УДК 519.6

В.А. СТОЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *v_a_stoyan@ukr.net*.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ. I. ВИПАДОК ДИСКРЕТНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗОВНІШНЬОДИНАМІЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Анотація. Виконано дослідження двох класів нелінійних просторово розподілених динамічних систем, дискретно спостережуваних за гранично-початковими та просторово розподіленими зовнішньодинамічними збуреннями. Для кожної з них побудовано аналітичні залежності функції стану, яка за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наявною інформацією про зовнішньодинамічні умови їхнього функціонування. Розв'язок початково-крайових задач для розглядуваних систем визначається через множини векторів, які за середньоквадратичним критерієм моделюють задану початково-крайову обстановку, включно з просторово розподіленими зовнішньодинамічними збуреннями. Наведено умови точності й однозначності отриманих математичних результатів. Розглянуто випадки необмежених просторових областей та усталеної динаміки систем.

Ключові слова: псевдорозв'язки, математичне моделювання динамічних систем, просторово розподілені динамічні системи, системи з невизначеностями, некоректні початково-крайові задачі.

ВСТУП

Проблеми розв'язання задач математичної фізики [1] та задач дослідження різної природи динамічних систем [2] в умовах невизначеності їхнього функціонування були, є та будуть складними і не завжди успішно розв'язними аналітично та методами обчислювальної математики.

Методи лінійної алгебри [3], будучи поширеними [4] на лінійні інтегрально та функціонально перетворювальні системи, в поєднанні із запропонованими в [5] підходами до математичного моделювання початково-крайових зовнішньодинамічних збурень надали змогу успішно реалізувати [6, 7] принципово новий підхід до розв'язання початково-крайових задач для довільних просторово розподілених лінійних динамічних систем, некоректно сформульованих за кількістю та якістю початково-крайових спостережень. Викладена в [6, 7] методика математичного моделювання динаміки просторово розподілених систем у випадку дискретно та неперервно спостережуваних початково-крайових зовнішньодинамічних збурювальних факторів ґрунтувалася на запропонованому в [8] алгоритмі переходу від диференціально визначених математичних моделей функціонування просторово розподілених динамічних систем до їхнього інтегрального еквівалента. Визначальним при цьому є ядро інтегральної форми математичної моделі, яка фігурує в алгебраїчних, інтегральних та функціональних рівняннях, розв'язувальних відносно моделювальних функцій та векторів їхніх значень. Згодом нами була запропонована [9, 10] методика псевдообернень деяких класів нелінійних алгебраїчно перетворюючих систем, яка в [11, 12] отримала розвинення на задачі побудови ядер інтегральних еквівалентів диференціально визначених математичних моделей з елементами нелінійності. Були побудовані та досліджені на точність і однозначність множини середньоквадратичних обернень квадратично нелінійних математичних моделей динаміки просторово розподілених систем у випадку дискретно та неперервно визначених зовнішньодинамічних збурень. Останнє, так само як в [6, 7], відкриває шлях до математичного моделювання гранично-початкових зовнішньодинамічних збурень та побудови функції стану просторово розподілених динамічних систем з елементами нелінійності, які є актуальними під час дослідження класично відомих просторово розподілених динамічних процесів, уточнених [13, 14] нелінійним членом.

Нижче будуть побудовані розв'язки (якщо вони є) або середньоквадратичні наближення до розв'язків початково-крайових задач динаміки квадратично нелінійних просторово розподілених систем, неповно спостережуваних за дискретно визначеними зовнішньодинамічними збуреннями. Множини можливих псевдорозв'язків розглядуваних у роботі задач будуть досліджені на точність і однозначність. Будуть визначені особливості останніх в необмежених просторових областях та для усталених режимів функціонування системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ІДЕЙНІ ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЇ СТАНУ СИСТЕМИ

Розглянемо розподілений у просторово-часовій області $S_0^T = \{s = (x, t)$: $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in S_0,\ t \subset [0, T]\}$ динамічний (t — часова координата) процес, функція $y(s)$ стану якого визначається одним із двох рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^{n} (L_k(\partial_s) y(s)) \partial_s^{n-k} y(s) = u(s), \tag{1}$$

$$L(\partial_s) + \sum_{k=0}^{n} (L_k(\partial_s) y(s)) \partial_s^{n-k} y(s) = u(s). \tag{2}$$

Тут $u(s)$ — просторово розподілене зовнішньодинамічне збурення, $\partial_s = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_N})$, а $L(\partial_s)$, $L_k(\partial_s)$, $k = \overline{0, n}$, — лінійні диференціальні оператори. Додатково припустимо, що на контурі Γ просторової області S_0 та для $t = 0$ є такі початково-крайові спостереження:

$$L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} = Y_{rl}^0 \quad (x_l^0 \in S_0,\ l = \overline{1, L_0},\ r = \overline{1, R_0}), \tag{3}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_t) y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_\rho^\Gamma}} = Y_{\rho l}^\Gamma \quad (x_l^\Gamma \in \Gamma \times [0, T],\ l = \overline{1, L_\Gamma},\ \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \tag{4}$$

Так само, як у випадку дослідження лінійних динамічних систем [6, 7] будемо вимагати, щоб

$$\sum_{r=1}^{L_0} \sum_{l=1}^{L_0} \Big(L_r^0(\partial_t) y(s)\Big|_{\substack{t=0 \\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0\Big)^2 + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \sum_{l=1}^{L_\Gamma} \Big(L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s)\Big|_{x=x_l^\Gamma} - Y_{\rho l}^\Gamma\Big)^2 \to \min_{y(s)}. \tag{5}$$

Під час розв'язання задач (1), (3), (4) та (2)–(4) будемо виходити з того, що для випадку, коли розподілене просторово-часове збурення $u(s)$ визначене дискретними значеннями $u(s_m') = u_m$, $m = \overline{1, M}$, або (що еквівалентно) вектором

$$\vec{u} = \mathrm{col}(u_m,\ m = \overline{1, M}),$$

розв'язками (1), (2) або найкращими середньоквадратичними наближеннями до них (за відсутності точного розв'язку) будуть [11, 12] функції

$$y(s) = (U^T U)^{-1} U^T \widetilde{G}^T(s) \widetilde{P}^+ \vec{u} \tag{6}$$

та

$$y(s) = (U^T U)^{-1} U^T [\widetilde{G}^T(s) \widetilde{P}^+ \vec{u} - A(s)] \tag{7}$$

відповідно.

