УДК 519.21

О.А. ВОЙНА
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *avoina@hotmail.com.*

ВИКОРИСТАННЯ ПРИХОВАНИХ МАРКОВСЬКИХ МОДЕЛЕЙ В ОЦІНЮВАННІ ПАРАМЕТРІВ ІЄРАРХІЧНИХ СИСТЕМ

Анотація. Розглянуто метод параметричного оцінювання для ієрархічних стохастичних моделей в умовах неповних спостережень. Метод ґрунтується на використанні особливостей кореляційної структури ієрархічних моделей. Головну увагу приділено практичній реалізації методу. Запропоновано, зокрема, підхід, що передбачає поєднання аналітичних досліджень з емпіричною верифікацією отриманих розв'язків. Наведено конкретні приклади побудови спроможних оцінок векторних параметрів функції деформації з безпосередніми розрахунками на числових даних імітаційної моделі.

Ключові слова: прихована марковська модель, система масового обслуговування, статистичне оцінювання, функція деформації.

Ця стаття є логічним продовженням роботи [1], в якій досліджено математичну модель ієрархічної структури, а також наведено приклади її можливого практичного використання. Алгоритм методу статистичного оцінювання, описаний у роботі [1], ґрунтується на тому, що неповноту емпіричних даних можна частково компенсувати, використовуючи специфіку стохастичної структури ієрархічної моделі. Однак, наголошено на тому, що практична реалізація методу пов'язана з «проблемою вибору», тобто необхідністю визначення спроможної оцінки з-поміж декількох розв'язків, отриманих за допомогою цього алгоритму. З одного боку, запропонований метод надає змогу записати через відомі параметри моделі всі розв'язки в явному вигляді. Тому, аналізуючи їх та відсіюючи сторонні розв'язки, можна розв'язати проблему вибору теоретичним шляхом. З іншого боку, використовуючи асимптотичні властивості моделі, можна побудувати спеціальні статистики, що надають змогу емпіричним шляхом однозначно визначити спроможну оцінку. Покажемо на конкретних прикладах, що найбільш раціональний підхід полягає у виваженому поєднанні аналітичних досліджень з емпіричною верифікацією отриманих розв'язків.

ФОРМУЛЮВАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

Розглянемо задачу оцінювання параметрів деформації у схемі неповних спостережень для такої ієрархічної структури. Нехай $x(t), t \ge 0$ означає деякий однорідний ланцюг Маркова з неперервним часом та скінченною множиною станів $E = \{0, 1, 2, \dots, m+n\}$ [2]. Припустимо, що матриця $[a_{ij}]$, $i, j \in E$, інтенсивності переходів ланцюга $x(t)$ має такий вигляд: $a_{ij} = 0$, якщо $|i-j| > 1$; $a_{ii+1} = \lambda$, якщо $i = 0, 1, 2, \dots, m+n-1$; $a_{ii+1} = 0$, якщо $i \ge m+n$; $a_{ii-1} = i \cdot \nu$, якщо $i = 1, 2, \dots, m$; $a_{ii} = -(\lambda + i \cdot \nu)$, якщо $i = 0, 1, 2, \dots, m$; $a_{ii-1} = m \cdot \nu$, якщо $i = m+1, \dots, m+n$; $a_{ii} = -(\lambda + m \cdot \nu)$, якщо $i = m+1, \dots, m+n-1$; $a_{mm} = -m \cdot \nu$. У цих формулах λ та ν — деякі додатні числа.

Визначимо тепер двовимірний випадковий процес $(\eta(k), \tau(k))$, $k = 1, 2, \dots$ Перша координата $\eta(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, — це однорідний дискретний ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів $E = \{0, 1, 2, \dots, m+n\}$ і такою матрицею перехідних імовірностей за один крок: $P = [p_{ij}]$, $i, j \in E$, $p_{ij} = P\{x(t+1) = j / x(t) = i\}$: $p_{01} = 1$;

$p_{ij}=0$, якщо $|i-j|>1$; $p_{ii+1}=\dfrac{\lambda}{\lambda+i\cdot\nu}$, якщо $i=0,1,2,\ldots,m$; $p_{ii-1}=\dfrac{i\cdot\nu}{\lambda+i\cdot\nu}$, якщо $i=1,2,\ldots,m$; $p_{ii+1}=\dfrac{\lambda}{\lambda+m\cdot\nu}$, якщо $i=m+1,\ldots,m+n-1$; $p_{ii-1}=\dfrac{m\cdot\nu}{\lambda+m\cdot\nu}$, якщо $i=m+1,\ldots,m+n$; $p_{m+nm+n}=\dfrac{\lambda}{\lambda+m\cdot\nu}$.

Нехай $\{\tau_i^{(k)}, k=0,1,2,\ldots\}$, $i\in E$, означає сукупність незалежних від ланцюга Маркова $\eta(k)$ випадкових величин таких, що для різних значень індексу k величини $\tau_i^{(k)}$ не залежать одна від одної та мають показниковий розподіл з параметром $\lambda+\nu(i)$, де $\nu(i)=i\cdot\nu$, якщо $i=0,1,2,\ldots,m$, та $\nu(i)=m\cdot\nu$, якщо $i=m+1,\ \ldots$ $\ldots,m+n$. Визначимо координату $\tau(k)$ так: $\tau(k)=\tau_{\eta(k)}^{(k)}$.

Припустимо, що маємо статистичні дані $(0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_T)$, пов'язані з функціонуванням ієрархічної моделі в такий спосіб: $\theta_k=d_{\eta(k)}(\tau(k),b)$, $k=1,2,\ldots,T$. При цьому $D(x,b)=\{d_0(x,b), d_1(x,b),\ldots,d_{m+n}(x,b)\}$ — деяка векторна функція, що залежить від невідомого параметра $b=\{b_0,b_1,\ldots,b_{m+n}\}$. Значення $(\eta(1),\eta(2),\ldots,\eta(T))$ станів ланцюга Маркова $\eta(k)$, $k=0,1,2,\ldots$, не доступні для спостереження і залишаються невідомими. Задача полягає в тому, щоб побудувати спроможну оцінку параметра b.

Описану ієрархічну структуру можна інтерпретувати як процес «змін», що відбуваються в системі обслуговування $M/M/m/n$ з параметрами (λ,ν) [3]. Процес $x(t), t\ge 0$, описує кількість вимог у системі в момент часу t, а $(\eta(k),\tau(k))$, $k=0,1,2,\ldots$, визначається так: $\eta(k)=x(s_k)$, $\tau(k)=s_k-s_{k-1}$, $k=1,2,\ldots$. При цьому потік $s_1, s_2, \ldots s_k, \ldots$ враховує всі «зміни» в системі. У ньому поєднані моменти надходження нових вимог та моменти, коли вимоги залишають систему. Серед них є також моменти втрати вимог, що надходять до «зайнятої» системи. Функцію $D(x,b)$ можна трактувати як деформацію фактичних даних, а наявну емпіричну інформацію охарактеризувати як неповні деформовані спостереження.

