

## УПРАВЛЕНИЕ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ МОЩНОСТЬЮ ДВИЖУЩИХСЯ ИСТОЧНИКОВ ПРИ НАГРЕВЕ СТЕРЖНЯ

**Аннотация.** Рассмотрена задача синтеза управления мощностями движущихся по заданным законам и траекториям источников при нагреве стержня. Текущие значения управлений определяются в зависимости от значений температуры стержня в точках замера. Относительно параметров обратной связи и координат установки точек замера получены формулы для компонент градиента целевого функционала, используемые для численного решения тестовой задачи с применением численных методов оптимизации первого порядка. Приводятся результаты компьютерных экспериментов.

**Ключевые слова:** нагрев стержня, управление с обратной связью, движущиеся источники, точки замера температуры, параметры обратной связи.

### ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача оптимального синтеза управления процессом нагрева стержня сосредоточенными источниками, движущимися по заданным законам и траекториям. Текущие значения мощностей источников определяются в зависимости от замеренных значений температуры стержня в точках, где установлены замерные устройства.

Задача относится к классу задач оптимального управления сосредоточенными источниками в системах с распределенными параметрами [1–3]. Исследование задач управления объектами с распределенными параметрами начато в 60-е годы прошлого столетия [4, 5] и связано с необходимостью управления многими важными процессами разработки крупных нефтегазовых месторождений, трубопроводного транспорта углеводородного сырья, в металлургии и во многих других отраслях производства.

Большой практический интерес представляют задачи управления с обратной связью с управляемым объектом. В конце XIX — начале XX веков были разработаны специальные управляющие устройства для управления и регулирования некоторыми промышленными процессами и техническими объектами с использованием результатов исследований Дж.К. Максвелла, Э.Дж. Рауса, И.А. Вышнеградского, А. Гурвица, А.М. Ляпунова и других ученых и инженеров. В 50-е годы прошлого века результаты исследований Л.С. Понтрягина, Р.Э. Беллмана, А.М. Летова и многих других ученых [6–9] позволили решить серьезные проблемы в ракетостроении, космонавтике и создать системы автоматического управления различными технологическими процессами, промышленными объектами. В работе [10] дан краткий, но достаточно глубокий обзор этапов развития теории управления и ее приложений.

Основные результаты настоящей статьи относительно задач синтеза оптимального управления системами с распределенными параметрами характеризуются следующими особенностями: впервые по текущим замерам осуществляется синтез управления движущимися источниками; для синтезируемых значений мощностей движущихся источников рассмотрена линейная зависимость от замеренных значений температуры в точках замера; задача синтеза управления системой с распределенными параметрами приведена к конечномерной оптимизационной задаче.

В работе получены формулы для компонент градиента целевого функционала относительно параметров обратной связи, позволившие для решения исходной задачи синтеза управления использовать известные эффективные численные методы оптимизации первого порядка. Приведены результаты компьютерных экспериментов, полученные при решении тестовой задачи. Результаты работы могут быть использованы в системах автоматического управления и регулирования сосредоточенными источниками для различных объектов, описываемых другими типами начально-краевых задач.

#### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исследуется задача управления нагревом стержня, описываемая уравнением

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_s} q^i(t) \delta(x - z^i(t)), \quad (x, t) \in (0, l) \times (0, T], \quad (1)$$

с начальным и граничным условиями

$$u(x, 0) = b(x) = b = \text{const} \in B, \quad x \in [0, l], \quad (2)$$

$$u_x(0, t) = \lambda [u(0, t) - \theta], \quad u_x(l, t) = -\lambda [u(l, t) - \theta], \quad t \in (0, T]. \quad (3)$$

Здесь  $u(x, t)$  — температура стержня в точке  $x \in [0, l]$  в момент времени  $t$ ;  $a, \lambda_0, \lambda$  — заданные параметры процесса нагрева;  $\theta$  — температура внешней среды;  $\delta(\cdot)$  — функция Дирака.

Нагрев стержня осуществляется  $N_s$  точечными движущимися по заданным траекториям источниками с управляемыми мощностями, определяемыми кусочно-непрерывными функциями  $q = q(t) = (q^1(t), \dots, q^{N_s}(t))$  такими, что

$$q^i(t) \in Q^i \in [q^i, \overline{q^i}], \quad i = 1, \dots, N_s, \quad t \in (0, T], \quad (4)$$

где  $q^i, \overline{q^i}, i = 1, \dots, N_s$ , заданы. Заданные непрерывные функции  $z^i(t) \in [0, l]$  определяют координаты расположения на стержне  $i$ -го источника в момент времени  $t, i = 1, \dots, N_s$ .

Решение начально-краевой задачи (1)–(3) понимается в обобщенном смысле [1, 11, 12], т.е. для произвольной функции  $\psi(x, t) \in H^{2,1}([0, l] \times [0, T])$  такой, что

$$\psi(x, T) = 0, \quad x \in [0, l],$$

$$\psi_x(0, t) = \lambda \psi(0, t), \quad \psi_x(l, t) = -\lambda \psi(l, t), \quad t \in [0, T],$$

имеет место

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_0^l u(x, t) (\psi_t(x, t) + a^2 \psi_{xx}(x, t) - \lambda_0 \psi(x, t)) dx dt = \\ & = \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^T q^i(t) \psi(z^i(t), t) dt + \int_0^l \psi(x, 0) b(x) dx + \lambda_0 \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \theta dx dt, \quad x \in (0, l), \quad t \in [0, T]. \end{aligned}$$

В работах [1, 11] доказаны существование и единственность обобщенного решения рассматриваемой начально-краевой задачи (1)–(3) при произвольных допустимых функциях  $q^i(t), i = 1, \dots, N_s$ .

