УДК 517.977

Й.С. РАППОПОРТ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *jeffrappoport@gmail.com*.

ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ПРОБЛЕМИ ЗБЛИЖЕННЯ КЕРОВАНИХ ОБ'ЄКТІВ В ІГРОВИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Анотація. Розглянуто проблему гарантованого результату в ігрових задачах зближення керованих об'єктів. Запропоновано метод розв'язування таких задач, пов'язаний з побудовою деяких скалярних функцій, що якісно характеризують хід зближення керованих об'єктів та ефективність ухвалених рішень. Такі функції називають розв'язувальними. На відміну від основної схеми згаданого методу розглянуто випадок, коли класична умова Понтрягіна не має місця. Замість селектора Понтрягіна, якого не існує, розглядаються деякі функції зсуву і з їхньою допомогою вводяться спеціальні багатозначні відображення. Вони породжують верхні і нижні розв'язувальні функції, за допомогою яких формулюють достатні умови завершення гри за деякий гарантований час. Наведено ілюстративний приклад зближення керованих об'єктів з простим рухом з метою отримати в явному вигляді верхні і нижні розв'язувальні функції, що дають змогу дійти висновку про можливість закінчення гри в разі, коли умова Понтрягіна не має місця.

Ключові слова: квазілінійна диференціальна гра, багатозначне відображення, вимірний селектор, стробоскопічна стратегія, розв'язувальна функція.

ВСТУП

Робота присвячена вивченню проблеми зближення керованих об'єктів в ігрових завданнях динаміки на основі методу розв'язувальних функцій [1] і його сучасної версії [2]. У будь-яких формах методу розв'язувальних функцій головним є накопичувальний принцип, який використовують у поточному підсумовуванні розв'язувальної функції для оцінювання якості гри першого гравця аж до досягнення деякого порогового значення. На відміну від основної схеми методу розв'язувальних функцій в цій статті вивчається випадок, коли умова Понтрягіна не має місця. Розглядаються спеціальні багатозначні відображення, що породжують верхні і нижні розв'язувальні функції, вперше введені в [3]. За допомогою цих функцій отримано деякі достатні умови можливості розв'язання задачі зближення за гарантований час. Результати ілюструються на модельному прикладі.

Робота продовжує дослідження [1–4], дотична до публікацій [5–24] і розширює клас ігрових задач зближення керованих об'єктів, які мають розв'язок.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ. ЗАГАЛЬНА СХЕМА МЕТОДУ

Розглянемо конфліктно-керований процес, еволюція якого описується рівністю

$$z(t) = g(t) + \int_0^t \Omega(t,\tau)\varphi(u(\tau), \upsilon(\tau))\, d\tau, \;\; t \ge 0. \tag{1}$$

Тут $z(t) \in R^n$, функція $g(t)$, $g\colon R_+ \to R^n$, вимірна за Лебегом [9] і обмежена для $t > 0$, матрична функція $\Omega(t,\tau)$, $t \ge \tau \ge 0$, вимірна за t, а також сумовна за τ для кожного $t \in R_+$. Блок керування задають функцією $\varphi(u,\upsilon)$, $\varphi\colon U \times V \to R^n$, яка вважається безперервною за сукупністю змінних на прямому добутку непустих компактів U і V, m, l, n — натуральні числа.

Керування гравців $u(\tau)$, $u\colon R_+ \to U$, та $\upsilon(\tau)$, $\upsilon\colon R_+ \to V$, є вимірними функціями часу.

Крім процесу (1), задано термінальну множину M^*, що має циліндричний вигляд

$$M^* = M_0 + M, \tag{2}$$

де M_0 — лінійний підпростір з R^n, а M — компакт з ортогонального додатка L до підпростору M_0 у R^n.

Цілі першого (u) і другого (v) гравців протилежні. Перший (переслідувач) намагається вивести траєкторію процесу (1) на термінальну множину (2) за найкоротший час, а другий (втікач) — максимально відтягнути момент потрапляння траєкторії на множину M^* або взагалі уникнути цього.

Станемо на бік першого гравця і вважатимемо, що якщо гра (1), (2) триває на інтервалі $[0, T]$, то керування першого гравця в момент t вибиратимемо на основі інформації про $g(T)$ та $v_t(\cdot)$, тобто у вигляді вимірної функції

$$u(t) = u(g(T), v_t(\cdot)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U, \tag{3}$$

де $v_t(\cdot) = \{v(s)\colon s \in [0, t]\}$ — передісторія керування другого гравця до моменту t, або у вигляді контркерування

$$u(t) = u(g(T), v(t)),\ t \in [0, T],\ u(t) \in U. \tag{4}$$

Якщо, зокрема, $g(t) = e^{At} z_0$, $\Omega(t, \tau) = e^{A(t-\tau)}$, $z(0) = z_0$, а e^{At} — матрична експонента, то вважають, що керування $u(t) = u(z_0, v_t(\cdot))$ реалізує квазістратегію [7], а контркерування [5] $u(t) = u(z_0, v(t))$ є проявом стробоскопічної стратегії Хайєка [8].