Якщо функція деформації $D(x,b)$ відома, а $\chi[A]$ означає індикатор випадкової події A, то функції розподілу $\{F_i(x,b), i\in E\}$, деформованих випадкових величин $\{\zeta_i=d_i(\tau_i^{(0)},b), i\in E\}$ мають вигляд

$$F_i(x,b)=P\{\zeta_i<x\}=\int_0^\infty \chi[d_i(u,b_i)<x]\cdot(\lambda+\nu(i))\cdot e^{-(\lambda+\nu(i))\cdot u}du,\ i\in E.$$

Уведемо сукупність незалежних від ланцюга Маркова $\eta(k)$ випадкових величин $\{\zeta_i^{(k)}, k=0,1,2,\ldots\}$, $i\in E$, що не залежать одна від одної для різних значень індексу k. При цьому незалежно від індексу k розподіл випадкової величини $\zeta_i^{(k)}$ визначається функцією $F_i(x,b)$. Побудуємо випадковий процес $(\eta(k),\zeta(k))$, $k=1,2,\ldots$, друга компонента якого дорівнює $\zeta(k)=\zeta_{\eta(k)}^{(k)}$. Якщо припустити, що безпосередньому спостереженню доступні лише значення $(\zeta(1),\zeta(2),\ldots,\zeta(S))$, а значення ланцюга Маркова $\eta(k)$ при цьому залишаються невідомими, то у статистичному аналізі випадкових процесів така схема неповних спостережень має назву прихованої марковської моделі (hidden Markov model) [4]. Тоді наявні статистичні дані $(0,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_T)$ можна описати рівністю: $\theta_k=\zeta(k)$, $k=1,2,\ldots$.

Однорідний ланцюг Маркова $\eta(k)$, $k=1,2,\ldots$, буде ергодичним, оскільки є незвідним, неперіодичним та має скінченну множину станів. Його стаціонарний розподіл $\pi=\{\pi_0,\pi_1,\ldots,\pi_{m+n}\}$ має вигляд $\pi_i=\pi_0\cdot\dfrac{\lambda^{i-1}}{i!\cdot\nu^i}\cdot(\lambda+i\cdot\nu)$, якщо

$i=1,2,\ldots,m$; $\pi_{m+k}=\pi_0\cdot\dfrac{\lambda^{m+k-1}}{m!\cdot m^k\cdot\nu^{m+k}}\cdot(\lambda+m\cdot\nu)$, якщо $k=1,2,\ldots,n$. При цьому

$$\pi_0=\left(1+\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda^{i-1}}{i!\cdot\nu^i}\cdot(\lambda+i\cdot\nu)\right)+\frac{\lambda^m\cdot(\lambda+m\cdot\nu)\cdot(m^n\cdot\nu^n-\lambda^n)}{(m!)\cdot m^n\cdot\nu^{m+n}\cdot(m\cdot\nu-\lambda)}\right)^{-1}.$$

Використовуючи вигляд перехідних імовірностей $P=[p_{ij}]$ ланцюга $\eta(k)$, $k=0,1,2,\ldots$, безпосередньою перевіркою переконуємося, що для довільних $i,j\in E$ виконуються рівності $\sum_{l=0}^{n+m}\dfrac{\pi_l}{\sqrt{\pi_i\cdot\pi_j}}\cdot p_{li}\cdot p_{lj}=\sum_{l=0}^{n+m}\dfrac{\sqrt{\pi_i\cdot\pi_j}}{\pi_l}\cdot p_{il}\cdot p_{jl}$. Це надає змогу використати для побудови спроможної оцінки параметра b методику, теоретичні аспекти якої описано в роботі [1].

АЛГОРИТМ МЕТОДУ ПОБУДОВИ ОЦІНОК

Процедуру побудови оцінок векторного параметра b реалізують на практиці у вигляді двох послідовних кроків. Спочатку підбирають відповідну функцію $\varphi(x)$, $x\in R_1$, та будують допоміжний вектор $\Phi=\{\Phi_0,\Phi_1,\ldots,\Phi_{m+n}\}$, координати якого $\Phi_i=\Phi_i(b)$ визначаються рівністю $\Phi_i=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dF_i(x,b)$, $i\in E$. Використовуючи наявні статистичні дані, будуємо статистики:

$$q_S^{(l)}=\frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S}\varphi(\zeta(t))\cdot\varphi(\zeta(t+l)),\ l=1,2,\ldots,n+m+1,\ (S<T).$$

Спроможну оцінку $\hat{\Phi}^{(S)}=\{\hat{\Phi}_0^{(S)},\hat{\Phi}_1^{(S)},\ldots,\hat{\Phi}_{n+m}^{(S)}\}$ вектора $\Phi=\{\Phi_0,\Phi_1,\ldots$ $\ldots,\Phi_{m+n}\}$ знаходимо серед розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases}\displaystyle\sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\pi_i\cdot p_{ij}^{(l)}\cdot\Phi_i\cdot\Phi_j=q_S^{(l)}\\ l=1,2,\ldots,m+n+1\end{cases}.$$

Існування та вигляд розв'язків цієї системи залежать від властивостей власних чисел $\{w_1,w_2,\ldots,w_{m+n+1}\}$ матриці перехідних імовірностей $P=[p_{ij}]$, $i,j\in E$. Запропонований в [1] алгоритм можна застосувати, якщо w_i, $i=1,2,\ldots,m+n+1$, — дійсні та різні числа. Він надає змогу знайти в явному вигляді всі розв'язки системи, при цьому необхідно вибрати серед них оцінку $\hat{\Phi}^{(S)}$ вектора Φ. На другому кроці використовуємо оцінку $\hat{\Phi}^{(S)}$, а також ту обставину, що координати $\Phi_i=\Phi_i(b)$ є функціями невідомого параметра b, і будуємо його спроможну оцінку $\hat{b}^{(S)}=\{\hat{b}_1^{(S)},\hat{b}_2^{(S)},\ldots,\hat{b}_M^{(S)}\}$.