Предполагается, что начальная температура в (2) во всех точках стержня одинакова, но точно не задана и принадлежит заданному множеству  $B$  с известной функцией плотности  $\rho_B(b)$ :

$$\rho_B(b) \geq 0, \quad b \in B, \quad \int_B \rho_B(b) db = 1.$$

Температура внешней среды в (1), (3) в процессе нагрева не изменяется, и ее возможные значения распределены на множестве  $\Theta \subset \mathbb{R}$  с известной плотностью  $\rho_{\Theta}(\theta)$  такой, что

$$\rho_{\Theta}(\theta) \geq 0, \theta \in \Theta, \int_{\Theta} \rho_{\Theta}(\theta) d\theta = 1.$$

Рассмотренная задача оптимального управления пока заключается в нахождении допустимых значений мощностей источников  $q = q(t) = (q^1(t), \dots, q^{N_s}(t)) \in Q$ , доставляющих в среднем по всем возможным значениям начальных состояний стержня  $b \in B$  и температуры внешней среды  $\theta \in \Theta$  минимальное значение следующему целевому функционалу:

$$J_T(q) = \int_{\Phi} \int_{\Theta} I_T(q; b, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \quad (5)$$

$$I_T(q; b, \theta) = \int_0^l \mu(x) [u(x, T; q, b, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|q(t) - \hat{q}(t)\|_{L_2^{N_s}[0, T]}^2. \quad (6)$$

Здесь  $u(x, t) = u(x, t; q, b, \theta)$  — решение начально-краевой задачи (1)–(3) с начальным условием  $u(x, 0) = b$ , температурой внешней среды  $\theta$  при допустимых значениях мощностей источников  $q(t)$ ;  $U(x)$  — заданное распределение температуры стержня, которое следует достичь в конце процесса нагрева;  $\mu(x) \geq 0$ ,  $x \in [0, l]$ , — заданная весовая функция;  $\varepsilon$ ,  $\hat{q}(t)$  — заданные параметры регуляризации функционала задачи [12].

Сформулированной выше задаче управления дадим следующую интерпретацию. Рассмотрим множество функций  $W(x, t; q, B, \Theta)$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $t \in [0, T]$ , — решений начально-краевой задачи (1)–(3)  $u(x, t; q, b, \theta)$  при различных значениях начальных условий  $b \in B$  в (2), температурах внешней среды  $\theta \in \Theta$  в (1), (3) и при заданных допустимых значениях мощностей источников  $q(t)$ . Это множество представляет собой пучок траекторий фазового состояния процесса нагрева при заданном управлении  $q(t)$ , а функционал (5), (6) определяет качество управления  $q = q(t)$  пучком траекторий  $W(x, t; q, B, \Theta)$ .

Далее предположим, что в  $N_c$  заданных точках стержня  $\eta^j \in [0, l]$ ,  $j = 1, \dots, N_c$ , замеряются значения температуры непрерывно в процессе его нагрева:

$$u_j(t) = u(\eta^j, t), \quad j = 1, \dots, N_c, \quad t \in [0, T], \quad (7)$$

или в дискретные моменты времени  $t_{\gamma} \in [0, T]$ :

$$u_j^{\gamma} = u(\eta^j, t_{\gamma}), \quad j = 1, \dots, N_c, \quad \gamma = 1, \dots, N_t. \quad (8)$$

Значения замеров используются для определения текущих значений мощностей источников  $q^i(t)$ ,  $i = 1, \dots, N_s$ , согласно следующей линейной зависимости от замеренных значений температуры:

$$q^i(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j [u(\eta^j, t) - \hat{\omega}_i^j], \quad i = 1, \dots, N_s, \quad t \in [0, T], \quad (9)$$

где  $\alpha_i^j$ ,  $\hat{\omega}_i^j$  — параметры обратной связи,  $i = 1, \dots, N_s$ ,  $j = 1, \dots, N_c$  [13, 14].

В (9) величина в квадратных скобках определяет отклонение замера температуры в  $j$ -й точке замера от номинального относительно  $i$ -го источника значения  $\hat{\omega}_i^j$  в  $j$ -й точке замера;  $\alpha_i^j$  — соответствующий коэффициент усиления. Номинальные значения  $\hat{\omega}_i^j$  во многом определяются значениями заданной функции  $U(x)$  в точках замера  $x = \eta^j$ ,  $j = 1, \dots, N_c$ .

Запишем зависимости (9) в виде

$$q^i(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j \hat{\omega}_i^j, \quad i=1, \dots, N_s, \quad t \in [0, T].$$

Обозначим

$$\sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j \hat{\omega}_i^j = \omega^i, \quad i=1, \dots, N_s, \quad (10)$$

тогда зависимости (9) примут вид

$$q^i(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i, \quad i=1, \dots, N_s, \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

Несложно увидеть, что в силу (10) число независимых параметров обратной связи как при использовании формулы (9), так и (11) равно  $N_s(N_c + 1)$ , поэтому далее для синтезируемых управлений  $q^i(t)$ ,  $i=1, \dots, N_s$ , будем использовать формулу (11).

Если замеры делаются в заданные дискретные моменты времени  $t_\gamma \in [0, T]$ ,  $\gamma = 0, \dots, N_t - 1$ ,  $t_0 = 0$ , для значений мощностей при  $t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1})$  предлагается использовать аналогичные (11) зависимости

$$q^i(t) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t_\gamma) - \omega^i, \quad i=1, \dots, N_s, \quad t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1}), \quad \gamma = 0, \dots, N_t - 1. \quad (12)$$

Отметим, что вследствие непрерывности по  $t$  при  $x \in (0, l)$  функции  $u(x, t)$  — решения задачи (1)–(3) следует, что мощности  $q(t)$ , определяемые формулой (11), при непрерывных замерах (7) являются непрерывными функциями. В случае дискретных замеров (8) мощности  $q(t)$ , определяемые формулой (12), непрерывны при  $t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1})$ ,  $\gamma = 0, \dots, N_t - 1$ , а в общем случае кусочно-непрерывны при  $t \in [0, T]$ .