Не наводячи виразів для матриці $\widetilde{P}$, векторної та матричної функцій $A(s)$ та $\widetilde{G}(s)$ (це зроблено в [11]) зауважимо, що ці матриця та матричні функції «уловлюють» [6, 7] фізичну природу досліджуваної системи і разом з вектором

$U = \mathrm{col}((y_m^{(i)}, i=\overline{n,0}),\ m=\overline{1,M})$ визначають вплив дискретно заданих зовнішньодинамічних збурень $u(s'_m)$, $m=\overline{1,M}$, на стан $y(s)$ розглядуваної системи.

Зауважимо принагідно, що [11] значення $y_m^{(i)} = \partial_s^i y(s)\big|_{s=s'_m}$, $i=\overline{0,n}$, $m=\overline{1,M}$, для системи (1) визначаються співвідношенням

$$y_m^{(i)} = \sqrt{P^+_{n-i(m)} \partial_s^i \overline{G}_{n-i}(s)\big|_{s=s'_m} \widetilde{P}^+_{(m)} \vec{u}},$$

а для системи (2) — коренями рівняння

$$(y_m^{(n-k)})^2 + \alpha_{km} y_m^{(n-k)} = \beta_{km}, \tag{8}$$

в якому

$$\alpha_{km} = \partial^{n-k} A_k(s)\big|_{s=s'_m},$$

$$\beta_{km} = P^+_{k(m)} \partial_s^{n-k} \overline{G}_k(s)\big|_{s=s'_m} \widetilde{P}^+_{k(m)} \vec{u}.$$

Тут і далі

$$L(\partial_s) = a_0 \partial_s^n + a_1 \partial_s^{n-1} + \ldots + a_n,$$

$$G_k(s-s') = \frac{1}{(2\pi)^{N+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{L_k(i\lambda)} \prod_{j=1}^{N} e^{i\lambda_j (x_j - x'_j)} e^{i\mu(t-t')} d\lambda_j d\mu,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N),$$

$P^+_{k(m)}$ та $\widetilde{P}^+_m$ — m-рядок та m-стовпець матриць, псевдооберненних до

$$P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s) \overline{G}_k^T(s) ds,\ \widetilde{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(s) \widetilde{G}^T(s) ds,$$

де i — уявна одиниця, а решта позначень визначається співвідношеннями

$$A_k(s) = a_k \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s-s') ds',$$

$$\widetilde{G}(s) = \mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^+_{k(m)} \overline{G}_k(s), k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}),$$

$$\overline{G}_k^T(s) = \mathrm{str}(G_k(s-s'_m), m=\overline{1,M}).$$

Зважаючи на те, що немає особливих обмежень на розмірність вектора $\vec{u}$ та вибір точок s'_m, $m=\overline{1,M}$, в яких визначені його компоненти, а також враховуючи природу вектора U, функцію $y(s)$ стану досліджуваних систем за наявності початково-крайових збурень (3), (4), так само як в [6, 7] подамо сумою

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \tag{9}$$

в якій $y_\infty(s)$ — визначений згідно з (6), (7) внесок вектора $\vec{u}$ взятих у точках s'_m, $m=\overline{1,M}$, значень розподіленого просторово-часового збурення $u(s)$ у загальну функцію стану розглядуваної системи. Складовими $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначаються впливи на стан системи початково-крайових збурень, заданих згідно з (3) та (4).

Залишаючись у межах викладеної в [6 ,7] методики моделювання дискретно визначених початково-крайових умов (3), (4) на стан системи через вектори

$$u_0 = \mathrm{col}(u_0(\sigma_m^0),\ m=\overline{1,M_0}), \tag{10}$$

$$u_\Gamma = \mathrm{col}(u_\Gamma(\sigma_m^\Gamma),\ m=\overline{1,M_\Gamma}) \tag{11}$$

значень моделювальних функцій $u_0(s)$ $(s \in S^0 = S_0 \times (-\infty, 0])$ та $u_\Gamma(s)$ $(s \in S^\Gamma = (R^N \setminus S_0) \times [0, T])$, а також зважаючи на нелінійність розглядуваних систем, зупинимося на особливостях залежності функції стану кожної системи від вектора $\vec{u}$ значень зовнішньодинамічних збурювальних факторів. Визначимо також залежності $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ від компонент моделювальних векторів u_0 та u_Γ відповідно. Зробимо це для кожної системи шляхом аналізу складової $y_\infty(s)$ розв'язку (9).

МОДЕЛЮВАЛЬНІ ФАКТОРИ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

З розв'язку (6) рівняння (1), зважаючи на його розгорнуте представлення [11], запишемо складову $y_\infty(s)$ в (9) у такому вигляді:

$$y_\infty(s) = a(s)\alpha / b\beta, \tag{12}$$

де з урахуванням наведених вище позначень

$$\alpha = \mathrm{col}((\widetilde{P}^+_{(m)}\vec{u})^{3/2},\ m = \overline{1, M}), \tag{13}$$

$$\beta = \mathrm{col}(\widetilde{P}^+_{(m)}\vec{u},\ m = \overline{1, M}), \tag{14}$$

$$a^T(s) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{i(m)} \overline{G}_i(s) \sqrt{P^+_{n-i(m)} \partial^i_s \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m}},\ m = \overline{1, M}\right), \tag{15}$$

$$b^T(s) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{n-i(m)} \partial^i_s \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m},\ m = \overline{1, M}\right). \tag{16}$$

Визначений для $s \in S^T_0$ стан $y_\infty(s)$ залежить від координат s'_m, $m = \overline{1, M}$, зосередження компонент збурювального вектора $\vec{u}$ через (див. [11]) вектор-функції $\overline{G}_i(s)$, $i = \overline{0, n}$, матриці P_i, $i = \overline{0, n}$, та $\widetilde{P}$. Маючи намір визначити функції $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ через компоненти векторів u_0 та u_Γ, через координати σ^0_m, $m = \overline{1, M_0}$ та σ^Γ_m, $m = \overline{1, M_\Gamma}$, компонент цих векторів, перевизначимо передаточні вектор-функції $\overline{G}_i(s)$, $i = \overline{0, n}$, та матриці P_i, $i = \overline{0, n}$, $\widetilde{P}$.

Для цього на додаток до розглядуваних вище рядків-функцій $\overline{G}^T_k(s)$, $k = \overline{0, n}$, позначимо

$$\begin{aligned} \overline{G}^T_{k0}(s) &= \mathrm{str}(G_k(s - \sigma^0_m),\ m = \overline{1, M_0}), \\ \overline{G}^T_{k\Gamma}(s) &= \mathrm{str}(G_k(s - \sigma^\Gamma_m),\ m = \overline{1, M_\Gamma}) \end{aligned} \tag{17}$$

рядки-функції, визначені вибором точок σ^0_m, $m = \overline{1, M_0}$, та σ^Γ_m, $m = \overline{1, M_\Gamma}$, якими обчислюються значення $u_{0m} = u_0(\sigma^0_m)$ та $u_{\Gamma m} = u_\Gamma(\sigma^\Gamma_m)$ моделювальних функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$.