Варто зауважити, що не завжди легко серед багатьох розв'язків системи рівнянь вибрати саме потрібний. Тому розглянемо детальніше та покажемо на конкретних прикладах, як можна ефективно реалізувати на практиці процедуру знаходження спроможної оцінки $\hat{\Phi}^{(S)}$ вектора $\Phi=\{\Phi_0,\Phi_1,\ldots,\Phi_{m+n}\}$. Для цього виберемо функцію $\varphi(x)=x$, $x\in R_1$, та визначимо вигляд функції деформації $D(x,b)$, припускаючи, що $d_i(x,b)=b_i\cdot x$, $i=0,1,\ldots,m+n$. Тоді

$$\Phi_i=\Phi_i(b)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dF_i(x,b)=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_i(x,b)=E(\zeta_i^{(0)}),\ i\in E.$$

Оскільки $\tau_i^{(0)}$ має показниковий розподіл з параметром $\lambda+\nu(i)$, то $\Phi_i(b)=$ $=\dfrac{b_i}{\lambda+\nu(i)}$, $i\in E$. Побудовані з використанням функції $\varphi(x)=x$ на основі наявних емпіричних даних $(\zeta(1),\zeta(2),\ldots,\zeta(T))$ статистики позначимо символами $Q_S(l)$, $l=1,2,\ldots,n+m+1$:

$$Q_S(l)=\frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S}\zeta(t)\cdot\zeta(t+l),\ l=1,2,\ldots,n+m+1,\ (S<T).$$

Нехай $P^{(l)}=[p_{ij}^{(l)}]$, $i,j\in E$, означає матрицю перехідних імовірностей ланцюга $\eta(k)$ за l кроків. Визначимо матрицю Π у такий спосіб: $\Pi=\operatorname{diag}\{\pi_0,$ $\pi_1,\ldots,\pi_{m+n+1}\}$. Тоді, як показано в роботі [1], оцінку $\hat{\Phi}^{(S)}$ вектора Φ треба шукати серед розв'язків $x^*=\{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_{m+n+1}^*\}$ системи рівнянь

$$\begin{cases} x\cdot\Pi\cdot P\cdot x^T=Q_S(1)\\ x\cdot\Pi\cdot P^{(2)}\cdot x^T=Q_S(2)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x\cdot\Pi\cdot P^{(n+m+1)}\cdot x^T=Q_S(n+m+1)\end{cases},$$

де $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_{b+m+1}\}$. Важливу роль при цьому відіграють матриці $A=\hat{\Pi}\cdot P\cdot\hat{\Pi}^{-1}$, де $\hat{\Pi}=\operatorname{diag}\{\sqrt{\pi_1};\sqrt{\pi_2};\ldots,\sqrt{\pi_m}\}$, та ортогональна матриця U, що складається з власних векторів матриці A. Здійснивши у відповідний спосіб низку підстановок у початковій системі рівнянь, перейдемо від змінних $x=\{x_1,x_2,\ldots,x_{b+m+1}\}$ до нових змінних $s=\{s_1,s_2,\ldots,s_{b+m+1}\}$, а система набуде при цьому такого вигляду: $W\cdot s^T=(Q_S)^T$. У цій рівності $Q_S=\{Q_S(1),Q_S(2),\ldots$ $\ldots,Q_S(m+n+1)\}$, а елементи $w_{ij}=(w_i)^j$, $i,j=\{1,2,\ldots,n+m+1\}$, квадратної матриці $W=[w_{ij}]$ визначаються через власні числа $\{w_1,w_2,\ldots,w_{m+n+1}\}$ матриць P та A. Існує чіткий алгоритм побудови оберненої матриці W^{-1}. Отже, можемо записати в явному вигляді розв'язки $x^*=\{x_1^*,x_2^*,\ldots,x_{m+n+1}^*\}$, а саме $x^*=y^*\cdot U\cdot\hat{\Pi}^{-1}$, де $y^*=\{y_1^*,y_2^*,\ldots,y_{m+n+1}^*\}$, $y_i^*=\sqrt{s_i}$ або $y_i^*=-\sqrt{s_i}$, а $s=\{s_1,s_2,\ldots,s_{b+m+1}\}$ визначається рівністю $s^T=W^{-1}\cdot(Q_S)^T$. Один з цих розв'язків і буде спроможною оцінкою $\hat{\Phi}^{(S)}$ вектора Φ.

Виберемо числові значення для відомих параметрів, щоб мати змогу ілюструвати конкретними розрахунками на модельних даних реалізацію алгоритму методу. Проаналізуємо спочатку найпростішу модель, покладаючи $m=1$ та $n=0$. Матриця P перехідних імовірностей ланцюга $\eta(k)$, її стаціонарний розподіл $\pi=\{\pi_0,\pi_1\}$ та матриця A в цьому випадку мають вигляд

$$P=\begin{Vmatrix} 0 & 1\\ \dfrac{\nu}{\lambda+\nu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\nu}\end{Vmatrix},\ \pi_0=\frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu};\ \pi_1=\frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu},\ A=\begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}}\\ \dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\nu}\end{Vmatrix}.$$

Формуючи ортогональну матрицю U, що складається із власних векторів матриці A, використаємо ту обставину, що матриці P та A мають ті самі власні числа $\{w_1,w_2\}$. Отже, знаходимо спочатку власні числа $w_1=1$,

$w_2 = -\dfrac{\nu}{\lambda+\nu}$ матриці P. Потім для кожного з них визначаємо загальний вигляд власних векторів матриці A:

$$u^{(1)} = \left\{ u_1^{(1)}; \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}} \cdot u_1^{(1)} \right\}, \; u^{(2)} = \left\{ u_1^{(2)}; -\frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} \cdot u_1^{(2)} \right\}.$$

Визначаючи у відповідний спосіб множники $u_1^{(1)}$ та $u_1^{(2)}$, отримаємо:

$$U = \begin{Vmatrix} \dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\cdot\nu}} & \dfrac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\cdot\nu}} \\ \dfrac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\lambda+2\cdot\nu}} & -\dfrac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+2\cdot\nu}} \end{Vmatrix}.$$

Використовуючи відповідні алгоритми, описані в [1], будуємо на підставі власних чисел $\{w_1, w_2\}$ матриці $W = \begin{Vmatrix} 1 & -\dfrac{\nu}{\lambda+\nu} \\ 1 & \dfrac{\nu^2}{(\lambda+\nu)^2} \end{Vmatrix}$ та $W^{-1} = \begin{Vmatrix} \dfrac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} & \dfrac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \\ -\dfrac{(\lambda+\nu)^2}{\nu\cdot(\lambda+2\cdot\nu)} & \dfrac{(\lambda+\nu)^2}{\nu\cdot(\lambda+2\cdot\nu)} \end{Vmatrix}$.

У результаті, розв'язуючи систему рівнянь $s^T = W^{-1} \cdot (Q_S)^T$, отримаємо

$$s_1 = \frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \cdot Q_S(1) + \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \cdot Q_S(2), \; s_2 = \frac{(\lambda+\nu)^2}{\nu\cdot(\lambda+2\cdot\nu)} \cdot (Q_S(2) - Q_S(1)).$$

Беручи до уваги, що перехід від початкових змінних $x = \{x_1, x_2\}$ до змінних $s = \{s_1, s_2\}$ здійснюється шляхом послідовних підстановок $y^T = U \cdot \hat{\Pi} \cdot x^T$ та $s_i = (y_i)^2$, $i = 1, 2$, можемо тепер записати в явному вигляді всі $K = 2^2 = 4$ різних розв'язки $x^*(k) = x_1^*(k), x_2^*(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, системи рівнянь

$$\begin{cases} x \cdot \Pi \cdot P \cdot x^T = Q_S(1), \\ x \cdot \Pi \cdot P^{(2)} \cdot x^T = Q_S(2). \end{cases}$$

Проведемо аналіз цих розв'язків для відсіювання сторонніх серед них, спираючись на інтерпретацію моделі. Зауважимо, що приклади подібних досліджень наведено також у роботах [5–7].

