УДК 519.21

В.К. ЯСИНСЬКИЙ
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *v.yasynskyy@chnu.edu.ua.*

І.В. ЮРЧЕНКО
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна,
e-mail: *i.yurchenko@chnu.edu.ua*.

ПРО ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО СТОХАСТИЧНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВОГО РІВНЯННЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ В ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ

Анотація. Розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від Вінерового процесу. Одержано достатні умови на коефіцієнти нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу, які гарантують існування з імовірністю одиниця його розв'язку.

Ключові слова: стохастичні диференціальні рівняння нейтрального типу в частинних похідних, існування розв'язку з імовірністю одиниця, задача Коші.

ВСТУП

Питання існування та єдиності розв'язку стохастичних диференціальних рівнянь з деякими початковими та граничними умовами в різних функціональних просторах, зокрема рівнянь у частинних похідних, досліджували багато авторів [1–7]. У працях [8, 9] одержано теорему існування та єдиності розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння реакції–дифузії нейтрального типу. У цій статті розглянуто питання існування розв'язку задачі Коші в класі нелінійних дифузійних стохастичних диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень, незалежних від Вінерового процесу, і продовжено дослідження, розпочаті в роботах [8–10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Нехай на ймовірнісному базисі $(\Omega, F, \{F_t, t \geq t_0, 0\}, \mathbf{P})$ задано нелінійне дифузійне стохастичне диференціально-різницеве рівняння нейтрального типу (НДСДРРНТ) в частинних похідних під дією випадкових зовнішніх збурень, незалежних від Вінерового процесу,

$$d\left(u(t,x)+\int\limits_{\mathbf{R}^r} b(t,x,y)u(t-\tau,\ y)\,dy\right)=\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}+$$
$$+\sigma(t,u(t-\tau,x))dw(t,x)+\int\limits_{\mathbf{Z}} c(t,u(t-\tau,x),z)\widetilde{\nu}(dz,dt) \tag{1}$$

для $t\in(0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початкових даних

$$u(t,x)=\psi(t,x)\quad \forall t\in[-\tau,0], \tag{2}$$

$u(t,x):[0,T]\times\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ — розв'язок задачі (1), (2); $T\in(0,\infty)$ — фіксований дійсний час, $\tau>0$, r-вимірний оператор Лапласа [2, 11] має вигляд

$$\Delta_x\equiv\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x_j^2}, \tag{3}$$

$w(t,x)$ — $L_2(\mathbf{R}^r)$-вимірний Q-Вінеровий процес [12]; $\widetilde{\nu}(A,t) \equiv \nu(A,t) - \mathbf{E}\{\nu^2(A,t)\}$ — центрована Пуассонова міра [1], $\sigma:[0,T]\times\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ і $b:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$, $c:[0,T]\times\mathbf{R}^r\times\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ — деякі конкретні функції, які будуть визначені під час дослідження; $\psi:[-\tau,0]\times\mathbf{R}^r \to \mathbf{R}^1$ — функція початкових даних.

ПРО ПОПЕРЕДНІ РЕЗУЛЬТАТИ ТА ОСНОВНІ ОЗНАЧЕННЯ

Наведемо декілька тверджень з праць [6–9].

Лема 1 [7, с. 188]. Оператор

$$S(t): L_2(\mathbf{R}^r) \to L_2(\mathbf{R}^r) \tag{4}$$

генерує розв'язок однорідної задачі Коші для рівняння теплопровідності ([8, лема 1]) з імовірністю одиниця

$$d(u(t,x)) + \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz = \Delta_x u(t,x) \tag{5}$$

для початкових даних (2) згідно з правилом

$$u(t,x) = (s(t)g(\cdot))(x) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t,x-y)g(\cdot)dy \tag{6}$$

та утворює C_0 — напівгрупу операторів, інфінітезимальним оператором якої є випадковий Лапласіан $\Delta_x(\omega)$ (3). Напівгрупа $S(t)$ є стискальною, тобто

$$\|(S(t)g(\cdot))(x)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \|g(x)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \tag{7}$$

Побудуємо потік (фільтрацію) σ-алгебр $\{F_t, t \ge t_0 \ge 0\}$, який породжений $L_2(\mathbf{R}^r)$-значним Q-Вінеровим процесом

$$w(t,x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\, e_n(x)\beta_n(t) \tag{8}$$

та центрованою Пуассоновою мірою $\widetilde{\nu}(A,t) \equiv \nu(A,t) - \mathbf{E}\{\nu(A,t)\}$, де $\{\beta_n(t) \equiv \beta_n(t,\omega)\} \subset \mathbf{R}^1$ — незалежні стандартні одновимірні Вінерові процеси, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \equiv \lambda < \infty. \tag{9}$$

