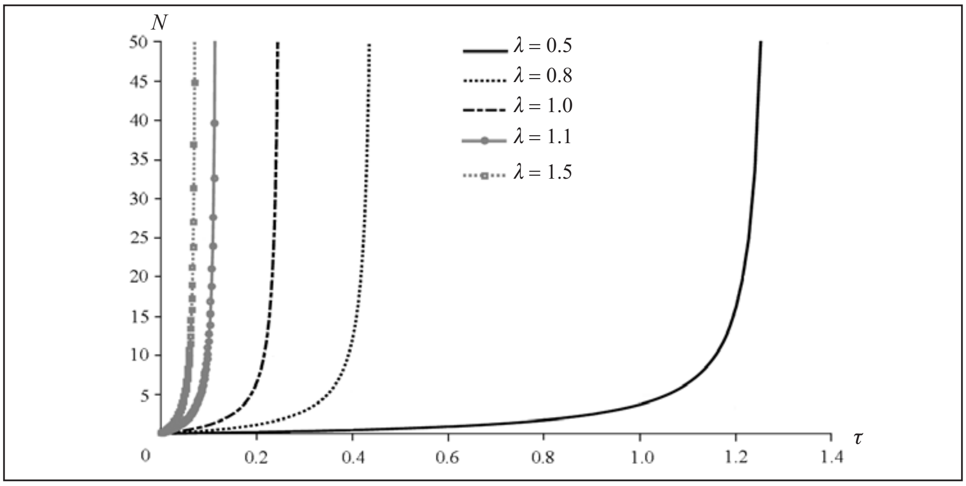

Рис. 5. Залежність ергодичного середнього значення кількості заявок на орбіті N від τ за умов, що $\lambda = \{0.5, 0.8, 1.0, 1.1, 1.5\}$, $T = 1.5$

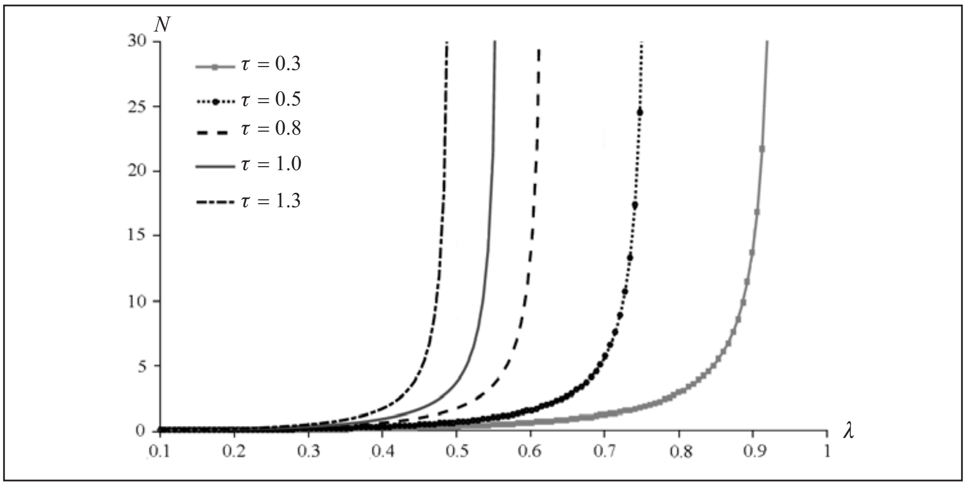

Рис. 6. Залежність ергодичного середнього значення кількості заявок на орбіті N від λ за умов, що $\tau = \{0.3, 0.5, 0.8, 1.0, 1.3\}$, $T = 1.5$