Оскільки $d_i(x, b) = b_i \cdot x$, $i = 0, 1$, а $\Phi_0(b) = \dfrac{b_0}{\lambda}$, $\Phi_1(b) = \dfrac{b_1}{\lambda+\nu}$, то оцінка $\hat{b}^{(S)} = \{\hat{b}_0^{(S)}, \hat{b}_1^{(S)}\}$ векторного параметра $b = \{b_0, b_1\}$ функції деформації $D(x, b)$ будується так: $\hat{b}_0^{(S)} = \lambda \cdot \hat{\Phi}_0^{(S)}$, $\hat{b}_1^{(S)} = (\lambda+\nu) \cdot \hat{\Phi}_1^{(S)}$. Отже, координати вектора $\hat{\Phi}^{(S)}$ мають бути додатними. Аналізуючи під цим поглядом розв'язки $x^*(k)$, доходимо висновку, що $\hat{\Phi}^{(S)}$ слід вибирати серед таких векторів:

$$x^*(1) = \left\{ y_1 + y_2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}}; y_1 - y_2 \cdot \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} \right\},$$

$$x^*(2) = \left\{ y_1 - y_2 \cdot \frac{\sqrt{\lambda+\nu}}{\sqrt{\nu}}; y_1 + y_2 \cdot \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\lambda+\nu}} \right\}.$$

Спробуємо аналітичним шляхом знайти остаточну відповідь. Матриці $P^{(1)}$ та $P^{(2)}$ перехідних імовірностей ланцюга $\eta(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, за один та два кроки можна записати в такому вигляді: $P^{(1)} = G_1 - \frac{\nu}{\lambda+\nu} \cdot G_2$; $P^{(2)} = G_1 + \frac{\nu^2}{(\lambda+\nu)^2} \cdot G_2$. При цьому

$$G_1 = \begin{bmatrix} \frac{\nu}{\lambda + 2\cdot\nu} & \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \\ \frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} & \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \end{bmatrix}, \; G_2 = \begin{bmatrix} \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} & -\frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \\ -\frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} & \frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \end{bmatrix}.$$

Нехай $Q^{(1)} = \Phi(b) \cdot \Pi \cdot P^{(1)} \cdot \Phi(b)^T$, $Q^{(2)} = \Phi(b) \cdot \Pi \cdot P^{(2)} \cdot \Phi(b)^T$ і відповідно $\hat{G}_1 = \hat{\Pi} \cdot G_1 \cdot \hat{\Pi}^{-1}$, $\hat{G}_2 = \hat{\Pi} \cdot G_2 \cdot \hat{\Pi}^{-1}$, $\hat{\Phi}(b) = \{\sqrt{\pi_1} \cdot \Phi_0(b); \sqrt{\pi_2} \cdot \Phi_1(b)\}$. Визначимо також $V_1 = \hat{\Phi}(b) \cdot \hat{G}_1 \cdot \hat{\Phi}(b)^T$ та $V_2 = \hat{\Phi}(b) \cdot \hat{G}_2 \cdot \hat{\Phi}(b)^T$. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що всі елементи матриці $\hat{G}_1$ — додатні, тимчасом як серед елементів $\hat{G}_2$ є від'ємні. Отже, враховуючи, що координати вектора $\hat{\Phi}^{(S)}$ додатні, доходимо висновку, що $V_1 > V_2$.

Перетворюючи з урахуванням вигляду $P^{(1)}$ та $P^{(2)}$ вирази для $Q^{(1)}$ та $Q^{(2)}$, отримаємо $Q^{(1)} = V_1 - \frac{\nu}{\lambda+\nu} \cdot V_2$, $Q^{(2)} = V_1 + \left(\frac{\nu}{\lambda+\nu}\right)^2 \cdot V_2$. Або $V_1 = \frac{\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \cdot Q^{(1)} + \frac{\lambda+\nu}{\lambda+2\cdot\nu} \cdot Q^{(2)}$, $V_2 = \frac{(\lambda+\nu)^2}{\nu\cdot(\lambda+2\cdot\nu)} \cdot (Q^{(2)} - Q^{(1)})$. Отже, якщо кількість спостережень S є достатньо великою та виконується умова $\frac{V_1}{V_2} < \frac{\lambda+\nu}{\nu}$, то $\hat{\Phi}^{(S)} = x^*(1)$. Якщо $\frac{V_1}{V_2} \geq \frac{\lambda+\nu}{\nu}$, то обидва розв'язки $x^*(1)$ та $x^*(2)$ можуть бути оцінкою $\hat{\Phi}^{(S)}$ вектора Φ. Тому в цьому випадку аналіз необхідно продовжити.

З практичного погляду раціональнішим є підхід, що поєднує аналітичні дослідження з емпіричною перевіркою отриманих розв'язків. Таку перевірку слід розпочати з використання статистики $q_S = \frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S}\varphi(\zeta(t))$. У роботі [1] показано, що в деяких випадках тільки для одного розв'язку $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ системи рівнянь $\begin{cases} x \cdot \Pi \cdot P \cdot x^T = Q^{(1)} \\ x \cdot \Pi \cdot P^{(2)} \cdot x^T = Q^{(2)} \end{cases}$ виконується рівність $\pi_0 \cdot \hat{x}_1 + \pi_1 \cdot \hat{x}_2 = \pi_1 \cdot \Phi_1(b)$. Це буде тоді, коли виконані такі умови: $p_0 \cdot y_0^0 \neq 0$, $p_1 \cdot y_1^0 \neq 0$, $p_0 \cdot y_0^0 + p_1 \cdot y_1^0 \neq 0$, де вектори $p = \{p_0, p_1\}$ та $y^0 = \{y_0^0, y_1^0\}$ визначаються рівностями $p = \pi \cdot \hat{\Pi}^{-1} \cdot U^T$, $y^0 = U \cdot \hat{\Pi} \cdot \Phi(b)$. У цьому прикладі $p = \{1, 0\}$ і немає впевненості в тому, що тільки для одного розв'язку $x^*(k)$ величина $\pi_0 \cdot x_1^*(k) + \pi_1 \cdot x_2^*(k)$ буде «близькою» до значення статистики q_S у випадку, якщо кількість спостережень S є достатньо великою. Тому потрібно використати статистики $M_{(s,p)}^{(n)}$ вищих порядків типу

$$M_{(s,p)}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^{n} \zeta(t) \cdot \zeta(t+s) \cdot \zeta(t+s+p).$$

