УДК 519.6:004.942

А.Ф. ВЕРЛАНЬ, П.С. МАЛАЧІВСЬКИЙ, Я.В. ПІЗЮР

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ СПОСТЕРЕЖЕНЬ З ВИКОРИСТАННЯМ СПЛАЙН-НАБЛИЖЕННЯ СКАНОВАНОЇ ФУНКЦІЇ

Анотація. Подано аналіз точності числової реалізації частотного методу розв'язування інтегрального рівняння в задачі інтерпретації технічних спостережень із використанням сплайн-наближення сканованої функції. Досліджено алгоритм розв'язання інтегрального рівняння задачі інтерпретації, що ґрунтується на застосуванні методу регуляризації Тихонова з пошуком розв'язку в частотній області з урізанням спектру частот. Для підвищення точності результатів інтерпретації запропоновано застосування сплайн-наближення значень сканованої функції, тобто правої частини інтегрального рівняння. Отримано оцінку точності розв'язку інтегрального рівняння із застосуванням методу регуляризації та врахуванням похибки, що супроводжується неточністю задання правої частини, а також похибки обчислення значень ядра. Запропоновано спосіб обчислення оптимального за точністю степеня згладжувального сплайн-наближення сканованої функції.

Ключові слова: задача інтерпретації, інтегральне рівняння Фредгольма, метод регуляризації Тихонова, урізання спектру частот, сплайн-наближення, оцінка точності.

ВСТУП. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

У теорії та практиці створення засобів вимірювання та спостереження суттєве значення має задача забезпечення та підвищення точності, у розв'язанні якої важливу роль відіграють математичні методи інтерпретації спостережень [1–3]. Точність опрацювання сигналів визначає якість систем автоматичного керування складними об'єктами, систем диспетчерського керування електроенергетичними та газотранспортними мережами тощо [1, 4]. Для опрацювання сигналів потрібно використовувати ефективні алгоритми, а під час аналізу їхньої точності враховувати всі можливі джерела похибок [5–8].

Задача інтерпретації спостережень зводиться до кутової редукції сигналів, яка описується інтегральним рівнянням Фредгольма першого роду вигляду [1, 2, 9]

$$\int_a^b R(\theta-\theta')P(\theta')\,d\theta' = U(\theta), \qquad a \le \theta \le b, \tag{1}$$

де $P(\theta)$ — сигнал на вході засобу вимірювання (вхідна функція), θ — значення поточного кута вимірювального елемента (антени), $[a, b]$ — область вимірювання (визначення), $R(\theta)$ — функція, яка описує діаграму направленості (ядро інтегрального рівняння), $U(\theta)$ — значення виміряного сигналу на виході (права частина інтегрального рівняння).

Розв'язок рівняння (1) обчислюватимемо за методом регуляризації Тихонова q-го порядку з урізанням спектру частот [10–12]

$$P(\theta) = P_\alpha(\theta) = \int_a^b Q(\theta'-\theta)U(\theta')\,d\theta',\ \ \theta \in [a, b], \tag{2}$$

де

$$Q(\theta) = Q_\alpha(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{\max}} G(\omega)\cos(\omega\theta)\,d\omega, \tag{3}$$

$$G(\omega)=\frac{\lambda(\omega)}{\lambda^2(\omega)+\alpha\omega^{2q}},\ q\ge 0, \tag{4}$$

$$\lambda(\omega)=2\int_0^q R_G(\omega)\cos(\omega\theta)\,d\omega, \tag{5}$$

$$R_G(\theta)=\frac{1}{\omega_{\max}-\omega_1}\int_{\omega_1}^{\omega_{\max}} R_\omega(\theta)\,df, \tag{6}$$

а $R_\omega(\theta)$ — характеристика напруженості електромагнітного поля діаграми направленості на частоті ω.