Вибором цих точок визначатимуться й аналоги розглядуваних у [11] матричної функції $\widetilde{G}(s)$ та матриць $\widetilde{P}$ і P_k, $k = \overline{0, n}$. Позначимо їх

$$\begin{aligned} P_{k0} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_{k0}(s) \overline{G}^T_{k0}(s) ds, \\ P_{k\Gamma} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_{k\Gamma}(s) \overline{G}^T_{k\Gamma}(s) ds, \end{aligned} \tag{18}$$

$$\widetilde{G}_0(s)=\mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^+_{i0(m)}\overline{G}_{i0}(s),\ i=\overline{0,n}),\ m=\overline{0,M_0}),$$
$$\widetilde{G}_\Gamma(s)=\mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^+_{i\Gamma(m)}\overline{G}_{i\Gamma}(s),\ i=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\tag{19}$$

$$\widetilde{P}_0=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}_0(s)\widetilde{G}_0^T(s)ds,$$
$$\widetilde{P}_\Gamma=\int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{G}_\Gamma(s)\widetilde{G}_\Gamma^T(s)ds.\tag{20}$$

З урахуванням (17)–(20) складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ визначеної згідно з (9) функції $y(s)$ подібно до (12) подамо співвідношеннями

$$y_0(s)=a_0(s)\alpha_0\ /\ b_0\beta_0\tag{21}$$

та

$$y_\Gamma(s)=a_\Gamma(s)\alpha_\Gamma\ /\ b_\Gamma\beta_\Gamma,\tag{22}$$

в яких, так само як в (13)–(16),

$$\alpha_0=\mathrm{col}((\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0)^{3/2},\ m=\overline{1,M_0}),\ \beta_0=\mathrm{col}(\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0,\ m=\overline{1,M_0}),$$

$$\alpha_\Gamma=\mathrm{col}((\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma)^{3/2},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),\ \beta_\Gamma=\mathrm{col}(\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma,\ m=\overline{1,M_\Gamma}),$$

$$a_0(s)=\mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n}P^+_{i0(m)}\overline{G}_{i0}(s)\sqrt{P^+_{n-i0(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}},\ m=\overline{1,M_0}\right),$$
$$a_\Gamma(s)=\mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n}P^+_{i\Gamma(m)}\overline{G}_{i\Gamma}(s)\sqrt{P^+_{n-i\Gamma(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}},\ m=\overline{1,M_\Gamma}\right),\tag{23}$$
$$b_0=\mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n}P^+_{n-i0(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0},\ m=\overline{1,M_0}\right),$$
$$b_\Gamma=\mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n}P^+_{n-i\Gamma(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma},\ m=\overline{1,M_\Gamma}\right)$$

для визначених згідно з (10), (11) векторів u_0 та u_Γ.

МОДЕЛЮВАЛЬНІ ФАКТОРИ РОЗПОДІЛЕНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ З АДИТИВНО ВИЗНАЧЕНОЮ КВАДРАТИЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Аналогічно запишемо в аналітичному вигляді складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції стану (9), виходячи з розв'язку (7) рівняння (2). З урахуванням розгорнутого представлення [11] цього розв'язку подібно до (12) складову $y_\infty(s)$ подамо співвідношенням

$$y_\infty(s)=\frac{a(s)\alpha(\vec{u})}{b\alpha(\vec{u})},\tag{24}$$

в якому, на відміну від (13)–(16),

$$\alpha(\vec{u})=\mathrm{col}(((y_{km}(\vec{u})\widetilde{P}^+_{(m)}\vec{u},\ y^2_{km}(\vec{u})),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}),\tag{25}$$
$$a^T(s)=(((P^+_{k(m)}\overline{G}_k(s),-A_k(s)),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}),$$
$$b^T=(((0,1),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}).$$

Зі співвідношення (24), як і вище, можна дійти висновку, що передача дії збурювального фактора $\vec{u}$, зосередженого в точках $s'_m\in S_0^T$, $m=\overline{1,M}$, на стан $y(s)$ розглядуваної системи в точці s здійснюється через вектор-функцію $a(s)$.

Вектор-функція $a(s)$ так само визначається виразами для вектор-функції $\widetilde{G}_i(s)$, $i=\overline{0,n}$, та матриць P_i, $i=\overline{0,n}$, $\widetilde{P}$.

Для визначення складових $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ представлення (9) функції стану $y(s)$, якими визначається залежність стану системи від розміщених в точках σ_m^0, $m=\overline{1,M_0}$, та σ_m^Γ, $m=\overline{1,M_\Gamma}$, збурень u_0 та u_Γ, у цих точках слід перевизначити і вектор-функції $\overline{G}_i(s)$, $i=\overline{0,n}$, та матриці P_i, $i=\overline{0,n}$, $\widetilde{P}$. Легко бачити, що таке перевизначення не відрізнятиметься від визначення, поданого співвідношеннями (17)–(20). При цьому відбувається заміна співвідношень (23) на такі:

$$\begin{aligned} a_0(s) &= \mathrm{str}(((p_{i0(m)}^{+}\overline{G}_{i0}(s),\ -A_i(s)),\ i=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}), \\ a_\Gamma(s) &= \mathrm{str}(((p_{i\Gamma(m)}^{+}\overline{G}_{i\Gamma}(s),\ -A_i(s)),\ i=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M}). \end{aligned} \tag{26}$$

З урахуванням (17)–(20) та (26) перевизначимо введену до розгляду в (25) вектор-функцію $\alpha(\vec{u})$, замінивши її на дві вектор-функції

$$\alpha_0(u_0)=\mathrm{col}(((y_{km}(u_0)\widetilde{P}_{0(m)}^{+}u_0,\ y_{km}^2(u_0)),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M_0}),$$

$$\alpha_\Gamma(u_\Gamma)=\mathrm{col}(((y_{km}(u_\Gamma)\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_\Gamma,\ y_{km}^2(u_\Gamma)),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1,M_\Gamma}).$$

Останнє надає змогу записати складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ функції $y(s)$ стану системи (2) в (9) у вигляді

$$y_0(s)=\frac{a_0(s)\alpha_0(u_0)}{b\alpha_0(u_0)}, \tag{27}$$

$$y_\Gamma(s)=\frac{a_\Gamma(s)\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}. \tag{28}$$

Нагадаємо, що тут, як і раніше, u_0 та u_Γ — вектори (10), (11) значень моделювальних функцій $u_0(s)$, $s\in S^0$, та $u_\Gamma(s)$, $s\in S^\Gamma$, компоненти $u_{0m}=u(\sigma_m^0)$, $m=\overline{1,M_0}$, та $u_{\Gamma m}=u_\Gamma(s_m^\Gamma)$, $m=\overline{1,M_\Gamma}$, яких визначимо з урахуванням початково-крайових спостережень (3), (4) відповідно до критерію (5).