Напевно існують цілі числа $s \in \{1, 2\}$ та $p \in \{1, 2\}$ такі, що рівність

$$\sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\sum_{l\in E}\pi_i\cdot p_{ij}^{(s)}\cdot p_{jl}^{(p)}\cdot\hat{x}_i\cdot\hat{x}_j\cdot\hat{x}_l=$$

$$=\sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\sum_{l\in E}\pi_i\cdot p_{ij}^{(s)}\cdot p_{jl}^{(p)}\cdot\Phi_i(b)\cdot\Phi_j(b)\cdot\Phi_l(b)=M_{(s,p)}^{(0)}$$

буде виконуватися тільки для одного розв'язку $\hat{x}=\{\hat{x}_1,\hat{x}_2\}$ [1]. Інакше кажучи, значення статистики $M_{(s,p)}^{(S)}$ для відповідних (s,p) при достатньо великій кількості спостережень S тільки для одного розв'язку $x^*(k)$ буде «близьким» до величини

$$\sum_{i\in E}\sum_{j\in E}\sum_{l\in E}\pi_i\cdot p_{ij}^{(s)}\cdot p_{jl}^{(p)}\cdot x_i^*(k)\cdot x_j^*(k)\cdot x_l^*(k).$$

Узагальнимо модель, припускаючи, що $m=2$, а $n=0$. Оцінки векторного параметра $b=\{b_0,b_1,b_2\}$ функції деформації $D(x,b)$ будемо шукати, спираючись на оцінку $\hat{\Phi}^{(S)}=\{\hat{\Phi}_0^{(S)},\hat{\Phi}_1^{(S)},\hat{\Phi}_2^{(S)}\}$ вектора $\Phi(b)=\{\Phi_0(b),\Phi_1(b),\Phi_2(b)\}$. При цьому

$$\Phi_0(b)=\frac{b_0}{\lambda};\ \Phi_1(b)=\frac{b_1}{\lambda+\nu};\ \Phi_2(b)=\frac{b_2}{\lambda+2\cdot\nu},$$

а оцінка $\hat{\Phi}^{(S)}$ буде одним із розв'язків $x^*(k)=\{x_1^*(k),x_2^*(k),x_3^*(k)\}$, $k=1,\ldots,8$, системи рівнянь $\begin{cases}x\cdot\Pi\cdot P\cdot x^T=Q_S(1)\\x\cdot\Pi\cdot P^{(2)}\cdot x^T=Q_S(2)\\x\cdot\Pi\cdot P^{(3)}\cdot x^T=Q_S(3)\end{cases}$. Якщо використати позначення $\alpha=\dfrac{\nu}{\lambda+\nu}$, $\beta=\dfrac{2\cdot\nu}{\lambda+2\cdot\nu}$, то елементи моделі матимуть такий вигляд:

$$P=\begin{bmatrix}0&1&0\\\alpha&0&1-\alpha\\0&\beta&1-\beta\end{bmatrix},\ A=\begin{Vmatrix}0&\sqrt{\alpha}&0\\\sqrt{\alpha}&0&\sqrt{(1-\alpha)\cdot\beta}\\0&\sqrt{(1-\alpha)\cdot\beta}&1-\beta\end{Vmatrix},$$

$$\pi_0=\frac{\alpha\cdot\beta}{(1-\alpha)+\beta\cdot(1+\alpha)},\ \pi_1=\frac{\beta}{(1-\alpha)+\beta\cdot(1+\alpha)},\ \pi_2=\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+\beta\cdot(1+\alpha)}.$$

Власні числа w_1,w_2,w_3 матриць P та A дорівнюють

$w_1=1$, $w_2=0.5\cdot(-\beta+\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)})$, $w_3=0.5\cdot(-\beta-\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)})$.

Загальний вигляд власних векторів матриці A для кожного з них є таким:

$$u^{(1)}=\left\{u_1^{(1)};\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot u_1^{(1)};\frac{\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha\cdot\beta}}\cdot u_1^{(1)}\right\},$$

$$u^{(2)}=\left\{u_1^{(2)};\frac{-\beta+\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)}}{2\sqrt{\alpha}}\cdot u_1^{(2)};\frac{\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)}-\beta-2\cdot\alpha}{2\sqrt{\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot\beta}}\cdot u_1^{(2)}\right\},$$

$$u^{(3)}=\left\{u_1^{(3)};\frac{-\beta-\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)}}{2\sqrt{\alpha}}\cdot u_1^{(3)};-\frac{\sqrt{\beta^2+4\cdot\alpha\cdot(1-\beta)}+\beta+2\cdot\alpha}{2\sqrt{\alpha\cdot(1-\alpha)\cdot\beta}}\cdot u_1^{(3)}\right\},$$

де $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$ та $u_1^{(3)}$ — довільні множники. З формального погляду для повернення в цих виразах до вихідних параметрів (λ, ν) моделі та ортогоналізації в аналітичному вигляді отриманої системи векторів $(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$ немає жодних принципових перешкод. Так, наприклад, власний вектор $\widetilde{u}^{(1)} = \{\widetilde{u}_1^{(1)}, \widetilde{u}_2^{(1)}, \widetilde{u}_3^{(1)}\}$, що відповідає власному числу $w_1 = 1$, має такий вигляд: $\widetilde{u}^{(1)} = \left\{ \frac{\sqrt{2} \cdot \nu}{\lambda + 2 \cdot \nu}; \frac{\sqrt{2 \cdot \nu \cdot (\lambda + \nu)}}{\lambda + 2 \cdot \nu}; \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda + 2 \cdot \nu}} \right\}$. Але з практичного погляду цей підхід пов'язаний з великими технічними труднощами, що значно зростають під час реалізації наступних кроків алгоритму. В результаті незначне узагальнення моделі призводить до істотного ускладнення аналітичної процедури вибору спроможної оцінки $\hat{\Phi}^{(S)}$. Використовуючи числові дані, отримані шляхом імітаційного моделювання, а також спираючись на результати проведеного теоретичного дослідження, покажемо, що доцільніше намагатися до максимальної міри реалізовувати алгоритм у чисельний спосіб. При цьому в кожному конкретному випадку треба проводити тільки ті дослідження, що є необхідними з погляду такої реалізації.