Сканована функція $U(\theta)$ — права частина рівняння (1), задана на відрізку $[a,b]$ своїми значеннями в дискретних точках $\theta_i=a+ih,\ i=\overline{0,n},\ h=(a+b)/n$ з деякою похибкою. З вигляду лівої частини рівняння (1) випливає, що $U(\theta)$ є гладкою функцією аргументу θ, $a\le\theta\le b$. Для отримання значень функції $U(\theta)$ на відрізку $[a,b]$ можна використати наближення, що побудовано за її виміряними значеннями в дискретних точках $i=\overline{0,n}$. Якщо вимірювання проведено з високою точністю, то для опису функції $U(\theta)$ оптимально використати чебишовське наближення [13–15]. Оскільки на результати вимірювання можуть впливати деякі випадкові фактори, то в цьому разі доцільно використовувати згладжувальне сплайн-наближення [16–18].

Отже, дослідження можливості підвищення точності розв'язування рівняння (1) за можливої наявності випадкових похибок у результатах вимірювання $U(\theta_i)$, $i=\overline{0,n}$, полягає у знаходженні функції $f^*(\theta)\in W_2^m$, яка забезпечує досягнення мінімуму функціонала [16]

$$\Phi(f)=\sum_{i=0}^{n} p_i[U(\theta_i)-f(\theta_i)]^2+p\int_a^b[f^{(m)}(t)]^2\,dt, \tag{7}$$

де p, $p\ge 0$, — допоміжний параметр, а p_i, $p_i\ge 0$, — задані числа. Очевидно, що для більших значень функція $f(\theta_i)$ з меншою похибкою відтворює спостережувані значення $U(\theta_i)$. Значення повинні узгоджуватися з точністю вимірювання. Допускаючи можливість деякого відхилення функції $f(\theta_i)$ від значень $U(\theta_i)$, $i=\overline{0,n}$, інколи можна навіть достовірніше відобразити характер залежності цих значень, тобто дещо їх підправити [18].

Відповідно до [16] мінімум функціонала (7) досягається на функції, яка є сплайном порядку $2m-1$. Для $m=1$ це буде ламана, для $m=2$ — кубічний сплайн. Сплайн $S_{2m-1}(\theta)$, який мінімізує (1), задовольняє умову

$$p_i[U(\theta_i)-S_i]+(-1)^{m-1}p\left[S_{2m-1}^{(2m-1)}\left(\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\right)-S_{2m-1}^{(2m-1)}\left(\frac{\theta_i+\theta_{i-1}}{2}\right)\right]=0, \tag{8}$$

де

$$S_i=S_{2m-1}(\theta_i),\ i=\overline{0,n},\ S_{2m-1}^{(2m-1)}\left(\frac{\theta_{i+1}+\theta_i}{2}\right)=0,\ i=\overline{0,n}.$$

Для $m=1$ згладжувальний сплайн визначають з умов

$$p_i[U(\theta_i)-S_i]+p\frac{S_{i+1}-2S_i+S_{i-1}}{h}=0, \tag{9}$$

$$(S_{-1}=S_0,\ S_{n+1}=S_n),\quad i=0,n,$$

або

$$-p\frac{S_{i+1}}{p_ih}+\left[1+\frac{2p}{hp_i}\right]S_i-\frac{p}{hp_i}S_{i-1}=U(\theta_i),\ i=\overline{0,n},\quad (S_{-1}=S_0,\ S_{n+1}=S_n).$$

Обчислення невідомих значень S_i сплайн-наближення для $m=1$ зводиться до розв'язування тридіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Аналогічно обчислення значень параметрів кубічного сплайна для $m=2$ зводиться до розв'язування п'ятидіагональної системи лінійних алгебраїчних рівнянь [16].

ПОХИБКА СПЛАЙН-АПРОКСИМАЦІЇ СКАНОВАНОЇ ФУНКЦІЇ

Оцінимо похибку наближення правої частини $U(\theta)$ згладжувальним сплайном $S_{2m-1}(\theta)$. Оскільки $S_{2m-1}(\theta)$ мінімізує функціонал (7), то

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} p_i [U(\theta_i)-S_{2m-1}(\theta_i)]^2 + p\int_a^b [S_{2m-1}^{(m)}(t)]^2\,dt \le \\ \le \sum_{i=0}^{n} p_i [U(\theta_i)-\widetilde{S}_{2m-1}(\theta_i)]^2 + p\int_a^b [\widetilde{S}_{2m-1}^{(m)}(t)]^2\,dt\end{aligned} \quad (10)$$