До того ж система векторів $e_n(x) \equiv \bar{e}_n(x)$ утворює ортонормований базис у $L_2(\mathbf{R}^r)$ такий, що

$$\sup_{n\in\{1,2,\ldots\}} \operatorname{ess\,sup}_{x\in\mathbf{R}^r} |e_n(x)| \le 1. \tag{10}$$

Уведемо простір Банаха $\mathfrak{B}_{2,T}$ всіх $L_2(\mathbf{R}^r)$-значних F_t-вимірних та неперервних з імовірністю одиниця випадкових процесів $\xi(\cdot) \equiv \xi(t,\omega):[0,T]\times\Omega \to L_2(\mathbf{R}^r)$ з нормою

$$\|\xi(\cdot)\|_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sqrt{\sup_{0\le t\le T} \mathbf{E}\|\xi(t,\omega)\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}}. \tag{11}$$

Означення 1. Неперервну випадкову функцію $u \equiv u(t,x,\omega):[-\tau,T]\times\mathbf{R}^r\times\Omega \to D^1([-\tau,T])$ називатимемо м'яким розв'язком задачі (1), (2), якщо виконуються умови:

1) $u \in F_T$-вимірною для майже всіх $t \in [-\tau,T]$ та фіксованих $x \in \mathbf{R}^r$, $\omega \in \Omega$;

2) u задовольняє умову (інтегральне рівняння)

$$u(t,x,\omega) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t,x-y)\left(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0,y,z)\psi(-\tau,z)dz\right)dy - \int_{\mathbf{R}^r} b(0,x,y)u(t-\tau,y)dy +$$

$$+\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r} c(0,\ y,\ z,\ z_1)\psi(-\tau,\ z_1)\Pi(dz)dz_1 dy-\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r} c(0,x,\ y,\ z)u(t-\tau,\ y)\Pi(dz)dy-$$

$$-\int_0^t\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\times\int_{\mathbf{R}^r} b(s,\ y,\ z)u(s-\tau,\ z)dzdy\right)ds-$$

$$-\int_0^t\left(\int_{\mathbf{Z}}\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\times\int_{\mathbf{R}^r} c(s,\ y,\ z_1,\ z)u(s-\tau,\ z_1)\Pi(dz)dz_1 dy\right)ds+$$

$$+\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\sigma(s,u(s-\tau),\ y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s) \qquad (12)$$

для $t\in[0,T]$, $x\in\mathbf{R}^r$ за початкової умови (2);

3) існує норма

$$E\left\{\int_0^T ||u(t,x,\omega)||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\,dt\right\}<\infty. \qquad (13)$$

Лема 2 [9]. Математичне сподівання від квадрата $u(t,x,\omega)$ (див. (13)) є нормою.

ОСНОВНЕ ТВЕРДЖЕННЯ

Будемо надалі вважати, що ймовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t\ge t_0\}, \mathbf{P})$ побудовано [1, 2, 11–13] для задачі (1), (2), яка є предметом дослідження цієї статті.

Нехай для задачі (1), (2) виконано умови:

1) коефіцієнти $\sigma\equiv\sigma(t,u,x)$ та $c(t,u,x,z)$ є:

— вимірними за всіма аргументами;

— задовольняють умову Ліпшиця за другим аргументом

$$|\sigma(t,u,x)-\sigma(t,v,x)|+\int_{\mathbf{Z}}|c(t,u,x,z)-c(t,v,x,z)|\,\Pi(dz)\le L\,|u-v|$$

для $\forall t\in[0,T]$, $u,v\in\mathbf{R}^1$, $x\in\mathbf{R}^r$;

2) початкова функція $\psi(t,x,\omega)$ є:

— F_0-вимірною відносно аргумента $t\in[0,T]$;

— незалежною від Вінерового процесу $w(t)\equiv w(t,\omega)\in\mathbf{R}^1$ для $\forall t\in[0,T]$ та центрованої Пуассонової міри $\tilde{\nu}(t,x,z)$;

— має норму

$$\sup_{-\tau\le t\le 0}\mathbf{E}||\psi(t,x,\omega)||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}<\infty; \qquad (14)$$

3) функції $b\equiv b(t,x,\ y)$ та $c(t,x,\ y,\ z)$ задовольняють умови:

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,\ y)dy}\,dx+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int_{\mathbf{R}} c^2(t,x,\ y,\ z)\Pi(dz)dy}\,dx=K_1<\infty; \qquad (15)$$

$$\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(t,x,\ y)dydx+$$

$$+\sup_{0\le t\le T}\int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} c^2(t,x,\ y,z)\Pi(dz)dydx=K_2<\infty; \qquad (16)$$

для кожної точки $x \in \mathbf{R}^r$ існують частинні похідні $\partial_{x_i} b$, $\partial_{x_i x_j} b$, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, r\}$;

матриця Гессе $D_x^2 b$ задовольняє умову

$$|\nabla_x b(t, x, y)| + \left|\nabla_x \int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z)\Pi(dz)\right| +$$

$$+ \| D_x^2 b(t, x, y) \| + \left\| D_x^2 \left(\int_{\mathbf{Z}} c(t, x, y, z)\Pi(dz) \right) \right\| \le \Phi(t, x, y) \tag{17}$$

для $\forall t \in [0, T] \subset [0, \infty)$, $\{x, y\} \subset \mathbf{R}^r$, де функція $\Phi : [0, T] \times \mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^r \to [0, \infty)$ задовольняє умову обмеженості подвійного просторового інтеграла,

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} \Phi(t, x, y) dx dy = K_3 < \infty; \tag{18}$$

4) для функції $\Phi(t, x, y)$ виконується аналог умови Ліпшиця за другим аргументом

$$|\Phi(t, x, z) - \Phi(t, x_0, z)| \le \zeta(t, z, x_0, \delta) |x - x_0|,$$

де для кожної точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$ існує її окіл $B_\delta(x_0)$ та невід'ємна функція $\zeta \equiv \zeta(t, z, x_0, \delta)$ для $\forall t \in [0, T]$, $|x - x_0| < \delta$, $z \in \mathbf{R}^r$,

$$\sup_{0 \le t \le T} \zeta(t, \cdot, x_0, \delta) \in L_2(\mathbf{R}^r), \ \delta \in \mathbf{R}_+. \tag{19}$$

У цьому разі задача (1), (2) для нелінійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу (НСДРРНТ) має єдиний м'який розв'язок $u \equiv u(t, x, \omega) \in \mathfrak{B}_{2,T}$ з імовірністю одиниця для $\forall t \in [0, T]$, якщо

$$\sup_{0 \le t \le T} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(t, x, y) dx dy \equiv K_5 < \frac{1}{4}. \tag{20}$$

ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНОГО ТВЕРДЖЕННЯ

Доведення розіб'ємо на етапи, що розглядаються в теоремі Банаха [11, 12], яку застосуємо для встановлення з імовірністю одиниця єдиного розв'язку задачі (1), (2) (задачі Коші). Будемо використовувати методику, наведену в працях [8, 9]. Проведемо доведення методом кроків. Спочатку одержимо невідому функцію на відрізку $[0, \tau]$. Отриману невідому функцію продовжимо — на першому відрізку за початкову функцію приймемо знайдену невідому функцію і повторюємо доведення для знаходження розв'язку на другому відрізку і т.д.

Розглянемо оператор $S : \mathfrak{B}_{2,T} \to \mathfrak{B}_{2,T}$, який діє для $t \in [0, T]$, $x, y \in \mathbf{R}^r$ за правилом:

$$(Su)(t) = \int_{\mathbf{R}^r} K(t, x - y) \left[\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z) \psi(-\tau, z) dz \right] dy -$$

$$- \int_{\mathbf{R}^r} b(t, y, z) u(t - \tau, y) dy - \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(t, y, z, z_1) u(t - \tau, y) dy \Pi(dz) -$$

$$- \int_{\mathbf{Z}} \int_0^t \left[\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} (K(t - s, x - y) \int_{\mathbf{R}^r} c(s, y, z, z_1) u(s - \tau, z_1) \Pi(dz) dz_1) dy \right] ds -$$

$$- \int_0^t \left[\Delta_x \int_{\mathbf{R}^r} (K(t - s, x - y) \int_{\mathbf{R}^r} b(s, y, z) u(s - \tau, z) dz) dy \right] ds +$$

$$+\int_0^t \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left[\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s, s-y)\sigma(s, u(s-\tau), y) e_n(y) dy \right] d\rho_n(s) \equiv \sum_{j=0}^{4} I_j(t) \quad (21)$$

для початкових даних (2). Доведемо, що цей оператор є стискальним.

Спочатку треба довести, що $Su \in \mathfrak{B}_{2,T}$ для $\forall u \in \mathfrak{B}_{2,T}$. Для цього оцінимо п'ять норм $|| I_j(s) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} \equiv \sup \mathbf{E} || I_j(s) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$, $j = 0, 1, 2, 3, 4$.