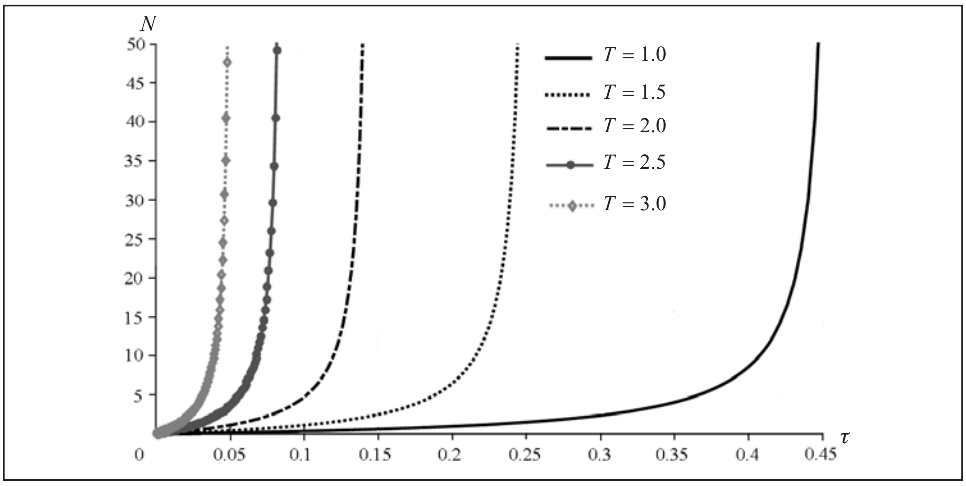

Рис. 7. Залежність ергодичного середнього значення кількості заявок на орбіті N від τ за умов, що $\lambda = 1.0$, $T = \{1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0\}$

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто одноканальну систему обслуговування $GI / G / 1$ типу Лакатоша з T-поверненням заявок. Прикладами застосування такої системи є різноманітні вузли телекомунікаційних мереж, керування рухом літаків під час заходження на посадку, мікрокільцеві резонатори, оптичні лінії затримки тощо. Для розглядуваної системи віднайдено умову ергодичності, за певного співвідношення часу обслуговування та часу перебування на орбіті знайдено стаціонарний розподіл відповідного ланцюга Маркова. Як показники ефективності функціонування системи розглянуто середню кількість заявок на орбіті та середню кількість циклів орбіти. Отримані результати аналітичного та статистичного моделювання узгоджуються між собою.

Система Лакатоша, не зважаючи на своєрідну організацію черги, має важливе значення, оскільки вона може слугувати для оцінювання більш складної системи, у якій зняте обмеження обслуговування за дисципліною *FCFS*.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Artalejo J. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 1990–1999. *Top*. 1999. N 7. P. 187–211.
2. Artalejo J. A classified bibliography of research in retrial queueing. Progress in 2000–2009. *Mathematical and Computer Modeling.* 2010. Vol. 51. P. 1071–1081.
3. Serebriakova S.V. Algorithm of the statistical modeling of retrial queuing system $GI / G / m / 0 / /K / D$. *Proc. Aviation in the XXI Century*. October, 2018, Kyiv, Ukraine. P. 4.3.47–4.3.50.
4. Кузнецов Д.Ю., Назаров А.А. Адаптивные сети случайного множественного доступа. Томск: Дельтаплан, 2002. 254 с.
5. Rogiest W., Laevens K., Fiems D., Bruneel H. A performance model for an asynchronous optical buffer. *Performance Evaluation*. 2005. Vol. 62. P. 313–330.
6. Rhung-Duc T., Rogiest W., Takahashi Y., Bruneel H. Retrial queues with balanced call blending analysis of single-server and multiserver model. *Annals of Operations Research*. 2016. Vol. 239, Iss. 2. P. 429–449.
7. Коваленко И.Н., Коба Е.В. Три системы обслуживания с повторными вызовами, отражающие некоторые особенности процесса посадки воздушных судов. *Проблемы управления и информатики*. 2002. № 2. С. 78–82.
8. What does a day of bad weather look like? (2014). URL: https://youtu.be/brX sub VhOU3qQ.
9. Lakatos L. A probability model connected with landing of airplanes. *Safery and Reliability*. Vol. 1. Balkema A. (Ed.). Rotterdam: Brookfield, 1999. P. 151–154.
10. Коба Е.В., Пустовая С.В. Системы обслуживания типа Лакатоша, их обобщение и применение. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. № 3. С. 78–90.
11. Коба Е.В. Системы обслуживания с циклическим временем возвращения заявок и диспетчеризацией. *Кибернетика и системный анализ.* 2019. Т. 55, № 6. С. 54–61.
12. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. Introduction to queueing systems with telecommunication applications. Springer Science & Business Media, 2012. 388 p. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15142-3 (2019).
13. Коба Е.В. Система типа $M / M / 1 / 0$ с повторением и комбинированной дисциплиной обслуживания *Кибернетика и системный анализ.* 2017. Т. 53, № 3. С. 67–72.
14. Бочаров П.П., Печинкин А.А. Теория массового обслуживания. Москва: Изд-во РУДН, 1995. 528 с.
15. Королюк В.С., Боровских Ю.В. Аналитические асимптотики вероятностных распределений. Киев: Наук. думка, 1981. 348 с.
16. Riply B.D. Thoughts on pseudorandom number generators. *J. Comput. Appl. Math*. 1990. Vol. 31. P. 153–163.