де $\widetilde{S}_{2m-1}^{(m)}(t)$ — інтерполяційний сплайн. Похибка інтерполяційного сплайна оцінюється співвідношенням [16]

$$|\widetilde{S}_{2m-1}^{(k)}(t)| \le C_m \|U^{(k)}(\theta)\|_{C[a,b]}, \; k \le 2m-1, \quad (11)$$

де C_m — деяка константа, яка залежить від m, а $\| \; \|_{C[a,b]}$ — норма у просторі неперервних на $[a,b]$ функцій. Враховуючи (11), для сплайн-наближення $S_{2m-1}(\theta)$ можна записати

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} p_i [U(\theta_i)-S_{2m-1}(\theta_i)]^2 + p\int_a^b [S_{2m-1}^{(m)}(t)]^2\,dt \le \\ \le C_{mp} \|U^{(k)}(\theta)\|_{C[a,b]}^2 (b-a),\end{aligned} \quad (12)$$

де C_{mp} — деяка константа, яка залежить від m і p. З нерівності (12) для оцінки похибки сплайн-наближення $S_{2m-1}(\theta)$ отримуємо

$$\max_{i=\overline{0,n}} \left| U(\theta_i) - S_{2m-1}(\theta_i) \right| \le \frac{C_{mp}}{\min\limits_{i=\overline{0,n}} p_i} \|U^{(m)}(\theta)\|_{C[a,b]}^2 (b-a). \quad (13)$$

Враховуючи згладжувальні властивості сплайна $S_{2m-1}(\theta)$, можна зробити висновок, що існує функція $\widetilde{U}(\theta)$, яка збігається з $S_{2m-1}(\theta)$ у точках θ_i, $i=\overline{0,n}$. Для функції $\widetilde{U}(\theta)$ виконується нерівність [16]

$$\|U(\theta)-\widetilde{U}(\theta)\|_{C[a,b]} \le \frac{A\,C_{mp}}{\min\limits_{i=\overline{0,n}} p_i} \|U^{(m)}(\theta)\|_{C[a,b]}^2 (b-a), \quad (14)$$

де A — деяка константа, а $\widetilde{U}(\theta)$ — функція, властивості гладкості якої еквівалентні властивостям гладкості $U(\theta)$. Тоді сплайн $S_{2m-1}(\theta)$ буде інтерполювати $U(\theta)$ і для нього буде справедливою оцінка

$$\|\widetilde{U}(\theta)-S_{2m-1}(\theta)\|_{C[a,b]} \le C_{mk} h^k \omega(\widetilde{U}^{(k)}, h), \quad k \le 2m-1, \quad (15)$$

де $\omega(\widetilde{U}^{(k)}, h)$ — модуль неперервності функції $\widetilde{U}^{(k)}(\theta)$, а C_{mk} — деяка константа, яка залежить від m і k. Відповідно до зроблених нами припущень щодо функції $\widetilde{U}^{(k)}(\theta)$ маємо

$$\omega(\widetilde{U}^{(k)}, h) \le A_1 \omega(U^{(k)}, h). \quad (16)$$

Отже, для оцінки похибки сплайн-наближення сканованої функції отримуємо

$$\|U(\theta)-S_{2m-1}(\theta)\|_{C[a,b]} \le \|U(\theta)-\widetilde{U}(\theta)\|_{C[a,b]} + \|\widetilde{U}(\theta)-S_{2m-1}(\theta)\|_{C[a,b]} \le$$

$$\le \frac{A\,C_{mp}}{\min\limits_{i=\overline{0,n}} p_i}\|U^{(m)}(\theta)\|^2_{C[a,b]}(b-a)+A_1C_{mk}h^k\omega(U^{(k)},h),\ \ k\le 2m-1. \quad (17)$$

Згідно з оцінкою (17) збільшення m не спричиняє значного зменшення похибки сплайн-апроксимації функції $U(\theta)$. Водночас оцінка (17) містить величини $\|U^{(m)}(\theta)\|^2_{C[a,b]}$ і $\omega(U^{(k)},h)$, які не можна визначити за відсутності інформації про величину вхідного сигналу. Тому доцільно конкретизувати оцінку (17) за певного вибору ядра $R(\theta)$ і найбільш характерних вхідних сигналів.