Подставив выражения для мощностей с непрерывной обратной связью (9) в уравнение (1), получим

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \right] \delta(x - z^i(t)), \quad (13)$$

$$x \in (0, l), \quad t \in (0, T].$$

В случае дискретной обратной связи (12) процесс нагрева описывается следующими уравнениями, определенными на временных полуинтервалах  $t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1})$ ,  $\gamma = 0, \dots, N_t - 1$ :

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t_\gamma) - \omega^i \right] \delta(x - z^i(t)), \quad (14)$$

$$x \in (0, l), \quad t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1}), \quad \gamma = 0, \dots, N_t - 1,$$

с условием непрерывности в целом процесса  $u(x, t_\gamma^-) = u(x, t_\gamma) = u(x, t_\gamma^+)$ ,  $x \in [0, l]$ ,  $\gamma = 1, \dots, N_t - 1$ .

Уравнения (13) и (14) относятся к классу нагруженных уравнений ввиду наличия в них значений искомой функции  $u(x, t)$  в точках замера при  $x = \eta^j$ ,  $j=1, \dots, N_c$ , и/или моментах времени замера  $t_\gamma$ ,  $\gamma = 0, \dots, N_t - 1$  [15]. Для соот-

ветствующих начально-краевых задач в работах [16–18] исследованы условия существования, единственности их решения, а также численные методы их решения.

В целом в рассматриваемой далее задаче необходимо определить параметры обратной связи  $\alpha = ((\alpha_i^j)) = (\alpha_1^1, \dots, \alpha_1^{N_c}, \dots, \alpha_{N_s}^1, \dots, \alpha_{N_s}^{N_c})$ ,  $\omega = ((\omega^i)) = (\omega^1, \dots, \omega^{N_c})$ ,  $j=1, \dots, N_c$ ,  $i=1, \dots, N_s$ , с учетом ограничений (4) на мощности источников, при которых целевой функционал будет принимать минимально возможное значение. Обозначим  $y = (\alpha, \omega) \in \mathbb{R}^{N_s(N_c+1)}$  оптимизируемый в задаче вектор параметров, который включает  $(N_s N_c)$  параметров  $\alpha_i^j$  и  $N_s$  параметров  $\omega^i$ . Целевой функционал (5), (6) рассматриваемой задачи окончательно запишем в виде

$$J_T(y) = \int \int_{B \Theta} I_T(y; b, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \quad (15)$$

$$I_T(y; b, \theta) = \int_0^l \mu(x) [u(x, T; y, b, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|y - \hat{y}\|_{\mathbb{R}^{N_s(N_c+1)}}^2. \quad (16)$$

Здесь  $u(x, t) = u(x, t; y, b, \theta)$  — решение начально-краевой задачи относительно уравнений (13) и (14) при оптимизируемых параметрах  $y = (\alpha, \omega)$ , начальном условии  $u(x, 0) = b$  и температуре внешней среды  $\theta$ .

Ограничения (4) на мощности источников при использовании зависимости (11) для обратной связи перейдут в следующие совместные ограничения на оптимизируемые параметры  $y$  и температуру в точках замера  $\eta^j$ ,  $j=1, \dots, N_c$ :

$$\underline{q}^i \leq q^i(t, y) = \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \leq \overline{q}^i, \quad t \in (0, T], \quad i=1, \dots, N_s, \quad (17)$$

которые обозначим и запишем в следующем эквивалентном виде:

$$g^i(t; y) = |g_0^i(t; y)| - \frac{\overline{q}^i - \underline{q}^i}{2} \leq 0, \quad t \in (0, T], \quad i=1, \dots, N_s, \quad (18)$$

$$g_0^i(t; y) = \frac{\overline{q}^i + \underline{q}^i}{2} - q^i(t; y).$$

Рассматриваемая далее задача (13), (2)–(4), (15), (16) является задачей параметрического оптимального управления объектом с распределенными параметрами с обратной связью. Оптимизируется конечномерный вектор  $y \in \mathbb{R}^{N_s(N_c+1)}$ .

Отметим особенности задачи:

- нагруженность дифференциального уравнения;
- наличие в уравнении  $\delta$ -функции Дирака;
- значение целевого функционала определяется не одним решением начально-краевой задачи, а пучком решений при условии, что начальное условие и температура внешней среды принимают не одно значение, а множество значений соответственно из множеств  $B$  и  $\Theta$ ;

- небольшая относительно задач синтеза управления системами с распределенными параметрами размерность получаемой конечномерной оптимизационной задачи, определяемой удвоенным произведением числа источников и точек замеров.

#### ПОДХОД И ФОРМУЛЫ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Непосредственной проверкой согласно определения выпуклости функционала не сложно показать, что целевой функционал исходной задачи оптимального управ-

ления (1)–(6) без обратной связи является выпуклым по  $q(t)$ . Отметим, что функционал рассматриваемой задачи управления (15), (16) как с непрерывной (11), так и с дискретной обратной связью (12) является невыпуклым по оптимизируемым параметрам обратной связи  $y$ . Невыпуклой является и допустимая область параметров  $y$ , определяемая неравенствами (17), что следует из очевидной нелинейности зависимости решения краевой задачи  $u(x, t; y, b, \theta)$  от параметров  $y = (\alpha, \omega)$ . Отсюда следует невыпуклость рассматриваемой задачи оптимизации параметров обратной связи (11) и (12) в целом. Тем не менее полученные ниже формулы для компонентов градиента функционала можно использовать при численном определении локально оптимальных значений параметров обратной связи или для локального уточнения каких-либо заданных экспертом их значений. А именно, для нахождения оптимальных значений параметров могут быть использованы известные методы глобальной оптимизации. Приведенные ниже формулы для градиента целевого функционала задачи можно применять в численных методах локальной оптимизации первого порядка для локального улучшения значений параметров, полученных глобальными методами.

Для численного решения задачи (1)–(6), а именно отыскания локального минимума целевого функционала (15), (16), предлагается использовать метод внешнего штрафа для учета ограничений (18) [12]. Учитывая возможную многоэкстремальность задачи ввиду невыпуклости, для ее решения можно использовать рассмотренный выше подход с применением, например, метода «мультистарта», использующего различные случайно выбранные начальные точки для оптимизируемого вектора параметров  $y$  с применением алгоритмов распараллеливания вычислительного процесса.