Застосуємо нерівність (7) леми 1, нерівність Коші–Шварца [2] та умови (14), (20) і отримаємо оцінку для супремума математичного сподівання $I_0(s)$ з виразу для оператора $(Su)(t)$ (див. (21)), а саме

$$|| I_0(s) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} || I_0(s) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^d)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s, x-y)(\psi(0) + \int_{\mathbf{R}^r} b(0, y, z)\psi(-\tau, z) dz) dy + \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, y, z_1, z)\psi(-\tau, z_1) dz_1) dy \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 3\mathbf{E} || \psi(0) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 3\mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z)\psi(-\tau, z) dz \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ 3\mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} c(0, x, z_1, z)\psi(-\tau, z_1) dz_1 \Pi(dz) \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= 3\mathbf{E} || \psi(0) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 3\mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(0, x, z)\psi(-\tau, z) dz \right)^2 dx +$$

$$+ 3\mathbf{E} \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} (c(0, x, z_1, z)\psi(-\tau, z) dz_1 \Pi(dz))^2 dx \le$$

$$\le 3\mathbf{E} || \psi(0) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 3 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz +$$

$$+ 3 \left(\int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(0, x, z_1, z) dz_1 dx \Pi(dz) \right) \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(-\tau, z) dz =$$

$$= 3\mathbf{E} || \psi(0) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + 3 \left(\int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} b^2(0, x, z) dz dx \right) \mathbf{E} || \psi(-\tau) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} +$$

$$+ 3 \int_{\mathbf{Z}} \int_{\mathbf{R}^r} \int_{\mathbf{R}^r} c^2(0, x, z_1, z) dz_1 \Pi(dz) dx \, \mathbf{E} || \psi(-\tau) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} = C < \infty.$$

Застосуємо нерівність Коші–Шварца [2] та припущення (14), (20) для оцінювання супремуму математичного сподівання $I_1(s)$, а саме

$$|| I_1(s) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} || I_1(s) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y) u(s-\tau) dy \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= \sup_{0 \le s \le t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y) u(s-\tau, y) dy \right)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} u^2(s-\tau,y)dy \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\cdot \sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx.$$

Потім спрацьовує очевидна нерівність на першому кроці відрізка $[0,\tau]$ для розв'язку $u(t)$ рівняння (1) за умови $t\in[0,T]$:

$$\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le \sup_{0\le s\le \tau}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{\tau\le s\le t}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} =$$

$$= \sup_{-\tau\le s-\tau\le 0}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \qquad (22)$$

З урахуванням (22) з попередньої нерівності отримуємо оцінку

$$||\,I_1(s)\,||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx\right)\left(\sup_{-\tau\le s-\tau\le 0}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le s-\tau\le t-\tau}\mathbf{E}\,||\,u(s-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) =$$

$$= \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\left(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathbf{E}\,||\,u(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le s\le t-\tau}\mathbf{E}\,||\,u(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) =$$

$$= \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)\,dydx\right)\left(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathbf{E}\,||\,\psi(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le s\le t-\tau}\mathbf{E}\,||\,u(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,y)dydx\right)\left(\sup_{-\tau\le s\le 0}\mathbf{E}\,||\,\psi(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\,||\,u(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) = C_1 < \infty\,.$$

В аналогічний спосіб обчислюється супремум математичного сподівання квадрата інтеграла $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$ з відповідними нормами

$$||\,I_2(s)\,||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\,||\,I_2(s)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int_0^s\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dl\right)d\tau\right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_0^s\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-l,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)dl\right)^2 dx \le$$

$$\le \sup_{0\le s\le t} s\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_0^s\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dl\right)dx \le t\cdot\varepsilon(s), \quad (23)$$

де
$$\varepsilon(s) \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_0^s\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dl\right)dx. \quad (24)$$

Змінюючи порядок інтегрування у виразі для $\varepsilon(s)$ (див. (24)), матимемо оцінку для $I_2(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,T}$:

$$||I_2(s)||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le t\cdot\varepsilon(s) =$$

$$= t\cdot\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\int_0^s\left(\int_{\mathbf{R}^r}\left(\Delta_x\int_{\mathbf{R}^r}K(s-\tau,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy\right)^2 dx\right)dl \le$$

$$\le Ct\sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\{\int_0^s\int_{\mathbf{R}^r}\left\| D_x^2\int_{\mathbf{R}^r}b(l,x,y)u(l-\tau,z)dz\right\|^2 dxdl\right\} =$$

$$= Ct\mathbf{E}\left\{\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\left\| D_x^2\int_{\mathbf{R}^r}b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right\|^2 dxdl\right\}. \quad (25)$$

В оцінках (17), (25)

$$\nabla_x \equiv (\partial_{x_1}\ldots\partial_{x_r})^{\mathrm{T}};\; D_x^2 = \begin{pmatrix}\partial^2_{x_1x_1} & \ldots & \partial^2_{x_1x_r}\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \partial^2_{x_rx_1} & \ldots & \partial^2_{x_rx_r}\end{pmatrix}, \quad (26)$$

де $||\cdot||$ — відповідна матрична норма.