Розглянемо, наприклад, ядро

$$R(\theta)=\frac{1}{1+A}\left(\exp\left(-\frac{\theta}{2\beta^2}\right)+A\right) \quad (18)$$

і припустимо, що вхідний сигнал має вигляд

$$p(\theta)=\alpha\delta(\theta-\theta_0),\ \ a\le\theta\le b. \quad (19)$$

Тоді функція $U(\theta)$ у правій частині рівняння (1) буде мати вигляд

$$U(\theta)=\frac{\alpha}{1+A}\left(\exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\alpha\beta^2}\right)+A\right). \quad (20)$$

Визначимо r-ту похідну функції $U(\theta)$

$$\frac{d^r}{d\theta^r}U(\theta)=\frac{\alpha}{1+A}\exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\alpha\beta^2}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{r+2}{2}\right]}\frac{(\theta-\theta_0)^{2\left(k+\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}(-1)^{2\left(\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)+r+k}\,r!\left(2\left(\left[\frac{r+2}{2}\right]-k\right)-1\right)!!}{\left(\left[\frac{r+2}{2}\right]-k\right)!\left(r-\left[\frac{r+2}{2}\right]+k\right)!}, \quad (21)$$

де $\left[\frac{r}{2}\right]$ — ціла частина від частки $\frac{r}{2}$. Для $r\ge 2$ отримуємо оцінку

$$\left|\frac{d^r}{d\theta^r}U(\theta)\right|\le\frac{\alpha}{1+A}\exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\alpha\beta^2}\right)\times$$

$$\times\sum_{k=0}^{\left[\frac{r+2}{2}\right]}\frac{(\theta-\theta_0)^{2\left(k+\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}{\beta^{r+2\left(k+\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}\frac{r!\left(2\left(\left[\frac{r+2}{2}\right]-k\right)-1\right)!!}{\left(\left[\frac{r+2}{2}\right]-k\right)!\left(r-\left[\frac{r+2}{2}\right]+k\right)!}\le$$

$$\leq \frac{\alpha}{1+A}\exp\left(-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\alpha\beta^2}\right)\frac{(\theta-\theta_0)^{2\left(\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}{\beta^{r+2\left(\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}\left(\frac{r(r-1)}{2}\right)!\exp\left(\frac{(\theta-\theta_0)^2}{\beta^2}\right)\leq$$

$$\leq \frac{\alpha}{1+A}\frac{(b-a)^{2\left(\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}{\beta^{r+2\left(\frac{r}{2}-\left[\frac{r}{2}\right]\right)}}\left(\frac{r(r-1)}{2}\right)!\exp\left(\frac{(b-a)^2}{\beta^2}\right).$$

Для модуля неперервності диференційовної функції справджується нерівність

$$\left|\omega(f,h)\right|\leq \|f'\|h\leq\|f'\|(b-a). \tag{22}$$

Отже, для розглядуваного вхідного сигналу матимемо

$$\|U(\theta)-S_{2m-1}(\theta)\|\leq\frac{AC_{mp}}{\min\limits_{i=\overline{0,n}}p_i}\times$$

$$\times\left[\frac{\alpha}{1+A}\frac{(b-a)^{2\left(\frac{m}{2}-\left[\frac{m}{2}\right]\right)}}{\beta^{m+2\left(\frac{m}{2}-\left[\frac{m}{2}\right]\right)}}\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)!\exp\left(\frac{(b-a)^2}{\beta^2}\right)\right]^2(b-a)+ \tag{23}$$

$$+A_1C_{mk}h^{k+1}\left[\frac{\alpha}{1+A}\frac{(b-a)^{2\left(\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)}}{\beta^{k+1+2\left(\frac{k+1}{2}-\left[\frac{k+1}{2}\right]\right)}}\left(\frac{(k+1)k}{2}\right)!\exp\left(\frac{(b-a)^2}{\beta^2}\right)\right],\quad k\leq 2m-1.$$