Штрафной функционал относительно функционала (15), (16) выберем в следующем виде:

$$J_{T, \mathfrak{R}}(y) = \iint_{B \Theta} I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \quad (19)$$

$$I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) = \int_0^l \mu(x) [u(x, T; y, b, \theta) - U(x)]^2 dx + \varepsilon \|y - \hat{y}\|_{\mathbb{R}^{2N_s N_c}}^2 + \mathfrak{R} G_q(y), \quad (20)$$

$$G_q(y) = \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^T [g_+^i(t; y)]^2 dt,$$

где  $\mathfrak{R}$  — коэффициент штрафа, стремящийся к  $+\infty$ , функция  $g_+^i(t; y) = 0$ , если  $g^i(t; y) \leq 0$ , и  $g_+^i(t; y) = g^i(t; y)$ , если  $g^i(t; y) > 0$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Целевой функционал  $J_{T, \mathfrak{R}}(y)$  задачи (13), (2), (3), (4), (19), (20) при каждом заданном коэффициенте штрафа  $\mathfrak{R}$  и непрерывной обратной связи (11) дифференцируем по синтезируемым параметрам  $y = (\alpha, \omega)$ , а компоненты его градиента определяются формулами

$$\frac{\partial J_{T, \mathfrak{R}}(y)}{\partial \alpha_j^i} = \iint_{B \Theta} \left\{ - \int_0^T (\psi(z^i(t), t) + 2\mathfrak{R} g_+^i(t; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t; y))) u(\eta^j, t) dt + \right. \\ \left. + 2\varepsilon(\alpha_j^i - \hat{\alpha}_j^i) \right\} \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \quad (21)$$

$$\frac{\partial J_{T, \mathfrak{R}}(y)}{\partial \omega^i} = \iint_{B \Theta} \left\{ \int_0^T (\psi(z^i(t), t) + 2\mathfrak{R} g_+^i(t; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t; y))) dt + 2\varepsilon(\omega^i - \hat{\omega}^i) \right\} \times \\ \times \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \quad (22)$$

где  $i = 1, \dots, N_s$ ,  $j = 1, \dots, N_c$ ;  $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, b, \theta, \mathfrak{R})$  при текущем векторе параметров  $y$ , допустимых начальном условии  $b \in B$ , температуре внешней среды  $\theta$  и коэффициенте штрафа  $\mathfrak{R}$  является решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$\psi_t(x, t) = -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \lambda_0 \psi(x, t) - \sum_{j=1}^{N_c} \left[ \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i^j (\psi(z^i(t), t) + 2\mathfrak{R}g_+^i(t; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t; y))) \right] \delta(x - \eta^j), \quad (23)$$

$$x \in (0, l), \quad t \in [0, T),$$

$$\psi(x, T) = -2\mu(x)[u(x, T) - U(x)], \quad x \in [0, l], \quad (24)$$

$$\psi_x(0, t) = \lambda\psi(0, t), \quad \psi_x(l, t) = -\lambda\psi(l, t), \quad t \in [0, T). \quad (25)$$

**Доказательство.** Отметим, что решение краевой задачи (23)–(25) понимается, как и в случае решения прямой задачи (1)–(3), в обобщенном смысле [1, 11]. Покажем дифференцируемость функционала (15), (16) по вектору параметров  $y$ .

С учетом того, что начальные состояния температуры пластины и температура внешней среды не зависят от оптимизируемых параметров  $y$ , имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_y J_{T, \mathfrak{R}}(y) &= \operatorname{grad} \int \int_{B \Theta} I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db = \\ &= \int \int_{B \Theta} \operatorname{grad}_y I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) \rho_{\Theta}(\theta) \rho_B(b) d\theta db. \end{aligned}$$

Поэтому достаточно показать дифференцируемость функционала (16) при каких-либо заданных допустимых значениях начальной температуры  $b$  и температуры внешней среды  $\theta$ .

Для управляющих слагаемых из уравнения (13) введем следующее обозначение:

$$F(x, t; u, y) = \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \right] \delta(x - z^i(t)). \quad (26)$$

Тогда уравнение (13) можно записать в виде

$$u_t(x, t) = a^2 u_{xx}(x, t) - \lambda_0 [u(x, t) - \theta] + F(x, t; u, y). \quad (27)$$

Для исследования дифференцируемости функционала (16) используем метод приращения независимых переменных  $y$ .

Пусть вектор параметров  $y = (\alpha, \omega, \eta)$  получил приращение  $\Delta y$ . Новый вектор параметров обозначим  $y_1 = y + \Delta y = (\alpha + \Delta\alpha, \omega + \Delta\omega)$ . Тогда получит соответствующее приращение управляющее воздействие  $F(x, t; u, y)$ :

$$\Delta F(x, t; u, y) = F(x, t; u, y + \Delta y) - F(x, t; u, y). \quad (28)$$

Следовательно, получит приращение и фазовая переменная

$$\Delta u(x, t; y) = u(x, t; y + \Delta y) - u(x, t; y). \quad (29)$$

При этом функция  $u(x, t; y + \Delta y) = u(x, t; y) + \Delta u(x, t; y)$  является решением начально-краевой задачи (13), (2), (3), а функция  $\Delta u(x, t; y)$  согласно (27) является решением следующей задачи:

$$\Delta u_t(x, t) = a^2 \Delta u_{xx}(x, t) - \lambda_0 \Delta u(x, t) + \Delta F(x, t; u, y), \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T]; \quad (30)$$

$$\Delta u(x, 0) = 0, \quad x \in [0, l]; \quad (31)$$

$$\Delta u_x(0, t) = \lambda \Delta u(0, t), \quad \Delta u_x(l, t) = -\lambda \Delta u(l, t), \quad t \in (0, T]. \quad (32)$$



Вычислим приращение функционала (20):

$$\Delta I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) = \Delta I_T(y; b, \theta) + \mathfrak{R} \Delta G_q(y). \quad (33)$$

Рассмотрим первое слагаемое с учетом (30)–(32):

$$\begin{aligned} \Delta I_T(y; b, \theta) &= I_T(y + \Delta y; b, \theta) - I_T(y; b, \theta) = \\ &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, T) - U(x)] \Delta u(x, T) dx + 2\varepsilon \langle y - \hat{y}, \Delta y \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