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Для знаходження векторів u_0 та u_Γ, з використанням яких обчислена згідно з (9) функція $y(s)$ стану системи (1) задовольняла б початково-крайові співвідношення (3), (4), підставимо представлення (9), записане з урахуванням (12), (21), (22), у формули (3), (4). У результаті отримаємо:

$$\begin{gathered} L_r^0(\partial_t)a_0(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}\alpha_0\ \ /\ \ b_0\beta_0+L_r^0(\partial_t)a_\Gamma(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}\alpha_\Gamma\ \ /\ \ b_\Gamma\beta_\Gamma=\overline{Y}_{rl}^{\,0} \\ (l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0}), \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_0(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}\alpha_0\ \ /\ \ b_0\beta_0+L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_\Gamma(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}\alpha_\Gamma\ \ /\ \ b_\Gamma\beta_\Gamma=\overline{Y}_{\rho l}^{\,\Gamma} \\ (l=\overline{1,L_\Gamma},\ \rho=\overline{1,R_\Gamma}), \end{gathered} \tag{30}$$

де

$$\overline{Y}_{rl}^{\,0}=Y_{rl}^{\,0}-L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},\quad \overline{Y}_{\rho l}^{\,\Gamma}=Y_{\rho l}^{\,\Gamma}-L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}.$$

Позначивши

$$a_{rl}^{00}=\mathrm{str}(a_{rlm}^{00},\ m=\overline{1,M_0}),\ a_{\rho l}^{\Gamma\Gamma}=\mathrm{str}(a_{\rho lm}^{\Gamma\Gamma},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),$$

$$a_{\rho l}^{0\Gamma}=\mathrm{str}(a_{\rho lm}^{0\Gamma},\ m=\overline{1,M_0}),\ a_{rl}^{\Gamma 0}=\mathrm{str}(a_{rlm}^{\Gamma 0},\ m=\overline{1,M_\Gamma}),$$

$$b_0 = \mathrm{str}(b_m^0,\ m=\overline{1, M_0}),\ b_r = \mathrm{str}(b_m^\Gamma,\ m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\alpha_0 = \mathrm{col}(\alpha_{0m},\ m=\overline{1, M_0}),\ \alpha_\Gamma = \mathrm{col}(\alpha_{\Gamma m},\ m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\beta_0 = \mathrm{col}(\beta_{0m},\ m=\overline{1, M_0}),\ \beta_\Gamma = \mathrm{col}(\beta_{\Gamma m},\ m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

де

$$a_{rlm}^{00} = \sum_{i=0}^{n} P_{i0(m)}^{+} L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{i0}(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} \sqrt{P_{n-i0(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}},$$

$$a_{\rho lm}^{0\Gamma} = \sum_{i=0}^{n} P_{i0(m)}^{+} L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{i0}(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma} \sqrt{P_{n-i0(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}},$$

$$a_{rlm}^{\Gamma 0} = \sum_{i=0}^{n} P_{i\Gamma(m)}^{+} L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{i\Gamma}(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} \sqrt{P_{n-i\Gamma(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}},$$

$$a_{\rho lm}^{\Gamma\Gamma} = \sum_{i=0}^{n} P_{i\Gamma(m)}^{+} L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{i\Gamma}(s)\Big|_{s=s_t^\Gamma} \sqrt{P_{n-i\Gamma(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}},$$

$$\alpha_{0m} = (\widetilde{P}_{0(m)}^{+} u_0)^{3/2},\ \beta_{0m} = \widetilde{P}_{0(m)}^{+} u_0,$$

$$\alpha_{\Gamma m} = (\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+} u_\Gamma)^{3/2},\ \beta_{\Gamma m} = \widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+} u_\Gamma,$$

$$b_m^0 = \sum_{i=0}^{n} P_{n-i0(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0},\ b_m^\Gamma = \sum_{i=0}^{n} P_{n-i\Gamma(m)}^{+}\partial_s^i \overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma},$$

розв’язувальні рівняння (29), (30) запишемо у такому вигляді:

$$\frac{\sum_{m=1}^{M_0} a_{rlm}^{00}\alpha_{0m}}{\sum_{m=1}^{M_0} b_m^0 \beta_{0m}} + \frac{\sum_{m=1}^{M_\Gamma} a_{rlm}^{\Gamma 0}\alpha_{\Gamma m}}{\sum_{m=1}^{M_\Gamma} b_m^\Gamma \beta_{\Gamma m}} = \overline{Y}_{rl}^{0}\quad (l=\overline{1, L_0},\ r=\overline{1, R_0}), \tag{31}$$

$$\frac{\sum_{m=1}^{M_0} a_{\rho lm}^{0\Gamma}\alpha_{0m}}{\sum_{m=1}^{M_0} b_m^0 \beta_{0m}} + \frac{\sum_{m=1}^{M_\Gamma} a_{\rho lm}^{\Gamma\Gamma}\alpha_{\Gamma m}}{\sum_{m=1}^{M_\Gamma} b_m^\Gamma \beta_{\Gamma m}} = \overline{Y}_{\rho l}^{\Gamma}\quad (l=\overline{1, L_\Gamma},\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}). \tag{32}$$

Уведемо до розгляду вектори:

$$\begin{gathered}\alpha_1 = \mathrm{col}((\alpha_{0i}\beta_{\Gamma j},\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\\ \alpha_2 = \mathrm{col}((\beta_{0i}\alpha_{0j},\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\\ \beta = \mathrm{col}((\beta_{0i}\beta_{\Gamma j},\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma})\end{gathered} \tag{33}$$

та матриці

$$A_{11} = \mathrm{col}((\mathrm{str}((a_{rli}^{00} b_j^\Gamma,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{12} = \mathrm{col}((\mathrm{str}((a_{rlj}^{00} b_i^\Gamma,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \mathrm{col}((\mathrm{str}((a_{\rho li}^{0\Gamma} b_j^\Gamma,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$A_{22} = \mathrm{col}((\mathrm{str}((a_{\rho lj}^{\Gamma\Gamma} b_i^0,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B_1 = \mathrm{col}((\mathrm{str}((\bar{Y}^{0}_{rl} b^0_i b^\Gamma_j,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),$$

$$B_2 = \mathrm{col}((\mathrm{str}((\bar{Y}^{\Gamma}_{\rho l} b^0_i b^\Gamma_j,\ i=\overline{1, M_0}),\ j=\overline{1, M_\Gamma}),\ l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