Аналогічно можна отримати оцінку для довільного вхідного сигналу, враховуючи, що

$$|U^{(2)}(\theta)|=\left|\int_a^b R^{(2)}(\theta-\theta')P(\theta')d\theta'\right|\leq\|R^{(2)}(\theta)\|_{C[a,b]}\left|\int_a^b p(\theta')d\theta'\right|. \tag{24}$$

ОЦІНКА ПОХИБКИ РОЗВ'ЯЗКУ ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ І ВИБІР СТЕПЕНЯ СПЛАЙНА

Оцінимо похибку розв'язку інтегрального рівняння (1), отриманого з використанням методу регуляризації Тихонова з пошуком розв'язку в частотній області з урізанням спектру частот. Нехай $R(\theta)\in L^1[a,b]$, $P(\theta)\in X$, $X\subseteq W_2^l[a,b]$, $l\geq 1$, $U(\theta)\in Y$, $Y\subseteq L^2[a,b]$. Визначимо функції $P_\alpha^\delta(\theta)$ і $P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)$ як розв'язки, які мінімізують згладжувальний функціонал

$$\left\|\int_a^b R_\varepsilon(\theta'-\theta)P(\theta')\,d\theta'-U(\theta)\right\|_{L^2}+\alpha\|P(\theta)\|_{W_2^l} \tag{25}$$

для неточно заданого ядра $\|R_\varepsilon(\theta-\theta')-R(\theta-\theta')\|\leq\varepsilon$ і правої частини $\|U_\delta(\theta)-U(\theta)\|\leq\delta$. Функції $P_\alpha^\delta(\theta)$ і $P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)$ можна отримати аналогічно до розв'язку $P_\alpha(\theta)$ рівняння (2). Функція $P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)$ визначається як розв'язок рівняння

$$P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_a^b Q^{\varepsilon\delta}(\theta'-\theta)U_\delta(\theta')\,d\theta',\ \theta\in[0,b],\tag{26}$$

де

$$Q^{\varepsilon\delta}(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{\max}} G_\alpha^{\varepsilon\delta}(\omega)\cos(\omega\theta)d\omega,\qquad G_\alpha^{\varepsilon\delta}(\omega)=\frac{\lambda^\varepsilon(\omega)}{\lambda^2(\omega)+\delta\lambda^2(\omega)+\alpha\omega^{2q}},$$

$$\lambda^\varepsilon(\omega)=2\int_0^q R_G^\varepsilon(\omega)\cos(\omega\theta)d\omega,\qquad R_G^\varepsilon(\theta)=\frac{1}{f_{\max}-f_1}\int_{f_1}^{f_{\max}} R_f^\varepsilon(\theta)\,df,$$

а $P_\alpha^\delta(\theta)$ задовольняє рівняння

$$P_\alpha^\delta(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_a^b Q(\theta'-\theta)U_\delta(\theta')\,d\theta',\ \theta\in[0,b],$$

в якому $Q(\theta)$ визначається за формулою (3).

Похибка розв'язку інтегрального рівняння (1) дорівнює

$$\begin{aligned}\Delta(\theta)\equiv P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)-P(\theta)=\lfloor P_\alpha(\theta)-P(\theta)\rfloor+\lfloor P_\alpha^\delta(\theta)-P_\alpha(\theta)\rfloor+\\+[P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)-P_\alpha^\delta(\theta)]=\Delta_1(\theta)+\Delta_2(\theta)+\Delta_3(\theta).\end{aligned}\tag{27}$$