Перенесем правую часть уравнений (30) влево и умножим полученное равенство на пока произвольную функцию  $\psi(x, t)$ , проинтегрируем обе части по  $x$ ,  $x \in [0, l]$ , и по  $t$ ,  $t \in [0, T]$ . Прибавим к (34) левую часть полученного выражения, равного нулю:

$$\begin{aligned} \Delta I_T(y; b, \theta) &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, T) - U(x)] \Delta u(x, T) dx + 2\varepsilon \langle y - \hat{y}, \Delta y \rangle + \\ &+ \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) (\Delta u_t(x, t) - a^2 \Delta u_{xx}(x, t) + \lambda_0 \Delta u(x, t) - \Delta F(x, t; u, y)) dx dt. \end{aligned} \quad (35)$$

Проведем в (35) интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \Delta I_T(y; b, \theta) &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, T) - U(x)] \Delta u(x, T) dx + 2\varepsilon \langle y - \hat{y}, \Delta y \rangle + \\ &+ \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^l \psi(x, 0) \Delta u(x, 0) dx - \\ &- a^2 \int_0^T \psi(l, t) \Delta u_x(l, t) dt + a^2 \int_0^T \psi(0, t) \Delta u_x(0, t) dt + a^2 \int_0^T \psi_x(l, t) \Delta u(l, t) dt - \\ &- a^2 \int_0^T \psi_x(0, t) \Delta u(0, t) dt - \int_0^T \int_0^l (\psi_t(x, t) + a^2 \psi_{xx}(x, t) - \lambda_0 \psi(x, t)) \Delta u(x, t) dx dt - \\ &- \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta F(x, t; u, y) dx dt. \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  обозначает скалярное произведение векторов.

Рассмотрим последнее слагаемое соотношения (36). С учетом (26), (28) и свойства  $\delta$ -функции Дирака имеем

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \Delta F(x, t; u, y) dx dt &= \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) F(x, t; u, y + \Delta y) dx dt - \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) F(x, t; u, y) dx dt = \\ &= \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} (\alpha_i^j + \Delta \alpha_i^j) [u(\eta^j, t) + \Delta u(\eta^j, t)] - (\omega^i + \Delta \omega^i) \right] \delta(x - z^i(t)) dx dt - \\ &- \int_0^T \int_0^l \psi(x, t) \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \right] \delta(x - z^i(t)) dx dt = \\ &= \int_0^T \psi(z^i(t), t) \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} (\alpha_i^j + \Delta \alpha_i^j) [u(\eta^j, t) + \Delta u(\eta^j, t)] - (\omega^i + \Delta \omega^i) \right] dt - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \psi(z^i(t), t) \sum_{i=1}^{N_s} \left[ \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \right] dt = \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \alpha_i^j \int_0^T \psi(z^i(t), t) u(\eta^j, t) dt - \\
& - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \omega^i \int_0^T \psi(z^i(t), t) dt + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \int_0^T \int_0^l \psi(z^i(t), t) \alpha_i^j \Delta u(x, t) \delta(x - \eta^j) dx dt.
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим второе слагаемое приращения функционала из формулы (33):

$$\begin{aligned}
\Delta G_q(y) &= G_q(y + \Delta y) - G_q(y) = \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^T \{ [g_+^i(t; y + \Delta y)]^2 - [g_+^i(t; y)]^2 \} dt = \\
&= \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^T \left\{ \left[ |g_0^i(t; y + \Delta y)| - \frac{\bar{q}^i - q^i}{2} \right]^2 - \left[ |g_0^i(t; y)| - \frac{\bar{q}^i - q^i}{2} \right]^2 \right\} dt = \\
&= \sum_{i=1}^{N_s} \int_0^T \left\{ \left[ \left| \frac{\bar{q}^i + q^i}{2} - \sum_{j=1}^{N_c} (\alpha_i^j + \Delta \alpha_i^j) [u(\eta^j, t) + \Delta u(\eta^j, t)] - (\omega^i + \Delta \omega^i) \right| - \frac{\bar{q}^i - q^i}{2} \right]^2 - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \left| \frac{\bar{q}^i + q^i}{2} - \sum_{j=1}^{N_c} \alpha_i^j u(\eta^j, t) - \omega^i \right| - \frac{\bar{q}^i - q^i}{2} \right]^2 \right\} dt = \\
&= -2 \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \alpha_i^j \int_0^T g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y)) u(\eta^j, t) dt + \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \omega^i \int_0^T g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y)) dt - \\
&\quad - 2 \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \int_0^T \int_0^l g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y)) \alpha_i^j \Delta u(x, t) \delta(x - \eta^j) dx dt.
\end{aligned}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
\Delta I_{T, \mathfrak{R}}(y; b, \theta) &= 2 \int_0^l \mu(x) [u(x, T) - U(x)] \Delta u(x, T) dx + \\
&+ \int_0^l \psi(x, T) \Delta u(x, T) dx - \int_0^l \psi(x, 0) \Delta u(x, 0) dx - a^2 \int_0^T \psi(l, t) \Delta u_x(l, t) dt + \\
&+ a^2 \int_0^T \psi(0, t) \Delta u_x(0, t) dt + a^2 \int_0^T \psi_x(l, t) \Delta u(l, t) dt - a^2 \int_0^T \psi_x(0, t) \Delta u(0, t) dt - \\
&- \int_0^T \int_0^l (\psi_t(x, t) + a^2 \psi_{xx}(x, t) - \lambda_0 \psi(x, t)) \Delta u(x, t) dx dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \alpha_i^j \left( - \int_0^T (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y))) u(\eta^j, t) dt + 2\varepsilon(\alpha_j^i - \hat{\alpha}_j^i) \right) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \Delta \omega^i \left( \int_0^T (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y))) dt + 2\varepsilon(\omega^i - \hat{\omega}^i) \right) - \\
& - \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{j=1}^{N_c} \int_0^T \int_0^l (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t, y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t, y))) \alpha_i^j \Delta u(x, t) \delta(x - \eta^j) dx dt. \quad (37)
\end{aligned}$$

Исходя из того, что компоненты градиента функционала определяются из (37) линейной частью его приращения относительно каждой компоненты, следует справедливость формул (21), (22) и сопряженной задачи (23)–(25). Теорема доказана.