з урахуванням яких з (31), (32) маємо:

$$A_{11}\alpha_1 + A_{12}\alpha_2 = B_1\beta,$$
$$A_{21}\alpha_1 + A_{22}\alpha_2 = B_2\beta.$$

Останнє є еквівалентним системі однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A\alpha = 0, \tag{34}$$

в яких

$$\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \beta), \quad A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -B_1 \\ A_{21} & A_{22} & -B_2 \end{pmatrix}.$$

Система (34) може мати ненульовий розв’язок для випадку, коли [4]

$$\det A^{\mathrm{T}} A = 0. \tag{35}$$

Це накладає обмеження на вибір точок s^0_l, $l=\overline{1, L_0}$, s^Γ_l, $l=\overline{1, L_\Gamma}$, спостереження за початково-крайовим станом системи та точок σ^0_m, $m=\overline{1, M_0}$, σ^Γ_m, $m=\overline{1, M_\Gamma}$, в яких визначаються моделювальні вектори u_0 та u_Γ.

За виконання (35) розв’язком (34) буде вектор

$$\alpha = (I - A^+ A)v, \tag{36}$$

за довільного $v \in R^{M_0 M_\Gamma (2 + L_0 R_0)}$.

З урахуванням визначення (33) з (36) отримуємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження компонент u_{0m}, $m=\overline{1, M_0}$, та $u_{\Gamma m}$, $m=\overline{1, M_\Gamma}$, моделювальних векторів u_0, u_Γ відповідно. Цю систему для визначених згідно з (20) матриць $\widetilde{P}_0$ та $\widetilde{P}_\Gamma$ можна записати у вигляді таких співвідношень:

$$((\widetilde{P}^+_0)_{(i)} u_0)^{3/2} ((\widetilde{P}^+_\Gamma)_{(j)} u_\Gamma) = (Z(A)v)_{M_0(j-1)+i}, \tag{37}$$

$$((\widetilde{P}^+_0)_{(i)} u_\Gamma)((\widetilde{P}^+_\Gamma)_{(j)} u_0)^{3/2} = (Z(A)v)_{M_0 M_\Gamma + M_0(j-1)+i}, \tag{38}$$

де $i=\overline{1, M_0}$, $j=\overline{1, M_\Gamma}$.

Процедура розв’язання системи (37), (38) спроститься, якщо її розглядати як систему нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$\xi^{3/2}_{0i} \xi_{\Gamma j} = (Z(A)v)_{M_0(j-1)+i},$$

$$\xi_{0i} \xi^{3/2}_{\Gamma j} = (Z(A)v)_{M_0 M_\Gamma + M_0(j-1)+i}$$

відносно змінних

$$\xi_{0m} = \widetilde{P}^+_{0(m)} u_0,\ m=\overline{1, M_0},\ \xi_{\Gamma m} = \widetilde{P}^+_{\Gamma(m)} u_\Gamma,\ m=\overline{1, M_\Gamma}, \tag{39}$$

Співвідношення (39) для визначених у такий спосіб

$$\xi_0 = \mathrm{col}(\xi_{0m}, m=\overline{1, M_0}),$$

$$\xi_\Gamma = \mathrm{col}(\xi_{\Gamma m}, m=\overline{1, M_\Gamma})$$

надають змогу знайти значення моделювальних векторів u_0 та u_Γ. Вони будуть такими:

$$u_\Gamma = \widetilde{P}_\Gamma \xi_\Gamma,\ u_0 = \widetilde{P}_0 \xi_0.$$

Зауважимо, що знайдені в такий спосіб моделювальні вектори u_0, u_Γ (за умови виконання (35)) точно задовольнятимуть рівняння (34). Це означає, що з їхнім використанням $y(s)$ (співвідношення (9), (12), (21), (22)) точно задовольнятиме систему розв'язувальних рівнянь (1), (2). Похибки розв'язання задачі в цілому визначатимуться [11] похибками переходу від диференціальної моделі (1) до її функціонального представлення (6).

РОЗВ'ЯЗУВАЛЬНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ ЗАДАЧІ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ З АДИТИВНО ВИЗНАЧЕНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Повернемося до розгляду задачі зі знаходження функції $y(s)$ стану системи (2), яка б згідно з (5) задовольняла початково-крайові умови (3), (4).

Як і під час розгляду системи (1) будемо виходити з того, що вплив початково-крайових збурень Y_{rl}^{0}, $l=\overline{1,L_0}$, $r=\overline{1,R_0}$, та $Y_{\rho l}^{\Gamma}$, $l=\overline{1,L_\Gamma}$, $\rho=\overline{1,R_\Gamma}$ на стан системи задається визначеними в (27), (28) складовими $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$. Значення компонент u_{0m}, $m=\overline{1,M_0}$, та $u_{\Gamma m}$, $m=\overline{1,M_\Gamma}$, векторів u_0 та u_Γ, якими б згідно з (5) моделювалися початково-крайові збурення Y_{rl}^{0} та $Y_{\rho l}^{\Gamma}$, визначимо, середньоквадратично обертаючи рівняння (3) та (4) з підставленою туди функцією (9). Неважко бачити, що рівняння ці матимуть вигляд

$$\frac{L_r^0(\partial_t)a_0(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}\alpha_0(u_0)}{b\alpha_0(u_0)}+\frac{L_r^0(\partial_t)a_\Gamma(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}=\overline{Y}_{rl}^{0} \quad (l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0}), \tag{40}$$

$$\frac{L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_0(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}\alpha_0(u_0)}{b\alpha_0(u_0)}+\frac{L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_\Gamma(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}=\overline{Y}_{\rho l}^{\Gamma} \quad (l=\overline{1,L_\Gamma},\ r=\overline{1,R_\Gamma}) \tag{41}$$

для

$$\overline{Y}_{rl}^{0}=Y_{rl}^{0}-L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},\quad \overline{Y}_{\rho l}^{\Gamma}=Y_{\rho l}^{\Gamma}-L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\Big|_{s=s_l^\Gamma}.$$