Надійшла до редакції 17.07.2020

Е.В. Коба, С.В. Серебрякова

СИСТЕМА ОБСЛУЖИВАНИЯ $GI/G/1$ ТИПА ЛАКАТОША С T-ВОЗВРАЩЕНИЕМ

Аннотация. Рассмотрена система обслуживания $GI/G/1$ типа Лакатоша с T-возвращением заявок, т.е. система с *FCFS* дисциплиной обслуживания и постоянным временем T цикла орбиты. Для такой системы построена цепь Маркова, доказано условие эргодичности, при определенном соотношении времени обслуживания и времени пребывания на орбите решена система уравнений для стационарного распределения вероятностей состояний системы, выведены формулы для средних показателей количества заявок и количества циклов заявки на орбите. Разработан алгоритм статистического моделирования функционирования системы. Результаты аналитического и статистического моделирования согласуются. Указано важное свойство систем типа Лакатоша: она может применяться для оценки системы, в которой обслуживание с дисциплиной *FCFS* необязательно.

Ключевые слова: системы массового обслуживания с возвращением заявок, система типа Лакатоша, системы с циклическим временем ожидания, система с T-возвращением, орбита, цикл орбиты, цепь Маркова, эргодичность системы обслуживания.

O.V. Koba, S.V. Serebriakova

$GI/G/1$ LAKATOS-TYPE QUEUEING SYSTEM WITH T-RETRIALS

Abstract. Authors consider the Lakatosh-type $GI/G/1$ queueing system with T-retrials, i.e., the system with the *FCFS* service discipline and a constant cycle time T of the orbit. Here we construct the Markov chain for the system, prove its ergodicity condition, solve the system of equations for the stationary distribution of the system state probabilities, and derive formulas for the average number of requests and the average number of the orbit cycles at a specific ratio of service time and orbit time. Also, we develop an algorithm for statistical modeling of the considered system. Results of analytical and statistical modeling show consistency between them. Authors indicate an essential property of the Lakatos-type system, namely, that we can use it to evaluate a system in which the *FCFS* service order is not necessary.

Keywords: retrial queues, Lakatos-type queueung system, cyclic queueing systems, queueing system with T-retrials, orbit, orbit cycle, Markov chain, queueing system ergodicity.

Коба Олена Вікторівна,
докторка фіз.-мат. наук, доцентка, провідна наукова співробітниця Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України; професорка Національного авіаційного університету, Київ,
e-mail: ekoba2056@gmail.com.

Серебрякова Світлана Вікторівна,
кандидатка техн. наук, доцентка, наукова співробітниця Інституту кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України; доцентка Національного авіаційного університету, Київ, e-mail: svitlaspv@gmail.com.