Враховуючи точний розв'язок рівняння (1)

$$P(\theta)=\int_a^b Q^*(\theta'-\theta)U(\theta')\,d\theta',\tag{28}$$

де $Q^*(\theta'-\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_{\max}}\frac{\cos(\omega\theta)}{\lambda(\omega)}d\omega$, отримуємо

$$\Delta_1(\theta)\equiv P_\alpha(\theta)-P(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\int_0^{\omega_{\max}}\frac{G_\alpha(\omega)\lambda(\omega)-1}{\lambda(\omega)}\cos[\omega(\theta'-\theta)]\,d\omega\,d\theta',\tag{29}$$

$$\Delta_2(\theta)\equiv P_\alpha^\delta(\theta)-P_\alpha(\theta)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\int_0^{\omega_{\max}}G_\alpha(\omega)\cos[\omega(\theta'-\theta)][U_\delta(\theta')-U(\theta')]\,d\omega\,d\theta',\tag{30}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3(\theta)\equiv P_\alpha^{\varepsilon\delta}(\theta)-P_\alpha^\delta(\theta)=\\=\frac{1}{\pi}\int_a^b\int_0^{\omega_{\max}}\frac{(\lambda^2(\omega)+\alpha\omega^{2q})(\lambda^\varepsilon(\omega)-\lambda(\omega))-\alpha\omega^{2q}}{(\lambda^2(\omega)+\delta\lambda^2(\omega)+\alpha\omega^{2q})(\lambda^2(\omega)+\alpha\omega^{2q})}\cos[\omega(\theta'-\theta)]\,d\omega\,d\theta'.\end{aligned}\tag{31}$$

Значення $\Delta_1(\theta)$ характеризує похибку, зумовлену застосуванням методу регуляризації, $\Delta_2(\theta)$ — похибку, спричинену неточністю задання правої частини, а $\Delta_3(\theta)$ — похибку, зумовлену неточністю задання ядра. Оцінювання цих похибок грунтується на методі, запропонованому в [19]. Цей метод полягає в дослідженні квадрата модуля Фур'є-образу ядра $R(\theta)$ на нескінченності та в околах нулів по дійсній осі ω.

Розглянемо випадок $X\subseteq C[a,b]$, а $Y\subseteq L^2[a,b]$. Нехай $p<1/4$, тоді відповідно до [19] для $\Delta_1(\theta)$ маємо

$$\|\Delta_1(\theta)\|\le C_1\alpha^\mu,\tag{32}$$

де $0<\mu<1/3$. Порядок оцінки $\Delta_2(\theta)$ збігається з порядком відповідного значення в [19]

$$\| \Delta_2(\theta) \| \leq C_2 \delta / \sqrt{\alpha}, \tag{33}$$

де

$$C_2 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\int_0^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega^{2l} + \omega^{2(l-1)} + \ldots + 1}}, \; l \geq 1.$$

Оцінка $\Delta_3(\theta)$ визначається співвідношенням

$$\| \Delta_3(\theta) \| \leq C_3 \varepsilon \alpha^{\nu - 1}, \tag{34}$$

де $0 < \nu < 3/4$.

За наявності похибки під час визначення правої частини рівняння (1) і обчислення значення ядра відповідно до (32), (33) і (34) оцінка похибки розв'язку рівняння (1) буде

$$\| \Delta(\theta) \| \leq C_1 \alpha^{\mu} + \alpha^{-\beta} (C_2 \delta + C_3), \tag{35}$$

де

$$\beta = \min\left(\frac{1}{2}, \nu - 1 \right).$$

Асимптотично оптимальну оцінку швидкості збіжності регуляризованого розв'язку рівняння (1) до точного в метриці простору $L^{\mathrm{p}}[a, b]$ для $\delta \to 0$ і $\varepsilon \to 0$ отримаємо шляхом мінімізації за α правої частини нерівності (35)

$$\alpha(\varepsilon, \delta) = \left(\frac{\beta}{\mu} - \frac{C_2 \delta + C_3 \varepsilon}{C_1} \right)^{1/(\mu + \beta)}. \tag{36}$$

Отже, для оцінки похибки $\Delta(\theta)$ розв'язку інтегрального рівняння (1) отримуємо

$$\| \Delta(\theta) \| \leq C (C_2 \delta + C_3 \varepsilon)^{\mu/(\mu + \beta)}, \tag{37}$$

де

$$C = C_1 \left(\frac{\beta}{\mu C_1} \right)^{\mu/(\mu + \beta)} + \left(\frac{\beta}{\mu C_1} \right)^{-\beta/(\mu + \beta)}.$$