Позначивши

$$a_{rlkm}^{00}=[P_{k0(m)}^{+}L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{k0}(s),\ -L_r^0(\partial_t)A_k(s)]_{\substack{t=0\\x=x_l^0}}, \tag{42}$$

$$a_{rlkm}^{\Gamma 0}=[P_{k\Gamma(m)}^{+}L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{k\Gamma}(s),\ -L_r^0(\partial_t)A_k(s)]_{\substack{t=0\\x=x_l^0}},$$

$$a_{\rho lkm}^{0\Gamma}=[P_{k0(m)}^{+}L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{k0}(s),\ -L_\rho^\Gamma(\partial_x)A_k(s)]_{s=s_l^\Gamma},$$

$$a_{\rho lkm}^{\Gamma\Gamma}=[P_{k\Gamma(m)}^{+}L_\rho^\Gamma(\partial_x)\overline{G}_{k\Gamma}(s),\ -L_\rho^\Gamma(\partial_x)A_k(s)]_{s=s_l^\Gamma},$$

$$\alpha_{km}^{0}=\mathrm{col}(y_{km}(u_0)\widetilde{P}_{0(m)}^{+}u_0,\ y_{km}^2(u_0)), \tag{43}$$

$$\alpha_{km}^{\Gamma}=\mathrm{col}(y_{km}(u_\Gamma)\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_\Gamma,\ y_{km}^2(u_\Gamma)),$$

$$b_{km}=(0,1)\ \forall k=\overline{0,n},\ \forall m=\overline{1,M_0},\ \forall m=\overline{1,M_\Gamma},$$

запишемо систему (40), (41) у такому вигляді:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}a_{rlkm}^{00}\alpha_{km}^{0}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}b_{km}\alpha_{km}^{0}}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}a_{rlkm}^{\Gamma 0}\alpha_{km}^{\Gamma}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}b_{km}\alpha_{km}^{\Gamma}}=\overline{Y}_{rl}^{0}, \quad l=\overline{1,L_0},\ r=\overline{1,R_0}, \tag{44}$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0} a_{\rho lkm}^{0\Gamma}\alpha_{km}^{0}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0} b_{km}\alpha_{km}^{0}} + \frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma} a_{\rho lkm}^{\Gamma\Gamma}\alpha_{km}^{\Gamma}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma} b_{km}\alpha_{km}^{\Gamma}} = \bar{Y}_{\rho l}^{\Gamma}, \tag{45}$$

$$l=\overline{1, L_\Gamma},\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}.$$

Уведемо до розгляду вектор:

$$\alpha = \mathrm{col}\,((((\alpha_{km}^{0}\alpha_{ij}^{\Gamma}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_\Gamma}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_0}),$$

векторні рядки:

$$A_{rl}^{00} = \mathrm{str}((((a_{rlkm}^{00} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_\Gamma}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_0}),$$

$$A_{rl}^{\Gamma 0} = \mathrm{str}((((a_{rlkm}^{\Gamma 0} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_0}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$A_{\rho l}^{0\Gamma} = \mathrm{str}((((a_{\rho lkm}^{0\Gamma} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_\Gamma}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_0}),$$

$$A_{\rho l}^{\Gamma\Gamma} = \mathrm{str}((((a_{\rho lkm}^{\Gamma\Gamma} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_0}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$B_{rl}^{0} = \mathrm{str}((((\bar{Y}_{rl}^{0} b_{km} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_0}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$B_{\rho l}^{\Gamma} = \mathrm{str}((((\bar{Y}_{\rho l}^{\Gamma} b_{km} b_{ij}, i=\overline{0,n}), j=\overline{1, M_0}), k=\overline{0,n}), m=\overline{1, M_\Gamma})$$

та матриці:

$$A_{11} = \mathrm{col}((A_{rl}^{00}, l=\overline{1, L_0}), r=\overline{1, R_0}),\ A_{12} = \mathrm{col}((A_{rl}^{\Gamma 0}, l=\overline{1, L_0}), r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{21} = \mathrm{col}((A_{\rho l}^{0\Gamma}, l=\overline{1, L_\Gamma}), \rho=\overline{1, R_\Gamma}),\ A_{22} = \mathrm{col}((A_{\rho l}^{\Gamma\Gamma}, l=\overline{1, L_\Gamma}), \rho=\overline{1, R_\Gamma}),$$

$$B^{0} = \mathrm{col}((B_{rl}^{0},\ l=\overline{1, L_0}),\ r=\overline{1, R_0}),\ B^{\Gamma} = \mathrm{col}((B_{\rho l}^{\Gamma}, l=\overline{1, L_\Gamma}),\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}).$$

Це надає змогу записати систему (44), (45) у більш компактному вигляді, а саме

$$A\alpha = 0, \tag{46}$$

де α — вектор, визначений вище, а

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{12} - B^{0} \\ A_{21} + A_{22} - B^{\Gamma} \end{pmatrix}.$$

Зважаючи на те, що компоненти векторів α_{km}^{0} та α_{km}^{Γ}, як і корені $y_{km}(u_0)$ та $y_{km}(u_\Gamma)$ рівняння (8), від яких залежать ці компоненти, виражаються через лінійні комбінації

$$\xi_{0m} = \tilde{P}_{0(m)}^{+} u_0,\ m=\overline{1, M_0},\ \xi_{\Gamma m} = \tilde{P}_{\Gamma(m)}^{+} u_\Gamma,\ m=\overline{1, M_\Gamma},$$

компонент векторів u_0 та u_Γ, доходимо висновку, що система рівнянь (46) є системою (досить складною) нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно змінних ξ_{0m}, $m=\overline{1, M_0}$, та $\xi_{\Gamma m}$, $m=\overline{1, M_\Gamma}$. Чисельне розв'язання цієї системи дозволило б, як і вище, отримати системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{P}_0^{+} u_0 = \xi_0 \tag{47}$$

та

$$\tilde{P}_\Gamma^{+} u_\Gamma = \xi_\Gamma, \tag{48}$$

де

$$\xi_0 = \mathrm{col}(\xi_{0m},\ m = \overline{1, M_0}), \qquad (49)$$

$$\xi_\Gamma = \mathrm{col}(\xi_{\Gamma m},\ m = \overline{1, M_\Gamma}) \qquad (50)$$

відносно моделювальних векторів u_0 та u_Γ. Розв'язання останніх завершило б і розв'язання розглядуваної задачі.

Зауважимо, що процедура розв'язання початково-крайової задачі (2)–(5) спроститься (а це очевидно), якщо динаміку системи (2) розглядати в усталеному режимі, коли відсутні початкові умови (3), або в необмеженій просторовій області та у випадку, коли можна знехтувати крайовими умовами (4). Зважаючи на певну самостійність цих задач, особливості їхнього розв'язання розглянемо нижче.