Далі використовуємо лему 1 [8, лема 4]. Якщо умови цієї леми для

$$u(l,x) = \int_{\mathbf{R}^r}K(s-l,x-y)\left(\int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz\right)dy,$$
$$g(l,x) \equiv \int_{\mathbf{R}^r}b(l,y,z)u(l-\tau,z)dz \quad (27)$$

виконуються, то оператор $S(\cdot)$ є стискальним (див. (7)).

Перевіримо умови леми 1, тобто доведемо, що:

1) з імовірністю одиниця для кожного $l\in[0,t]$ матимемо

$$\int_{\mathbf{R}^r}b(l,\cdot,z)u(l-\tau,z)dz \in L_1(\mathbf{R}^r); \quad (28)$$

2) будуть виконуватися такі включення:

$$|\nabla_x g| \in L_2(\mathbf{R}^r),\; ||D_x^2 g|| \in L_2(\mathbf{R}^r). \quad (29)$$

Перевіримо умову 1). Справедливість (28) випливає з умов Коші–Шварца, умов 2) основного твердження та нерівності (20) зі сталою K_5:

$$\mathbf{E}\left\{\int_{\mathbf{R}^r}\left|\int_{\mathbf{R}^r}b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz\right|dx\right\} \le$$

$$\le \left(\int_{\mathbf{R}^r}\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r}b^2(l,x,z)dz\,dx}\right)\sqrt{\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}u^2(l-\tau,z)dz} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le l\le t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l,x,z)dz\, dx} \right) \sqrt{\sup_{0\le l\le t} \mathbf{E}\,||\, u(l-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le l\le t} \int_{\mathbf{R}^r} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} b^2(l,x,z)dzdx} \right) \left(\sqrt{\sup_{-\tau\le l\le 0} \mathbf{E}\,||\,\psi(l)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le l\le t} \mathbf{E}\,||\, u(l)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right)^{1/2}.$$

Отже, з імовірністю одиниця умова 1) виконується:

$$\int_{\mathbf{R}^r} \left| \int_{\mathbf{R}^r} b(l,x,z)u(l-\tau,z)dz \right| dx = C_1 < \infty.$$

Умову (29) доведемо для $|\nabla_x g|$. Для $||D_x^2 g||$ міркуватимемо аналогічно. Спочатку доведемо диференційовність $g(l,x)$ (див. (27)) у точці $x = x_0 \in \mathbf{R}^r$.

Нехай $B_\delta(x_0)$ є околом точки $x_0 \in \mathbf{R}^r$. З умов (17) та (19) випливає

$$|\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)| \le \psi(t,x,z)\,|\,u(t-\tau,z)\,| =$$

$$= (\psi(t,x,z) - \psi(t,x_0,z) + \psi(t,x_0,z))|\,u(t-\tau,z)\,| \le$$

$$\le (|\,\psi(t,x,z) - \psi(t,x_0,z)\,| + \psi(t,x_0,z))|\,u(t-\tau,z)\,| \le$$

$$\le (\varphi(t,z,x_0,\delta)\,|\,x - x_0\,| + \psi(t,x_0,z))|\,u(t-\tau,z)\,| \le$$

$$\le (\delta\varphi(t,z,x_0,\delta) + \psi(t,x_0,z))|\,u(t-\tau,z)\,|.$$

Перевіримо включення

$$(\delta\varphi(t,\cdot,x_0,\delta) + \psi(t,x_0,\cdot))\,|\,u(t-\tau,\cdot)\,| \in L_1(\mathbf{R}^r). \tag{30}$$

Застосуємо нерівність Коші–Шварца та умови (17), (18), (20)

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta) + \psi(t_1,x_0,z))|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz =$$

$$= \delta\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} \varphi(t_1,z,x_0,\delta)\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz + \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r} \psi(t_1,x_0,z)\,|\,u(t_1-\tau,z)|\,dz \le$$

$$\le \left(\delta\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1,z,x_0,\delta)dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1,x_0,z)dz} \right) \sqrt{\sup_{0\le t_1\le t} \mathbf{E}\,||\,u(t_1-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}} \le$$

$$\le \left(\delta\sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \varphi^2(t_1,z,x_0,\delta)dz} + \sqrt{\int_{\mathbf{R}^r} \psi^2(t_1,x_0,z)dz} \right) \left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0} \mathbf{E}\,||\,\psi(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le t_1\le t} \mathbf{E}\,||\,u(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \right)^{1/2} < \infty.$$