В случае дискретной во времени обратной связи (12) имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Штрафной целевой функционал  $J_{T, \Re}(y)$  при дискретной по времени обратной связи при каждом значении коэффициента штрафа  $\Re$  дифференцируем по синтезируемым параметрам  $y = (\alpha, \omega, \eta)$ , а компоненты его градиента определяются формулами

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J_{T, \Re}(y)}{\partial \alpha_j^i} &= \iint_{B \Theta} \left\{ - \sum_{\gamma=0}^{N_t-1} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t_\gamma; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t_\gamma; y))) u(\eta^j, t_\gamma) dt + \right. \\
& \quad \left. + 2\varepsilon(\alpha_j^i - \hat{\alpha}_j^i) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_B(b) d\theta db, \\
\frac{\partial J_{T, \Re}(y)}{\partial \omega^i} &= \iint_{B \Theta} \left\{ \sum_{\gamma=0}^{N_t-1} \int_{t_\gamma}^{t_{\gamma+1}} (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t_\gamma; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t_\gamma; y))) dt + \right. \\
& \quad \left. + 2\varepsilon(\omega^i - \hat{\omega}^i) \right\} \rho_\Theta(\theta) \rho_B(b) d\theta db,
\end{aligned}$$

где  $i=1, \dots, N_s$ ,  $j=1, \dots, N_c$ ,  $\gamma=0, \dots, N_t-1$ ;  $\psi(x, t) = \psi(x, t; y, b, \theta, \Re)$  при текущем векторе параметров  $y$ , допустимых начальном условии  $b \in B$ , температуре внешней среды  $\theta$  и коэффициенте штрафа  $\Re$  является решением следующей сопряженной краевой задачи:

$$\begin{aligned}
\psi_t(x, t) &= -a^2 \psi_{xx}(x, t) + \lambda_0 \psi(x, t) - \\
& - \sum_{j=1}^{N_c} \left[ \sum_{i=1}^{N_s} \alpha_i^j (\psi(z^i(t), t) + 2\Re g_+^i(t_\gamma; y) \operatorname{sgn}(g_0^i(t_\gamma; y))) \right] \delta(x - \eta^j, t - t_\gamma), \\
& x \in (0, l), \quad t \in [t_\gamma, t_{\gamma+1}), \quad \gamma = 0, \dots, N_t - 1; \\
\psi(x, T) &= -2\mu(x)[u(x, T) - U(x)], \quad x \in [0, l]; \\
\psi_x(0, t) &= \lambda \psi(0, t); \quad \psi_x(l, t) = -\lambda \psi(l, t), \quad t \in (0, T].
\end{aligned}$$

#### ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Решение рассматриваемой задачи проводилось при следующих значениях данных, используемых в ее постановке:

$$\begin{aligned}
a^2 &= 0.01, \quad l=1, \quad T=1, \quad \lambda = 0.001, \quad \lambda = 0.0001, \quad N_s = 2, \quad N_c = 4, \\
\mu(x) &= 1, \quad U(x) = 5, \quad x \in [0; 1], \quad \underline{q}^i = 0, \quad \overline{q}^i = 10, \\
B &= [0; 0.5], \quad \rho_B(b) = 0.5, \quad \Theta \in [2; 4], \quad \rho_B(b) = 0.5, \\
z^1(t) &= 0.05 + 0.9|\sin(\pi t)|, \quad z^2(t) = 0.95 - 0.9|\sin(\pi t)|, \quad t \in [0; 1], \\
\eta^1 &= 0.2842, \quad \eta^2 = 0.4196, \quad \eta^3 = 0.6835, \quad \eta^4 = 0.8752.
\end{aligned}$$

Коэффициент штрафа последовательно, начиная от  $\mathfrak{R} = 5$ , трижды увеличивался в пять раз. Размерность вектора синтезируемых параметров  $y$  при этом определялась как  $N_s(N_c + 1) = 10$ . Множества  $B$  и  $\Theta$  и соответствующие интегралы в целевом функционале дискретизировались равномерно тремя точками. Для аппроксимации  $\delta$ -функции использовалась всюду гладкая (дифференцируемая) функция

$$\delta_\sigma(x; \hat{\eta}) = \begin{cases} 0, & |x - \hat{\eta}| > \sigma, \\ \frac{1}{2\sigma} \left[ 1 + \sin\left(\frac{2x - 2\hat{\eta} + \sigma}{2\sigma} \pi\right) \right], & |x - \hat{\eta}| \leq \sigma. \end{cases}$$

При этом для произвольного значения  $\sigma$  имеет место

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\sigma(x; \hat{\eta}) dx = 1.$$

Величина  $\sigma$  считалась равной  $3h_x$ , где  $h_x$  — шаг сеточной аппроксимации отрезка  $x \in [0; 1]$ , который варьировался при проведении численных экспериментов. Такая аппроксимация  $\delta$ -функции сглаживает зависимость  $\psi(x, t)$  — решения начально-краевой задачи (23)–(25), а следовательно, и градиента целевого функционала от оптимизируемых координат размещения точек замеров  $\eta^j$ ,  $j = 1, \dots, N_c$ , являющихся аргументами  $\delta$ -функции [2, 19].