Випадок необмеженої просторової області. Розглянемо задачу побудови функції $y(s)$ стану системи (2) для випадку, коли впливами крайових збурень $Y_\rho^\Gamma(x, t)$, $\rho = \overline{1, R_\Gamma}$, на стан системи можна знехтувати.

У цьому випадку

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s),$$

де $y_\infty(s)$ та $y_0(s)$ визначаються згідно з (24) та (27). Розв'язувальну систему для знаходження моделювального вектора u_0 такого, щоб

$$\sum_{r=1}^{R_0} \sum_{l=1}^{L_0} \left(L_r^0(\partial_t)\, y(s)\Big|_{\substack{t=0\\ x=x_l^0}} - Y_{rl}^0 \right)^2 \to \min_{y(s)},$$

отримаємо з (44). Вона для визначених згідно з (42) та (43) a_{rlkm}^{00} та α_{km}^0 буде такою:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_0} a_{rlkm}^{00} \alpha_{km}^0 = \bar{Y}_{rl}^0 \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_0} b_{km} \alpha_{km}^0 \; (r = \overline{1, R_0},\ l = \overline{1, L_0}). \qquad (51)$$

Систему (51) можна розглядати як нелінійну алгебраїчну відносно визначеного в (49) вектора ξ_0, оскільки

$$\alpha_{km}^0 = \begin{pmatrix} y_{km}(\xi_0)\xi_{0m} \\ y_{km}^2(\xi_0) \end{pmatrix}, \qquad (52)$$

$$y_{km}(\xi_0) = \frac{1}{2}\left[\alpha_{km} \pm \sqrt{\alpha_{km}^2 - 4 b_{km}^2 \xi_{0m}^2} \right] \qquad (53)$$

для визначених в (8) $\alpha_{km} = \mathrm{const}$ та

$$b_{km} = P_{k(m)}^+ \partial_s^{n-k} \bar{G}_k(s)\Big|_{s=s'_m}.$$

Чисельне розв'язання (51) відносно компонент ξ_{0m}, $m = \overline{1, M_0}$, вектора ξ_0 надасть змогу згідно з (47) знайти моделювальний вектор u_0.

Співвідношення (51) можна розглядати і як систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь

$$A_0 \alpha_0 = 0 \qquad (54)$$

відносно вектора

$$\alpha_0 = \mathrm{col}((\alpha_{km}^0, k = \overline{0, n}), m = \overline{1, M_0})$$

для

$$A_0 = \mathrm{col}(\mathrm{str}(((a_{rlkm}^{00} - \bar{Y}_{rl}^0 b_{km}),\ k = \overline{0, n}),\ m = \overline{1, M_0}),\ l = \overline{1, L_0},\ r = \overline{1, R_0}).$$

За умови, коли $\det A_0^T A_0 = 0$, розв'язком (54) буде

$$\alpha_0 = \upsilon_0 - A_0^+ A_0 \upsilon_0 \quad \forall \upsilon_0 \in R^{M_0(n+1)}.$$

З урахуванням (52) та (53) маємо, що елементи ξ_{0m}, $m = \overline{1, M_0}$, вектора ξ_0 правих частин системи (47) визначатимуться співвідношенням

$$\overline{\alpha}_m^0 \xi_{0m} = \overline{\alpha}_{m1}^0 \, (m = \overline{1, M_0}),$$

де

$$\overline{\alpha}_m^0 = \mathrm{col}\left(\sqrt{\alpha_{km2}^0}, k = \overline{0, n}\right), \; \overline{\alpha}_{m1}^0 = \mathrm{col}(\alpha_{km1}^0, k = \overline{0, n})$$

для

$$\mathrm{col}(\alpha_{km1}^0, \alpha_{km2}^0) = \alpha_{km}^0,$$

звідки з точністю

$$\xi_m^2 = \min_{\xi_{0m}} \| \overline{\alpha}_m^0 \xi_{0m} - \overline{\alpha}_{m1}^0 \|^2 = (\overline{\alpha}_{m1}^0)^T \overline{\alpha}_{m1}^0 - (\overline{\alpha}_{m1}^0)^T P_m^0 (P_m^0)^+ \overline{\alpha}_{m1}^0$$

для

$$P_m^0 = \overline{\alpha}_m^0 (\overline{\alpha}_m^0)^T$$

знаходимо ξ_{0m}, $m = \overline{1, M_0}$, а з урахуванням (49) та (47) маємо

$$\xi_0 = \mathrm{col}(((\overline{\alpha}_m^0)^T \overline{\alpha}_m^0)^{-1} (\overline{\alpha}_m^0)^T \overline{\alpha}_{m1}^0, m = \overline{1, M_0}),$$

$$u_0 = \widetilde{P}_0 \xi_0.$$

Випадок усталеної динаміки. Розглянемо задачу побудови функції $y(s)$ стану системи (2) для випадку, коли динаміка системи є мало залежною від її початкового стану і впливом початково визначених збурювальних факторів $Y_r^0(x)$, $r = \overline{1, R_0}$, можна знехтувати.

У цьому випадку

$$y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s)$$

за визначених згідно з (24) та (28) складових $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$. Аналогічно розглянутому вище маємо, що компоненти α_{km}^Γ, $k = \overline{0, n}$, $m = \overline{1, M_\Gamma}$, вектора $\alpha_\Gamma(u_\Gamma)$ визначатимуться системою рівнянь

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_\Gamma} a_{\rho lkm}^{\Gamma\Gamma} \alpha_{km}^\Gamma = \overline{Y}_{\rho l}^\Gamma \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_\Gamma} b_{km} \alpha_{km}^\Gamma \; (\rho = \overline{1, R_\Gamma}, l = \overline{1, L_\Gamma}) \tag{55}$$

для заданих згідно з (42), (43) α_{km}^Γ, $A_{\rho lkm}^\Gamma$ та b_{km}.

Позначивши

$$\alpha_\Gamma = \mathrm{col}((a_{km}^\Gamma, k = \overline{0, n}), m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

$$A_\Gamma = \mathrm{col}((\mathrm{str}((a_{\rho lkm}^{\Gamma\Gamma}, k = \overline{0, n}), m = \overline{1, M_\Gamma}), l = \overline{1, L_\Gamma}), \rho = \overline{1, R_\Gamma}),$$

приведемо систему (55) до вигляду

$$A_\Gamma \alpha_\Gamma = 0. \tag{56}$$

За умови, коли $\det A_\Gamma^T A_\Gamma = 0$, розв'язком (56) буде вектор

$$\alpha_\Gamma = \upsilon_\Gamma - A_\Gamma^+ A_\Gamma \upsilon_\Gamma \tag{57}$$

для довільного $\upsilon_\Gamma \in R^{M_\Gamma(n+1)}$.