Внаслідок цього з імовірністю одиниця одержимо

$$\int_{\mathbf{R}^r} (\delta\varphi(t_1,z,x_0,\delta) + \psi(t_1,x_0,\zeta))\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz < \infty.$$

Звідси згідно з локальною теоремою про диференційовність інтеграла за параметром для функції (27) існує градієнт $\nabla_x g$ [2] та виконується рівність

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz = \int_{\mathbf{R}^r} \nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz. \tag{31}$$

Залишилось довести, що

$$\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,\cdot,z)u(t-\tau,z)dz \in L_2(\mathbf{R}^r). \tag{32}$$

Враховуючи (31), (17), нерівність Коші–Шварца, умови (18) та (14), отримаємо співвідношення

$$\mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left|\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz\right|^2 dx =$$

$$= \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)dz\right)^2 dx \le \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r}|\nabla_x b(t,x,z)u(t-\tau,z)|\,dz\right)^2 dx \le$$

$$\le \mathbf{E}\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r} Z(t,x,z)\,|\,u(t-\tau,z)\,|\,dz\right)^2 dx \le \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t,x,z)dzdx\right)\mathbf{E}\left\{\int_{\mathbf{R}^r} u^2(t-\tau)dt\right\} \le$$

$$\le \sup_{0\le t_1\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t,x,z)dzdx\right)\mathbf{E}\,||\,u(t_1-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \sup_{0\le t_1\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}\mathbf{E}\,||\,\psi(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \sup_{0\le t_1\le t}\mathbf{E}\,||\,u(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) < \infty.$$

Звідси отримуємо

$$\int_{\mathbf{R}^r}\left|\nabla_x \int_{\mathbf{R}^r} b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)\,dz\right|^2 dx < \infty.$$

Остаточно з (25) матимемо оцінку

$$||\,I_2(s)\,||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le Ct\mathbf{E}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\left\|D_x^2\int_{\mathbf{R}^r} b(t_1,x,z)u(t_1-\tau,z)dz\right\|^2 dxdt_1 \le$$

$$\le Ct\mathbf{E}\int_0^t\int_{\mathbf{R}^r}\left(\int_{\mathbf{R}^r}||\,D_x^2 b(t_1,x,z)\,||\,|\,u(t_1-\tau,z)\,|\,dz\right)^2 dxdt_1 \le$$

$$\le Ct\int_0^t\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\mathbf{E}\,||\,u(t_1-\tau)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\,dt_1 \le$$

$$\le Ct^2\sup_{0\le t_1\le t}\left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(t_1,x,z)dzdx\right)\left(\sup_{-\tau\le t_1\le 0}\mathbf{E}\,||\,\psi(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le t_1\le t}\mathbf{E}\,||\,u(t_1)\,||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}\right) \le C_2 < \infty. \tag{33}$$

Отримаємо оцінку для $I_3(s)$. Надалі під $||\cdot||$ будемо розуміти $||\cdot||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}$.

З урахуванням нерівності Коші–Шварца, теореми Фубіні [2] та умов (7), (14) матимемо для норми $I_3(s)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$||\,I_3(s)\,||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\,||\,I_3(s)\,||^2 \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t}\mathbf{E}\left\|\int_0^t\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}\left(\int_{\mathbf{R}^r} K(t-s,x-y)\sigma(s,u(s-\tau),\,y)e_n(y)dy\right)d\beta_n(s)\right\|^2 =$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z)\sigma(y, u(y-\tau, z), z) e_n(z)\,dz \right) d\beta_n(y) \right)^2 dx =$$

$$= \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_{\mathbf{R}^r} \int_0^s \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z)\sigma(y, u(y-\tau, z), z) e_n(z)dz \right)^2 dydx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z)\,|\,\sigma(y, u(y-\tau, z), z)\,|\, e_n(z)dz \right)^2 dydx \le$$

$$\le L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \int_{\mathbf{R}^r} \left(\int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z)(1+|\,u(y-\tau, z)\,|) e_n(z)dz \right)^2 dxdy =$$

$$= L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \left\| \int_{\mathbf{R}^r} K(s-y, x-z)(1+|\,u(y-\tau)\,|) e_n dx \right\| dy \le$$