Итерационная процедура минимизации штрафного функционала методом градиентного спуска при заданном коэффициенте штрафа  $\mathfrak{R}$  строилась по формуле

$$y^{n+1} = y^n - \beta_n \text{grad}_y J_{T, \mathfrak{R}}(y^n), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (38)$$

$$\beta_n = \arg \min_{\beta \geq 0} J_{T, \mathfrak{R}}(y^n - \beta \text{grad}_y J_{T, \mathfrak{R}}(y^n))$$

с критерием останова по изменению аргумента

$$\|y^{n+1} - y^n\|_{R^{10}} \leq 0.0001.$$

Одномерная минимизация по  $\beta$  в (38) проводилась методом золотого сечения. Для решения прямой и сопряженной краевых задач использовалась неявная схема метода сеток [20], а для учета нагруженности дифференциальных уравнений применялся метод сдвига, предложенный в работах [17, 18]. Параметры регуляризации  $\varepsilon$  и  $\hat{y}$  при каждом значении коэффициента штрафа  $\mathfrak{R}$  изменялись согласно алгоритму, предложенному в [12], а именно  $\varepsilon$  уменьшалось в пять раз, начиная с  $\varepsilon = 0.05$ , а параметр  $\hat{y}$  вначале при каждом  $\mathfrak{R}$  выбирался нулевым и затем приравнивался к  $y^*$ , найденному на предыдущем шаге.

В табл. 1 приведены результаты решения задачи, полученные для двух начальных значений  $y_1^0, y_2^0 \in R^{10}$  итерационного процесса (38). Из таблицы видно, что полученные соответствующие оптимальные значения параметров  $y^* = (\alpha^*, \omega^*)$  различаются более существенно, но при этом значения функционала  $J_t(y^*)$  достаточно малы, а числа итераций  $M^{it}$  мало различаются. Здесь целевой функционал или многоэкстремален, или имеет сильную овражную структуру.

**Таблица 1.** Результаты решения задачи, полученные для двух начальных значений  $y_1^0$  и  $y_2^0$

	$\alpha^0$	$\omega^0$	$J_T(y^0)$	$\alpha^*$	$\omega^*$	$J_t(y^*)$	$M^{it}$
1	-0.438 -0.238 1.499 -0.146 1.240 0.678 -1.414 -0.316	1.726 2.022	70.8	0.805 -1.583 0.257 -1.459 1.134 1.375 -1.561 -0.247	0.025 0.247	0.0009	54
2	0.831 0.778 0.464 -3.882 -0.752 1.645 -0.011 -1.232	1.067 -2.953	6.93	0.054 1.112 -1.491 -1.622 0.753 0.103 -0.124 0.756	0.35 0.96	0.0008	59

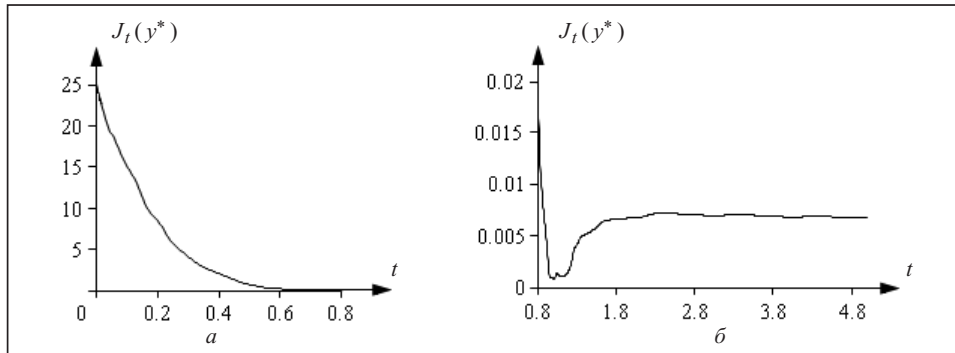


Рис. 1. Графики функции  $J_t(y^*)$  — значения целевого функционала, вычисленного при полученном из начальной точки  $y_1^*$  для времени окончания процесса  $t$

На рис. 1 приведены графики функции  $J_t(y^*)$  — значения целевого функционала при  $y^* = y_1^*$  как функции времени окончания процесса  $t$ . Время  $t = T = 1$  соответствует отрезку времени  $[0; 1]$ , для которого решалась исходная задача синтеза. Далее для  $t > 1$  наблюдался процесс нагрева стержня с использованием синтезированного вектора параметров  $y_1^*$ . Вследствие сравнительно больших значений  $J_t(y^*)$  при  $t > 0.8$  график этой функции разбит на два: рис. 1, а и рис. 1, б с использованием разных масштабов по оси ординат. Из рис. 1, б видно, что процесс управления нагревом при  $t > 1.8$  стабилизировался. Это значит, что значение функционала при  $t > 1.8$ , характеризующее отклонение текущего состояния температуры на всем стержне от заданной желаемой температуры  $U(x) = 5$ ,  $x \in [0; 1]$ , невелико, а следовательно, процесс управления нагревом перешел в процесс регулирования с обратной связью.

На рис. 2 приведены результаты расчета температуры стержня при  $t = T = 1$  с использованием приведенных в первой строке табл. 1 оптимальных параметров обратной связи при наличии помех  $\chi$  в замерах (7). Зашумленные замеры  $\hat{u}(\eta^j, t)$ ,  $j = 1, \dots, N_c$ , определялись по формуле

$$\hat{u}(\eta^j, t) = u(\eta^j, t)[1 + \xi^j(t)\chi],$$

где  $\xi^j(t)$  — равномерно распределенная на отрезке  $[-1; 1]$  функция, случай-

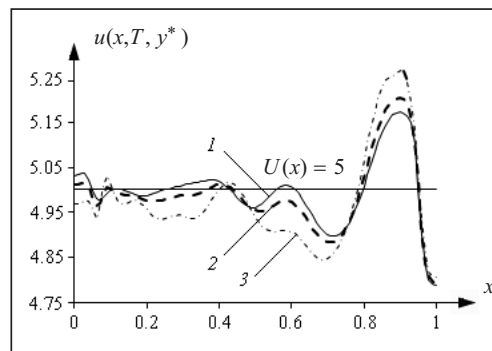


Рис. 2. Результаты расчета температуры стержня при  $T = 1$  с использованием приведенных в первой строке табл. 1 оптимальных параметров обратной связи при наличии помех в замерах  $\chi = 0$  (1),  $\chi = 0.01$  (2) и  $\chi = 0.03$  (3)

ные значения которой при каждом  $t \in [0; T]$  генерировались с помощью программы RAND;  $\chi$  — уровень помех:  $\chi = 0$  соответствует отсутствию помех,  $\chi = 0.01$  соответствует уровню помех 1%,  $\chi = 0.03$  соответствует уровню помех 3%.