З урахуванням (57) знайдемо компоненти-вектори

$$\alpha_{km}^{\Gamma}=\begin{pmatrix} y_{km}(\xi_{\Gamma})\xi_{\Gamma m} \\ y_{km}^{2}(\xi_{\Gamma}) \end{pmatrix}$$

вектора α_{Γ}, де

$$y_{km}(\xi_{\Gamma})=\frac{1}{2}\left[\alpha_{km}\pm\sqrt{\alpha_{km}^{2}-4b_{km}^{2}\xi_{\Gamma m}^{2}}\right]$$

для визначених вище b_{km} та $\alpha_{km}=\mathrm{const}$.

Позначивши

$$\alpha_{km1}^{\Gamma}=y_{km}(\xi_{\Gamma})\xi_{\Gamma m},\ \alpha_{km2}^{\Gamma}=y_{km}^{2}(\xi_{\Gamma}),$$

де, як і вище,

$$\xi_{\Gamma m}=\tilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_{\Gamma}, \tag{58}$$

компоненти вектора α_{km}^{Γ}, маємо:

$$\sqrt{\alpha_{km2}^{\Gamma}}\xi_{\Gamma m}=\alpha_{km1}^{\Gamma},$$

або, що еквівалентно,

$$\overline{\alpha}_{M}^{\Gamma}\xi_{\Gamma m}=\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma},\ m=\overline{1,M_{\Gamma}}, \tag{59}$$

де

$$\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma}=\mathrm{col}(\alpha_{km1}^{\Gamma},\ k=\overline{0,n}),\ \overline{\alpha}_{m}^{\Gamma}=\mathrm{col}\left(\sqrt{\alpha_{km2}^{\Gamma}},\ k=\overline{0,n}\right).$$

З (59) з точністю

$$\xi_{m}^{2}=\min_{\xi_{\Gamma m}}\|\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma}\xi_{\Gamma m}-\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma}\|^{2}=(\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma})^{T}\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma}-(\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma})^{T}P_{m}^{\Gamma}(P_{m}^{\Gamma})^{+}\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma}$$

для

$$P_{m}^{\Gamma}=\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma}(\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{T}$$

знаходимо $\xi_{\Gamma m}$, $m=\overline{1,M_{\Gamma}}$, а з урахуванням (50) та (58)

$$\xi_{\Gamma}=\mathrm{col}(\xi_{\Gamma m},\ m=\overline{1,M_{\Gamma}})=\mathrm{col}(((\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{T}\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{-1}(\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{T}\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma},\ m=\overline{1,M_{\Gamma}}),$$

та (за потреби)

$$u_{\Gamma}=\tilde{P}_{\Gamma}\xi_{\Gamma},$$

що і завершує розв'язання задачі.

ВИСНОВКИ

Розв'язано задачі дослідження динаміки двох нелінійних просторово розподілених систем, одна з яких визначається лінійною математичною моделлю, доповненою квадратично нелінійним членом, а друга є квадратично нелінійною без лінійного члена. Задачі розв'язано для дискретно заданих значень гранично-початкових та просторово розподілених зовнішньодинамічних збурювальних факторів. Критерій побудови функції стану таких просторово розподілених систем вимагає найкращого середньоквадратичного узгодження його із заданою інформацією про зовнішньодинамічні умови функціонування системи. Виконання цих вимог досягається на етапі переходу від диференціальної форми математичної моделі системи до її інтегрального еквівалента, виконаного нами в [11], та у випадку псевдообернення непростих розв'язувальних рівнянь, які визначаються початково-крайовими умовами функціонування системи. В обох випадках великою мірою використано результати псевдообернення [9, 10] дискретно перетворювальних алгебраїчних нелінійних систем.

Результатом цього наукового дослідження є розрахункові формули для визначення векторів дискретних значень функцій, які за середньоквадратичним критерієм моделюють дискретно визначені гранично-початкові спостереження за системою, та аналітичні залежності відповідної їм функції стану системи.

Отримані результати математичного моделювання розв'язків розглянутих тут (у загальному випадку некоректно сформульованих) початково-крайових задач є прозорими і доступними для практичної реалізації під час дослідження нелінійно уточнених просторово розподілених динамічних процесів, чого не можна досягти методами класичної та обчислювальної математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 288 с.
2. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.
3. Кириченко Н.Ф. Псевдообращение матриц и их рекуррентность в задачах моделирования и управления. *Проблемы управления и информатики*. 1995. № 1. С. 114–127.
4. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. Т. 34, № 3. С. 90–104.
5. Стоян В.А. Об одном подходе к исследованию начально-краевых задач матфизики. *Проблемы управления и информатики*. 1998. № 1. С. 79–86.
6. Стоян В.А. Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем. Киев: ИПЦ «Киевский университет», 2019. 318 с.
7. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
8. Стоян В.А., Двірничук В.Б. До побудови інтегрального еквіваленту лінійних диференціальних моделей. *Доповіді НАН України*. 2012. № 9. С. 36–43.
9. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. I. Мультипликативно нелинейные системы. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 1. С. 127–134.
10. Стоян В.А. Методы линейной алгебры в задачах исследования некоторых классов нелинейных дискретно преобразующих систем. II. Системы с адитивно выделенной нелинейностью. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 2. С. 102–107.
11. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. I. Случай дискретно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 115–127.
12. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. II. Случай непрерывно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2020. Т. 56, № 1. С. 118–127.
13. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 282 с.
14. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Київ: Наук. думка, 2007. 291 с.

V.A. Stoyan

**MATHEMATICAL MODELING OF QUADRATICALLY NONLINEAR SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS.
I. THE CASE OF DISCRETE DEFINITE INITIAL-BOUNDARY EXTERNAL-DYNAMIC DISTUBANCES**

Abstract. Two classes of nonlinear spatially distributed dynamic systems discretely observed according to the initial-boundary and spatially distributed external-dynamic disturbances are analyzed. For each of them, analytical dependences are constructed for the state function, which agrees, according to the root-mean square criterion, with the available information on external-dynamic conditions of their operation. Solution of the initialboundary-value problems for the systems under study is defined in terms of a set of vectors, which, according to the root-mean square criterion, model the given initial-boundary environment, including the spatially distributed external-dynamic disturbances. Conditions of the accuracy and uniqueness of the obtained mathematical results are presented. The cases of unrestricted spatial domains and systems' stable dynamics are considered.

Keywords: pseudo-solutions, mathematical modeling of dynamical systems, spatially distributed dynamical systems, systems with non-definitions, incorrect initial-boundary problems.

Надійшла до редакції 10.11.2020