ЧИСЕЛЬНА РЕАЛІЗАЦІЯ АЛГОРИТМУ

Виберемо для параметрів системи обслуговування $M / M / 1 / 0$ такі значення: $\lambda = 3$, $\nu = 2$. Параметри $b = \{b_0, b_1\}$ функції деформації $D(x, b)$ визначимо, як $b_0 = 1$, $b_1 = 5$. Прихована марковська модель $(\eta(k), \tau(k))$, $k = 1, 2, \ldots$, у цьому випадку буде визначатись у такий спосіб: $P = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 0.4 & 0.6 \end{Vmatrix}$, $A = \begin{Vmatrix} 0 & 0.632 \\ 0.632 & 0.6 \end{Vmatrix}$, $\pi = \{\pi_0, \pi_1\} = \left\{ \frac{2}{9}, \frac{7}{9} \right\}$, $\Phi = \{\Phi_0, \Phi_1\} = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$, $Q^{(1)} = 0.619$, $Q^{(2)} = 0.6698$. Використовуючи явний вигляд розв'язків системи рівнянь $\begin{cases} x \cdot \Pi \cdot P \cdot x^T = Q^{(1)} \\ x \cdot \Pi \cdot P^{(2)} \cdot x^T = Q^{(2)} \end{cases}$, отримаємо $\hat{x}(1) = \{1.2857, 0.619\}$, $\hat{x}(2) = \left\{ \frac{1}{3}, 1 \right\}$, $\hat{x}(3) = \left\{ -\frac{1}{3}, -1 \right\}$, $\hat{x}(4) = \{-1.2857, -0.619\}$. Отже, два додатних розв'язки $\hat{x}(1)$ та $\hat{x}(2)$ можуть бути вектором Φ. У цьому випадку $\Phi = \hat{x}(2)$.

Для ілюстрації методу використаємо змодельовану траєкторію ($\zeta(1)$, $\zeta(2)$, ..., $\zeta(S)$) довжиною $S = 200$. Запишемо базову систему рівнянь, на підставі розв'язків якої будуватимемо потрібні нам оцінки. Значення статистик у правій частині системи для змодельованого вектора деформованих спостережень відповідно дорівнюють $Q_{200}(1) = 0.6476$, $Q_{200}(2) = 0.6929$, а система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{cases} 0.5714 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.4286 \cdot (x_2)^2 = 0.6476, \\ 0.1143 \cdot (x_1)^2 + 0.3429 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.5429 \cdot (x_2)^2 = 0.6929. \end{cases}$$

Отримати відразу аналітичним шляхом остаточну відповідь в цьому прикладі неможливо. Для вибраних числових значень $\frac{\lambda + \nu}{\nu} = 2.5$, а $\frac{V_1}{V_2} = 7.225$ і умова $\frac{V_1}{V_2} < \frac{\lambda + \nu}{\nu}$ не виконується. Використовуючи явні формули для знаходження розв'язків системи, отримаємо підтвердження всіх висновків проведеного раніше дослідження, а саме: розв'язки $x^*(3) = \{-0.3749, -1.0045\}$ та $x^*(4) = \{-1.2743, -0.6447\}$ — сторонні, а будь-який розв'язок $x^*(1) = \{1.2743, 0.6447\}$ або $x^*(2) = \{0.3749, 1.0045\}$ теоретично може бути оцінкою вектора Φ. Остаточну відповідь знайдемо, доповнюючи проведений досить детальний теоретичний аналіз цього прикладу емпіричною перевіркою зазначених розв'язків.

Наведемо дві версії чисельної реалізації алгоритму. Перша, що передбачає максимальне використання у розрахунках отриманих явних формул, вже практично реалізована. Залишилося серед розв'язків $x^*(1)$ та $x^*(2)$ вибрати статистичним шляхом остаточну відповідь. Для цього не можна використати статистику $q_S = \frac{1}{S}\sum_{t=1}^{S}\varphi(\zeta(t))$, що також узгоджується з проведеним раніше аналізом. Для змодельованої траєкторії $(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(200))$ її значення дорівнює $q^*_{200} = 0.8473$. Але

$$\pi_0 \cdot x_1^*(1) + \pi_1 \cdot x_2^*(1) = \pi_0 \cdot x_1^*(2) + \pi_1 \cdot x_2^*(2) = 0.8246.$$

Тому, щоб визначити, який саме розв'язок буде оцінкою для Φ, використаємо статистику $M_{(s,p)}^{(n)}$, покладаючи в ній $s = 1$, $p = 1$. З одного боку, якщо кількість спостережень зростає ($n \to \infty$), то статистика $M_{(1,1)}^{(n)} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{t=1}^{n}\zeta(t)\cdot\zeta(t+1)\cdot\zeta(t+2)$ збігається за ймовірністю до $M_{(1,1)}^{(0)} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\pi_i \cdot p_{ij} \cdot p_{jl} \cdot \Phi_i(b)\cdot\Phi_j(b)\cdot\Phi_l(b)$. З іншого — тільки для одного розв'язку $\hat{x} = \{\hat{x}_1, \hat{x}_2\}$ виконується рівність $\sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\pi_i \cdot p_{ij} \cdot p_{jl} \cdot \hat{x}_i \cdot \hat{x}_j \cdot \hat{x}_l = M_{(1,1)}^{(0)}$.

У розглядуваному прикладі $M_{(1,1)}^{(0)} = 0.4794$, а $\hat{x} = \hat{x}(2) = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$. Тому «статистичний шлях» полягає у виборі такого розв'язку $x^*(k)$, для якого значення

$$M^{*(200)}_{(1,1)}(k) = \sum_{i=0}^{1}\sum_{j=0}^{1}\sum_{l=0}^{1}\pi_i \cdot p_{ij} \cdot p_{jl} \cdot x_i^*(k)\cdot x_j^*(k)\cdot x_l^*(k),\ k = 1, 2,$$

буде «ближчим» до значення $M^{*(200)}_{(1,1)}$ статистики $M_{(1,1)}^{(n)}$, отриманого у випадку використання змодельованої траєкторії $(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(200))$. Оскільки $M^{*(200)}_{(1,1)} = 0.4665$, а $M^{*(200)}_{(1,1)}(1) = 0.5215$, $M^{*(200)}_{(1,1)}(2) = 0.5145$, то оцінкою $\hat{\Phi}^{(200)}$ вектора Φ будемо вважати розв'язок $\hat{\Phi}^{(200)} = x^*(2) = \{0.3749, 1.0045\}$.

Згідно з припущеннями $\lambda = 3$, $\nu = 2$. Тому оцінка $\hat{b}^{(S)}$ векторного параметра b функції деформації $D(x, b)$ дорівнює

$$\hat{b}_0^{(200)} = \lambda \cdot \hat{\Phi}_0^{(200)} = 3 \cdot 0.3749 = 1.1247,$$

$$\hat{b}_1^{(200)} = (\lambda + \nu) \cdot \hat{\Phi}_1^{(200)} = 5 \cdot 1.0045 = 5.0225.$$

Друга версія реалізації алгоритму, на відміну від першої, полягає у виконанні безпосередніх обчислень з використанням наявних емпіричних даних.