Как видно из рис 2, порядок величин отклонения от желаемого состояния стержня при  $T = 1$  соответствует уровню помех, а сам процесс нагрева с обратной связью можно считать достаточно устойчивым.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен подход к решению задачи управления с обратной связью мощностями точечных источников нагрева стержня, движущихся по заданным законам и траекториям. Для формирования текущих значений мощностей каждого источника использовалась формула линейной зависимости от замеренных значений температуры стержня в замеряемых точках. Таким образом, исходная задача оптимального управления сводится к отысканию конечномерного вектора параметров обратной связи, оптимизирующего заданный целевой функционал.

Получены формулы для компонент градиента по оптимизируемым параметрам обратной связи, которые дают возможность использовать для численного решения задачи эффективные методы оптимизации первого порядка. Приведены результаты численных экспериментов, полученные на тестовых исходных данных, и их анализ. В частности, проведен анализ влияния величины погрешности замеров температуры в замеряемых точках на качество управления процессом, а именно на значение целевого функционала.

Рассмотренные в работе подход и схему получения формул можно распространить на другие задачи оптимального управления сосредоточенными источниками в системах с распределенными параметрами, которые описываются другими типами начально-краевых задач, в том числе с большей размерностью пространственной переменной.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lions J.-L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Paris: Dunod Ganthier-Villars, 1969.
2. Бутковский А.Г. Методы управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1984. 568 с.
3. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Оптимальное управление неоднородными распределенными системами. Киев: Наук. думка, 2003. 506 с.
4. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. Москва: Наука, 1981. 368 с.
5. Ray W.H. Advanced process control. McGraw-Hill Book Company, 1980. 376 p.
6. Егоров А.И. Основы теории управления. Москва: Физматлит, 2004. 504 с.
7. Бутковский А.Г., Пустыльников Л.М. Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1980. 384 с.
8. Сиразетдинов Т.К. Оптимизация систем с распределенными параметрами. Москва: Наука, 1977. 420 с.
9. Sergienko I.V., Deineka V.S. Optimal control of distributed systems with conjugation conditions. New York: Kluwer Acad. Publ., 2005. 383 p.
10. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. Москва: ЛЕНАНД, 2019. 504 с.
11. Lions J.-L., Magenes E. Problèmes aux limites non homogènes at application. Vol. 1. Paris, 1968.
12. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Москва: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
13. Guliyev S.Z. Synthesis of zonal controls for a problem of heating with delay under nonseparated boundary conditions. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54, N 1. P. 110–121.

14. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On an approach to designing control of the distributed-parameter processes. *Automation and Remote Control*. 2012. Vol. 73, N 9. P. 1443–1455.
15. Нахушев А.М. Нагруженные уравнения и их применение. Москва: Наука, 2012. 232 с.
16. Alikhanov A.A., Berezgov A.M., Shkhanukov-Lafishev M.X. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods. *Comp. Math. Math. Phys.* 2008. Vol. 48, N 9. P. 1581–1590.
17. Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations. *Comp. Math. Math. Phys.* 2014. Vol. 54, N 7. P. 1096–1109.
18. Abdullayev V.M., Aida-zade K.R. Finite-difference methods for solving loaded parabolic equations. *Comp. Math. Math. Phys.* 2016. Vol. 56, N 1. P. 93–105.
19. Aida-zade K.R., Bagirov A.G. On the problem of spacing of oil wells and control of their production rates. *Automation and Remote Control*. 2006. Vol. 67, N 1. P. 44–53.
20. Самарский А.А. Теория разностных схем. Москва: Наука, 1989. 616 с.

*Надійшла до редакції 26.10.2020*

**К.Р. Айда-заде, А.Г. Багіров, В.А. Гашимов**  
**КЕРУВАННЯ ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ ПОТУЖНІСТЮ РУХОМИХ ДЖЕРЕЛ**  
**ПІД ЧАС НАГРІВАННЯ СТРИЖНЯ**

**Анотація.** Розглянуто задачу синтезу керування потужностями джерел, що рухаються за заданими законами і траєкторіями під час нагрівання стрижня. Поточні значення керувань визначаються залежно від значень температури стрижня у точках замірювання. Отримано формули компонентів градієнта цільового функціоналу щодо параметрів зворотного зв'язку та координат точок замірювання, які застосовують для чисельного розв'язання тестової задачі з використанням чисельних методів оптимізації першого порядку. Наведено результати комп'ютерних експериментів.

**Ключові слова:** нагрівання стрижня, керування зі зворотним зв'язком, рухомі джерела, точки замірювання температури, параметри зворотного зв'язку.

**K.R. Aida-zade, A.H. Bagirov, V.A. Hashimov**  
**FEEDBACK CONTROL OF THE POWER OF MOVING SOURCES WHEN HEATING THE BAR**

**Abstract.** The problem of synthesis of power control of the sources moving according to the given rules and trajectories when the rod is heated is considered. The current values of the controls are determined depending on the values of the temperature of the bar at the points of measurement. Formulas for the components of the gradient of the objective functional are obtained with respect to the feedback parameters and the coordinates of the measurement points, which are used to numerically solve the test problem using first-order numerical optimization methods. The results of computer experiments are presented.

**Keywords:** bar heating, feedback control, moving sources, temperature measuring points, feedback parameters.

**Айда-заде Каміль Раджабович,**  
 чл.-кор. НАН Азербайджану, доктор фіз.-мат. наук, професор, завідувач лабораторії Інституту систем керування НАН Азербайджану, Баку, e-mail: kamil\_aydazade@rambler.ru.

**Багіров Арзу Гейдар огли,**  
 кандидат фіз.-мат. наук, доцент, науковий співробітник Інституту систем керування НАН Азербайджану, Баку, e-mail: arzu-bagirov@mail.ru.

**Гашимов Вугар Адам огли,**  
 науковий співробітник Інституту систем керування НАН Азербайджану, Баку, e-mail: vugarhashimov@gmail.com.