Виходячи з нерівностей (17) і (37), можна оцінити степінь оптимального за точністю згладжувального сплайн-наближення сканованої функції $U(\theta)$

$$r = \left[\left| \frac{1}{mh} \left(\ln(C_2 M) - \ln(A_1) C_{mk} \omega\left(\nu^{(k)}, h \right) \right) \right| \right] + 1, \tag{38}$$

де

$$M = \max\left\{ A C_m \delta \| U_n^{(m)}(\theta) \|^2 \, (b - a) / \max_{i = \overline{1, n}} p_i, C_3 \varepsilon \right\},$$

h — крок відліку значень сканованої функції $U(\theta)$, δ — похибка значень функції $U(\theta)$, ε — похибка обчислення значень напруженості електромагнітного поля діаграми направленості $R(\theta)$, а $[x]$ — ціла частина числа x. На практиці можна використовувати більш грубу оцінку значення степеня оптимального за точністю згладжувального сплайн-наближення сканованої функції $U(\theta)$

$$\bar{r} = \left[\left| \frac{\ln(\max(\delta, \varepsilon) / h)}{\ln(h)} \right| \right] + 1. \tag{39}$$

ВИСНОВКИ

Застосування згладжувального сплайн-наближення значень сканованої функції забезпечує підвищення точності інтерпретації результатів спостереження на основі інтегрального рівняння Фредгольма першого роду з різницевим ядром. Виходячи з оцінки точності розв'язування інтегрального рівняння методом регуляризації з урахуванням похибки, яка спричинена неточністю задання правої частини, й похибки обчислення значення ядра, степінь оптимального за точністю згладжувального сплайн-наближення сканованої функції можна обчислити за формулою (39).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 542 с.
2. Верлань А.Ф., Горошко И.О., Карпенко Е.Ю., Королев В.Ю., Мосенцова Л.В. Методы и алгоритмы восстановления сигналов и изображений Киев: НАН Украины, Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г.Е. Пухова, 2011. 368 с.
3. Старков В.Н. Конструктивные методы вычислительной физики в задачах интерпретации. Киев: Наук. думка, 2002. 264 с.
4. Годлевский В.С., Годлевский В.В. Вопросы точности при обработке сигналов. Киев: Альфа реклама, 2020. 407 с.
5. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М., Мельникова С.С., Нечуйвітер О.П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми. 447 с., Т. 2. Застосування. 348 с. Київ: Наук. думка, 2011.
6. Сергієнко І.В., Задірака В.К., Литвин О.М. Елементи загальної теорії оптимальних алгоритмів та суміжні питання. Київ: Наук. думка, 2012. 400 с.
7. Хіміч О.М., Ніколаєвська О.А., Чистякова Т.В. Про деякі способи підвищення точності комп'ютерних обчислень. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. *Серія*: *Фізико-математичні науки. Зб. наук. праць*. Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національ. університет імені І. Огієнка, 2017, вип. 15. С. 249–254.
8. Starkov V.N., Borshch A.A., Gandzha I.S., Tomchuk P.M. Some examples of seemingly plausible interpretation of experimental results. *Ukr. J. Phys*. 2017. Vol. 62, № 6. P. 481–488.
9. Верлань Д.А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей. *Электронное моделирование*. 2014. Т. 36, № 3. С. 41–58.
10. Верлань Д.А., Понеділок В.В. Чисельна реалізація інтегральних динамічних моделей на основі методу вироджених ядер. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. *Серія*: *Технічні науки*. 2019. Вип. 20. С. 131–145.
11. Верлань А.Ф., Федорчук В.А. Відновлення сигналів в системах спостереження та керування на основі розв'язування оберненої задачі з урізанням спектру ядра інтегрального оператора. *Математичне та комп'ютерне моделювання*. *Серія: Технічні науки*. 2018. Вип. 17. С. 5–15.
12. Верлань А.Ф., Верлань А.А., Положаенко С.А. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7, № 1–2. С. 7–18.
13. Collatz L., Krabs W. Approximationstheorie: Tschebyscheffsche Approximation mit Anwendungen (Teubner Studienbücher Mathematik). Stuttgart: Teubner Verlag; 1973.
14. Малачівський П.С., Скопецький В.В. Неперервне й гладке мінімаксне сплайн-наближення. Київ: Наук. думка, 2013. 270 с.
15. Malachivskyy P.S., Pizyur Y.V., Malachivskyi R.P., Ukhanska O.M. Chebyshev approximation of functions of several variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020 Vol. 56, N 1. P. 118–125. http://doi.org/10.1007/s10559-020-00227-8.
16. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И, Мирошниченко В.Л. Методы сплайн функций. Москва: Наука, 1980. 350 с.
17. Гребенников А.И. Метод сплайнов и решение некорректных задач теории приближений. Москва: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 208 с.
18. Бердышев В.И., Субботин Ю.Н. Численные методы приближения функций. Свердловск: Средне-Уральское кн. изд-во, 1979. 120 с.