$$\le L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \int_0^s \|\,(1+|\,u(y-\tau)\,|) e_n \|\, dy \le$$

$$\le 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{E} \int_0^t (\|\,e_n\|^2 + \|\,u(y-\tau) e_n\|^2)\,dy =$$

$$= 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \mathbf{E} \int_0^t \left(1 + \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) e_n^2 dx \right) dy \le 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(t + \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) dxdy \right) \le$$

$$\le 2L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \left(t + \mathbf{E} \int_0^t \int_{\mathbf{R}^r} u^2(y-\tau, x) dxdy \right) \le$$

$$\le 2L^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) \left(t + \tau \sup_{-\tau\le y\le 0} \mathbf{E}\|\,\psi(y)\|^2 + \mathbf{E} \int_0^t \|\,u(y)\|^2\, dy \right) = C_3 < \infty . \qquad (34)$$

Оцінювання інтеграла $I_4(s)$, що містить інтеграл за Пуассоновою мірою, виконується аналогічно до $I_2(s)$, оскільки інтеграл Скорохода має аналогічні до інтеграла Вінера–Іто відповідні властивості. Отже, $\|\,I_4(s)\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le C_4 < \infty$.

Об’єднавши п’ять отриманих оцінок для $I_i(s)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, матимемо для $u \in \mathfrak{B}_{2,t}$ нерівність

$$\|\,(\Psi u)(t)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^{4} I_j(t) \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le 5 \sum_{j=0}^{4} \|\,I_j(t)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,T}} . \qquad (35)$$

Оскільки F_t-вимірність $(\Psi u)(t)$ очевидна, можна дійти висновку, що Ψ заданий.

Доведемо, що оператор Ψ має єдину стискальну фіксовану точку. Дійсно, з урахуванням чотирьох отриманих нерівностей для оцінок $I_i(s)$, $i = 1, 2, 3, 4$, та властивості лінійності r-вимірного інтеграла матимемо для різниці $I_1(s)(u) - I_1(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$ оцінку

$$\|\,I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\,\|^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E}\|\,I_1(s)(u) - I_1(s)(v)\,\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \equiv$$

$$\equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \left\| \int_{\mathbf{R}^r} b(s, x, y)(u(s-\tau) - v(s-\tau))dy \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,\ y)dydx \right) || u - v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \qquad (36)$$

Аналогічно отримуємо оцінку для різниці $I_2(s)(u) - I_2(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$, а саме

$$|| I_2(s)(u) - I_2(s)(v) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \le$$

$$\le Ct^2 \sup_{0\le \tau\le t} \left(\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,\ y)dydx \right) \sup_{0\le \tau\le t} \mathbf{E} || u(\tau) - v(\tau) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)}. \qquad (37)$$

Попередні міркування справджуються і для отримання оцінок різниць $I_3(s)(u) - I_3(s)(v)$, $I_4(s)(u) - I_4(s)(v)$ у просторі $\mathfrak{B}_{2,t}$:

$$\begin{aligned} || I_3(s)(u) - I_3(s)(v) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} &\le L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t\, || u - v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \\ || I_4(s)(u) - I_4(s)(v) ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} &\le L^2 C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t\, || u - v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}. \end{aligned} \qquad (38)$$

З урахуванням оцінок (35)–(38) отримаємо

$$|| \Psi u - \Psi v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} \equiv \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \left\| \sum_{j=0}^{4} (I_j(s)(u) - I_j(s)(v)) \right\|^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 5 \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} \sum_{j=0}^{4} || I_j(s)(u) - I_j(s)(v) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 5 \sum_{j=0}^{4} \sup_{0\le s\le t} \mathbf{E} || I_j(s)(u) - I_j(s)(v) ||^2_{L_2(\mathbf{R}^r)} \le$$

$$\le 5 \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,\ y)dydx + Ct^2 \sup_{0\le \tau\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,\ y)dydx + \right.$$

$$+ \sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} c^2(s,x,\ y,\ z)\Pi(dz)dydx +$$

$$\left. + L^2Ct^2 + L^2C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) || u - v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}} = \gamma(t) || u - v ||^2_{\mathfrak{B}_{2,t}}, \qquad (39)$$

$$\gamma(t) \equiv 4 \left(\sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} b^2(s,x,\ y)dydx + Ct^2 \sup_{0\le \tau\le t} \int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} Z^2(\tau,x,\ y)\,dydx + \right.$$

$$\left. + \sup_{0\le s\le t} \int_{\mathbf{Z}}\int_{\mathbf{R}^r}\int_{\mathbf{R}^r} c^2(s,x,y,z)\Pi(dz)dydx + L^2Ct^2 + L^2C \left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \right) t \right) \qquad (40)$$

для $\{u, v\} \subset \mathfrak{B}_{2,t}$.