Формальні аналітичні дослідження зводяться до мінімального обсягу і стосуються виключно знаходження необхідних для цього елементів моделі. Значення параметрів λ та ν відомі. Тому обчислимо спочатку всі характеристики моделі, що однозначно визначаються з їхньою допомогою та є необхідними для проведення розрахунків. У цьому прикладі — це матриця P перехідних імовірностей прихованої марковської моделі $(\eta(k), \zeta(k))$, $k = 1, 2, \ldots$, її стаціонарний розподіл π, матриця Π та власні числа w_1, w_2. Знайдемо тепер у числовому вигляді ортонормовану систему $\{u^{*(1)}, u^{*(2)}\}$ власних векторів матриці A та побудуємо з їхньою допомогою ортогональну матрицю $U = \begin{Vmatrix} 0.535 & 0.845 \\ 0.845 & -0.535 \end{Vmatrix}$. Використовуючи власні числа $\{w_1, w_2\}$, побудуємо матрицю $W = \begin{Vmatrix} 1 & -0.4 \\ 1 & 0.16 \end{Vmatrix}$ та обчислимо її обернену матрицю $W^{-1} = \begin{Vmatrix} 0.286 & 0.714 \\ -1.786 & 1.786 \end{Vmatrix}$.

На підставі змодельованого вектора деформованих спостережень обчислимо значення статистик $Q_{200}(1) = 0.6476$ та $Q_{200}(2) = 0.6929$. Знайдемо розв'язки $s_1 = 0.6799$, $s_2 = 0.0809$ для допоміжних змінних $s = \{s_1, s_2\}$, використовуючи для цього формулу $s^T = W^{-1} \cdot (Q_{200})^T$, де $Q_{200} = \{Q_{200}(1), Q_{200}(2)\}$. Тепер можна знайти координати $\{0.8246; 0.2844\}$ вектора $\{\sqrt{s_1}; \sqrt{s_2}\}$ та записати $K = 2^{m+n+1} = 2^2 = 4$ різних розв'язки $y(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, для змінних $y = \{y_1, y_2\}$: $y(1) = \{0.8246, 0.2844\}$, $y(2) = \{0.8246, -0.2844\}$, $y(3) = \{-0.8246, 0.2844\}$, $y(4) = \{-0.8246, -0.2844\}$. Використовуючи матрицю Π, будуємо матриці $\hat{\Pi} = \begin{Vmatrix} 0.535 & 0 \\ 0 & 0.845 \end{Vmatrix}$ та $\hat{\Pi}^{-1} = \begin{Vmatrix} 1.871 & 0 \\ 0 & 1.183 \end{Vmatrix}$. За формулою $x(k) = y(k) \cdot U \cdot \hat{\Pi}^{-1}$ знаходимо всі розв'язки базової системи рівнянь: $x^*(1) = \{1.2743, 0.6447\}$, $x^*(2) = \{0.3749, 1.0045\}$, $x^*(3) = \{-0.3749, -1.0045\}$, $x^*(4) = \{-1.2743, -0.6447\}$.

Для вибору серед них необхідної нам оцінки вектора Φ використаємо спочатку статистику q_S. Її значення для змодельованої траєкторії $(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(200))$ дорівнює $q^*_{200} = 0.8473$. Як випливає з асимптотичних властивостей оцінок $\hat{\Phi}^{(S)}$ [5], це число має бути «близьким» до величини $q^{*(200)} = \pi_0 \cdot \hat{\Phi}_0^{(200)} + \pi_1 \cdot \hat{\Phi}_1^{(200)}$. Обчислюючи послідовно для кожного розв'язку $x^*(k)$, $k = 1, 2, 3, 4$, значення суми $q^{*(200)}(k) = \pi_0 \cdot x_1^*(k) + \pi_1 \cdot x_2^*(k)$, отримаємо $q^{*(200)}(1) = 0.8246$, $q^{*(200)}(2) = 0.8246$, $q^{*(200)}(3) = -0.8246$, $q^{*(200)}(4) = -0.8246$. Отже, оцінку вектора Φ слід вибирати серед розв'язків $x^*(1)$, $x^*(2)$. Як наслідок, приходимо до ситуації, що описана в першій версії числової реалізації алгоритму, і повторюємо проведені там обчислення.

Для ілюстрації другого прикладу використаємо траєкторію $(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(S))$ компоненти $\zeta(k)$ прихованої марковської моделі $(\eta(k), \zeta(k))$, $k = 1, 2, \ldots$, завдовжки $S = 200$, побудовану імітаційним шляхом для параметрів $\lambda = 5$, $\nu = 2$. При цьому для вектора $b = \{b_0, b_1, b_2\}$ функції деформації $D(x, b)$ вибрано такі значення: $b_0 = 0.75$, $b_1 = 3$, $b_2 = 9$. Точні значення координат вектора Φ дорівнюють $\Phi = \{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\} = \left\{0.15, \frac{3}{7} \approx 0.4286, 1\right\}$. Значення статистик $Q_S(l) = Q_{200}(l)$, $l = 1, 2, 3$, для змодельованого вектора деформованих спостережень відповідно дорівнюють $Q_{200} = \{Q_{200}(1), Q_{200}(2), Q_{200}(3)\} = \{0.5718, 0.5985, 0.5735\}$.

Використаємо отримані аналітичним шляхом явні формули для основних елементів прихованої марковської моделі, обчислюючи за ними матриці P та A, стаціонарний розподіл $\pi = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2\}$, а також матриці Π, $\hat{\Pi}$, $\hat{\Pi}^{-1}$. У результаті можемо записати базову систему рівнянь для побудови оцінок вектора Φ:

$$\begin{cases} 0.3086 \cdot (x_3)^2 + 0.1975 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.4938 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0.5718, \\ 0.0282 \cdot (x_1)^2 + 0.2085 \cdot (x_2)^2 + 0.3478 \cdot (x_3)^2 + 0.141 \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ \quad + 0.2743 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0.5985, \\ 0.061 \cdot (x_2)^2 + 0.2912 \cdot (x_3)^2 + 0.1191 \cdot x_1 \cdot x_2 + 0.0784 \cdot x_1 \cdot x_3 + \\ \quad + 0.4503 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0.5735. \end{cases}$$

На відміну від попереднього прикладу нам не вдалося отримати в явному вигляді всі розв'язки цієї системи рівнянь. Покажемо, що в цьому немає потреби. Явний вигляд необхідний лише для тих елементів, які надають змогу реалізувати алгоритм у числовому вигляді. Крім зазначених, це ще два елементи: матриця W, що визначається через власні числа $\{w_1, w_2, w_3\}$ матриць P та A, та ортогональна матриця U, складена з власних векторів матриці A. Скористаємося знайденими в явному вигляді власними числами $\{w_1, w_2, w_3\}$ та формулою загального вигляду відповідних їм власних векторів матриці A. В результаті отримаємо $w_1 = 1$, $w_2 = 0.23397$, $w_3 = -0.67842$.

$$W = \begin{Vmatrix} 1 & 0.23397 & -0.67842 \\ 1 & 0.05474 & 0.46025 \\ 1 & 0.01281 & -0.31224 \end{Vmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{Vmatrix} -0.12346 & 0.34568 & 0.77778 \\ 4.14867 & 1.96656 & -6.11522 \\ -0.22521 & 1.18776 & -0.96255 \end{Vmatrix},$$

$$U = \begin{Vmatrix} 0.31427 & 0.58795 & 0.74536 \\ 0.74958 & 0.32811 & -0.57487 \\ 0.58255 & -0.73937 & 0.33760 \end{Vmatrix}.$$

Використовуючи формулу $s^T = W^{-1} \cdot (Q_{200})^T$, можна знайти допоміжні розв'язки $s_1 = 0.58233$, $s_2 = 0.04252$, $s_3 = 0.03017$. Після цього знаходимо координати вектора $y = \{\sqrt{s_1}, \sqrt{s_2}, \sqrt{s_3}\}$: $y_1 = 0.76310$, $y_2 = 0.20620$, $y_3 = 0.17370$. Записуємо тепер $K = 2^{m+n+1} = 2^3 = 8$ різних розв'язки $y(k)$, $k = 1, \ldots, 8$, для змінних $y = \{y_1, y_2, y_3\}$.