19. Верлань Д.А., Чевська К.С. Оцінка похибок розв'язання інтегральних рівнянь Вольтерри II роду засобами інтегральних нерівностей. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія*: *Технічні науки*. 2013. Вип. 9. С. 23–33.

Надійшла до редакції 08.12.2020

А.Ф. Верлань, П.С. Малачивский, Я.В. Пизюр

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ИНТЕРПРЕТАЦИИ НАБЛЮДЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЛАЙН-ПРИБЛИЖЕНИЯ СКАНИРОВАННОЙ ФУНКЦИИ

Аннотация. Представлен анализ точности числовой реализации частотного метода решения интегрального уравнения в задаче интерпретации технических наблюдений с использованием сплайн-приближения сканированной функции. Исследован алгоритм решения интегрального уравнения задачи интерпретации, основанный на применении метода регуляризации Тихонова с поиском решения в частотной области с урезанием спектра частот. Для повышения точности результатов интерпретации предложено применение сплайн-приближения значений сканированной функции, т.е. правой части интегрального уравнения. Получена оценка точности решения интегрального уравнения с применением метода регуляризации и учетом погрешности, что сопровождается неточностью задания правой части, а также погрешности вычисления значений ядра. Предложен способ вычисления оптимальной по точности степени сглаживающего сплайн-приближения сканированной функции.

Ключевые слова: задача интерпретации, интегральное уравнение Фредгольма, метод регуляризации Тихонова, урезание спектра частот, сплайн-приближения, оценка точности.

A.F. Verlan, P.S. Malachivskyy, Ya.V. Pizyur

SOLVING THE PROBLEM OF INTERPRETING OBSERVATIONS USING THE SPLINE APPROXIMATION OF THE SCANNED FUNCTION

Abstract. An accuracy analysis of the numerical implementation of the frequency method for solving the integral equation in the problem of interpreting technical observations using the spline approximation of the scanned function is presented. The algorithm for solving the integral equation of the interpretation problem, which is based on the application of the Tikhonov regularization method with the search for a solution in the frequency domain with a truncation of the frequency spectrum is investigated. To increase the accuracy of the interpretation results, the use of spline approximation of the values of the scanned function, i.e., the right-hand side of the integral equation, is proposed. An estimate of the accuracy of solving the integral equation using the regularization method and taking into account the error accompanied by the inaccuracy of the right-hand side, as well as the error in calculating the values of the kernel is obtained. A method for calculating the optimal degree of smoothing spline for approximation of the scanned function that provides the required accuracy is proposed..

Keywords: interpretation problem, Fredholm integral equation, Tikhonov regularization method, frequency spectrum truncation, spline approximation, accuracy estimation.

Верлань Анатолій Федорович,
чл.-кор. НАПН України, доктор техн. наук, професор, головний науковий співробітник Інституту проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова НАН України, Київ, e-mail: afverl@gmail.com.

Малачівський Петро Стефанович,
доктор техн. наук, професор, завідувач відділу Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, Львів,
e-mail: Petro.Malachivskyy@gmail.com.

Пізюр Ярополк Володимирович,
кандидат фіз.-мат. наук, доцент кафедри Національного університету «Львівська політехніка»,
e-mail: yaropolk.v.piziur@lpnu.ua.