Відповідно до (20) $K_5 < 1/4$, тобто перший доданок у виразі для $\gamma(t)$ (див. (40)) менший одиниці. Стосовно наступних трьох доданків зауважимо, що за рахунок вибору $t_1 \in [0, T]$ їхня сума може дорівнювати $3/16$. Отже, $\gamma(t_1) \in (0, 1)$. Це означає, що оператор Ψ, визначений у просторі Банаха $\mathfrak{B}_{2,t_1}$, є стискальним. Отже, згідно з теоремою Банаха [2] про стискальне відображення оператор Ψ має єдину фіксовану точку — м'який розв'язок $u \in \mathfrak{B}_{2,t_1}$ задачі (1), (2) на відрізку $[0, t_1]$. Цю процедуру повторимо скінченну кількість разів на додатних малих інтервалах $[t_1, t_2]$, $[t_2, t_3]$, …, $[t_{n-2}, t_{n-1}]$, $[t_{n-1}, T]$, які при підсумовуванні дають відрізок $[0, T]$, де розв'язується задача (1), (2). У результаті розв'язок отримується як об'єднання розв'язків на цих малих інтервалах. Отже, основне твердження доведено.

ВИСНОВКИ

Стаття є узагальненням праць [8–10] і має теоретичне значення, оскільки вона доводить існування «м'якого розв'язку» НСДРРНТ. В окремих випадках подібні рівняння є математичними моделями реальних процесів, дослідження яких планується у подальшому.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гихман И.И., Скороход А.В. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение. Киев: Наук. думка, 1980. 612 с.
2. Гихман И.И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными. *Качественные методы исследования нелинейных уравнений и нелинейных колебаний*: *Сб. науч. тр*. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1981. С. 25–59.
3. Перун Г.М., Ясинский В.К. О стабилизации решений задачи Дирихле с разрывными траекториями и оператором Бесселя. *Кибернетика и вычисл. техника*. 1991. Вып. 83. С. 19–25.
4. Перун Г.М., Ясинский В.К. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных. *Укр. мат. журн.* 1993. Т. 45, № 9. С. 1773–1781.
5. Свердан М.Л., Ясинская Л.И., Ясинский В.К. Стабилизация решений стохастических линейных уравнений в частных производных при наличии пуассоновских возмущений. *Кибернетика и вычисл. техника.* 1988. Вып. 81. С. 7–12.
6. Tessitore G., Zabczyk J. Invariant measures for stochastic heat equations. *Probability and Mathematical Statistics.* 1998. Vol. 18. P. 271–287.
7. Zabczyk J., Da Prato G. Ergodicity for infinite dimensional systems. Dynamic systems and applications. Cambridge University Press, 1996. 449 p.
8. Станжицкий А.Н., Цуканова А.О. Существование и единственность решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения реакции-диффузии нейтрального типа. *Нелінійні коливання.* 2016. Т. 3, № 3. С. 408–430.
9. Tsukanova A.O. On existence and uniqueness of mild solution to the Cauchy problem for one neutral stochastic differential equation of reaction-diffusion type in hilbert space. *Буковинський математичний журнал.* 2016. Т. 4, № 3–4. С. 179–189.
10. Ясинський В.К., Юрченко І.В. Про існування розв'язку задачі Коші для нелінійного дифузійного стохастичного диференціально-різницевого рівняння нейтрального типу в частинних похідних з урахуванням випадкових зовнішніх збурень. *Системні дослідження та інформаційні технології.* 2017. № 2. С. 103–114.
11. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. Москва: Наука, 1992. 333 с.
12. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. Москва: Наука, 1977. 352 с.
13. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Москва: Наука, 1976. 541 с.

V.K. Yasynskyy, I.V. Yurchenko

ON EXISTENCE OF SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR NONLINEAR STOCHASTIC PARTIAL DIFFERENTIAL-DIFFERENCE EQUATIONS OF NEUTRAL TYPE

Abstract. The authors consider the existence of the solution of the Cauchy problem in the class of nonlinear stochastic partial differential-difference equations of neutral type, with regard for random external perturbations independent of the Wiener process. Sufficient conditions are obtained for the coefficients of the nonlinear stochastic differential-difference equations of neutral type that guarantee the existence of the solution with probability one.

Keywords: stochastic partial differential equations of neutral type, existence of the solution with probability one, Cauchy problem.

Надійшла до редакції 22.01.2021