Усі розв'язки $x^*(k)$, $k = 1, \ldots, 8$, базової системи рівнянь знаходимо за формулою $x(k) = y(k) \cdot U \cdot \hat{\Pi}^{-1}$. Подібно до попереднього прикладу, для вибору серед цих розв'язків потрібної оцінки вектора Φ використаємо спочатку статистику q_S. Її значення для змодельованого вектора деформованих спостережень $(\zeta(1), \zeta(2), \ldots, \zeta(200))$ дорівнює $q^*_{200} = 0.75569$ і має бути «близьким» до величини $q^{*(200)} = \pi_0 \cdot \hat{\Phi}_0^{(200)} + \pi_1 \cdot \hat{\Phi}_1^{(200)} + \pi_2 \cdot \hat{\Phi}_2^{(200)}$.

Обчислюючи послідовно для кожного розв'язку $x^*(k)$, $k = 1, \ldots, 8$, суму $q^{*(200)}(k) = \pi_0 \cdot x_1^*(k) + \pi_1 \cdot x_2^*(k) + \pi_2 \cdot x_3^*(k)$, переконуємося в тому, що тільки для чотирьох розв'язків значення $q^{*(200)}(k) = 0.76311$, $k = 1, 2, 3, 4$, є додатним. Один серед них має від'ємні координати. Тому для подальшої перевірки залишається три розв'язки:

$$x^*(1) = \{1.57692, 0.65974, 0.68275\}, \quad x^*(2) = \{0.59327, 0.42959, 1.00082\};$$

$$x^*(3) = \{0.93294, 1.09662, 0.52539\}.$$

Варто зауважити, що подібно до попереднього прикладу значення $q*^{(200)}(k)$ не залежить від $k=1,2,3,4$. У цьому випадку вектор $\{p_0, p_1, p_2\} = \pi\cdot\hat{\Pi}^{-1}\cdot U^T$ дорівнює $p=\{1;0;0\}$. Отже, для довільного вектора $y^0=\{y_0^0, y_1^0, y_2^0\}$ виконуються рівності: $p_1\cdot y_1^0=0$; $p_2\cdot y_2^0=0$; $p_1\cdot y_1^0+p_2\cdot y_2^0=0.$ Позначимо

$$M*_{(1,1)}^{(200)}(k)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2}\sum_{l=0}^{2}\pi_i\cdot p_{ij}\cdot p_{jl}\cdot x_i^*(k)\cdot x_j^*(k)\cdot x_l^*(k),\ k=1,2,3.$$

Для різних розв'язків $x*(k)$, $k=1,2,3,$ значення $M*_{(1,1)}^{(200)}(k)$, $k=1,2,3,$ також будуть різними, тому, згідно з [1], для вибору оцінки вектора Φ можна скористатися статистикою $M_{(1,1)}^{(n)}$. Її значення для змодельованого вектора $(\zeta(1),\zeta(2),\ldots,\zeta(200))$ дорівнює $M*_{(1,1)}^{(200)}=0.39599$, а $M*_{(1,1)}^{(200)}(k)$, $k=1,2,3,$ відповідно дорівнюють $M*_{(1,1)}^{(200)}(1)=0.44009,$ $M*_{(1,1)}^{(200)}(2)=0.43717,$ $M*_{(1,1)}^{(200)}(3)=0.44422$. «Ближче» від інших до значення $M*_{(1,1)}^{(200)}$ знаходиться число $M*_{(1,1)}^{(200)}(2)$, тому як оцінку $\hat{\Phi}^{(200)}$ вектора Φ вибираємо розв'язок $\hat{\Phi}^{(200)}=x*(2)=\{0.59327, 0.42959, 1.00082\}.$

Оцінку $\hat{b}^{(200)}=\{\hat{b}_0^{(200)}, \hat{b}_1^{(200)}, \hat{b}_2^{(200)}\}$ параметра $b=\{b_0, b_1, b_2\}$ функції деформації $D(x,b)$ будемо шукати, розв'язуючи систему рівнянь $\Phi(b)=\hat{\Phi}^{(200)}$. Оскільки $\lambda=5$, а $\nu=2$, то остаточно отримаємо $\hat{b}_0^{(200)}=2.966,$ $\hat{b}_1^{(200)}=3.007,$ $\hat{b}_2^{(200)}=9.007.$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Война А.А. Статистическое оценивание в скрытой марковской модели иерархической структуры. *Кибернетика и системный анализ.* 2014. Т. 50, № 6. С. 87–104.
2. Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. Москва: Наука, 1977. 568 с.
3. Ивченко Г.И., Каштанов В.А., Коваленко И.Н. Теория массового обслуживания. Москва: Высшая школа, 1982. 256 с.
4. Rabiner L.R., Juang B.H. An introduction to hidden Markov models. *IEEE ASSP Mag.* 1986. Vol. 3, N 1. P. 4–16.
5. Voina O.A., Czapla E. An application of the correlation structure of a Markov chain for the estimation of shift parameters in queuing systems. *Theor. Prob. and Math. Statist.* 2005. N 71. P. 53–61.
6. Война А.А. Асимптотическая оптимизация для стохастических моделей, построенных на основании сложного пуассоновского процесса. *Кибернетика и системный анализ.* 2011. Т. 47, № 4. С. 165–175.
7. Voina O.A. Nonparametric estimation for a compound Poisson process governed by a Markov chain. *Theor. Probability and Math. Statist.* 2012. № 85. P. 41–52.

O.A. Voina

USING HIDDEN MARKOV MODELS IN ESTIMATING THE PARAMETERS OF HIERARCHICAL SYSTEMS

Abstract. The method of parametric estimation for hierarchical stochastic models under incomplete observations is considered. The method is based on the features of the correlation structure of hierarchical models. The main attention is paid to the practical implementation of the method. In particular, an approach is proposed that combines analytical studies and empirical verification of the solutions. Specific examples of constructing consistent estimates of the vector parameters of the deformation function are provided and illustrated by direct calculations with numerical data of the simulation model.

Keywords: hidden Markov model, queueing system, statistical estimation, the deformation function.

Надійшла до редакції 05.04.2021