Сформулюємо необхідні факти з опуклого [1, 10] аналізу у вигляді леми.

Лема 1. Нехай $X \in R^n$ — опуклий компакт, $\omega(\tau)$ — невід'ємна обмежена вимірна числова функція. Тоді $\int_0^T \omega(\tau) X d\tau = \int_0^T \omega(\tau)\, d\tau X$, $T > 0$. При цьому якщо $0 \in X$, $f(\tau) \in \omega(\tau) X$ і $\int_0^T \omega(\tau)\, d\tau \le 1$, то $\int_0^T f(\tau)\, d\tau \in X$, $f(\tau)$ — вимірна функція, $\tau \in [0, T]$.

Позначимо π оператор ортогонального проєктування з R^n у L. Поклавши $\varphi(U, v) = \{\varphi(u, v) : u \in U\}$, розглянемо багатозначні відображення

$$W(t, \tau, v) = \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v),\ \widetilde{W}(t, \tau, v) = \mathrm{co}\, \pi\Omega(t, \tau)\varphi(U, v),\ W(t, \tau) = \bigcap_{v \in V} W(t, \tau, v)$$

на множинах $\Delta \times V$ та Δ відповідно, де $\Delta = \{(t, \tau)\colon\ 0 \le \tau \le t < \infty\}$, co$A$ — опуклення множини A. Припустимо, що багатозначне відображення $W(t, \tau, v)$ має замкнуті значення на множині $\Delta \times V$.

Умова Понтрягіна. Багатозначне відображення $W(t, \tau)$ набуває непустих значень на множині Δ.

З урахуванням припущень про матричну функцію $\Omega(t, \tau)$ можна дійти висновку, що для будь-якого фіксованого $t > 0$ вектор-функція $\pi\Omega(t, \tau)\varphi(u, v)$ буде $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірною за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$ і безперервною за $u \in U$. Тому на підставі теореми про прямий образ [9] для будь-якого фіксованого $t > 0$ багатозначні відображення $W(t, \tau, v)$, $\widetilde{W}(t, \tau, v)$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними за $(\tau, v) \in [0, t] \times V$. Якщо виконана умова Понтрягіна, то на множині Δ існує принаймні один селектор $\gamma_0(t, \tau)$ відображення $W(t, \tau)$, $\gamma_0(t, \tau) \in W(t, \tau)$. Такий селектор називають селектором Понтрягіна. Сформулюємо умову Понтрягіна в еквівалентному вигляді.

На множині Δ існує селектор Понтрягіна $\gamma_0(t, \tau)$, для якого справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v \in V} [W(t, \tau, v) - \gamma_0(t, \tau)].$$

Нехай $\gamma(t, \tau)$, $\gamma\colon \Delta \to L$, $\Delta = \{(t, \tau)\colon 0 \le \tau \le t < \infty\}$, — деяка, майже всюди, обмежена вимірна за t і сумовна за τ, $\tau \in [0, t]$, для кожного $t > 0$ функція і $q(t, \tau, v)$, $q\colon \Delta \times V \to L$, — деяка, майже всюди, обмежена вимірна за t і $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними за сукупністю (τ, v), $\tau \in [0, t]$, $v \in V$, функція, які називатимемо функціями зсуву.

Нехай M_1 — опуклий компакт з ортогонального додатка L до підпростору M_0 у R^n такий, що якщо $m \in M_1$, то $-m \in M_1$ і $M_2 = M \overset{*}{-} M_1 = \{m \in L\colon m + M_1 \subset M\} = \bigcap_{m \in M_1} (M - m) \neq \varnothing$, де $\overset{*}{-}$ — геометрична різниця Мінковського [1]. Функції $\gamma(t, \tau)$, $q(t, \tau, \upsilon)$ і множини M_1, M_2, для яких слушні зазначені умови та властивості, називатимемо припустимими.

Умова 1. Для деяких припустимих функцій зсуву $\gamma_0(t, \tau)$, $(t, \tau) \in \Delta$, і $q_0(t, \tau, \upsilon)$, $(t, \tau, \upsilon) \in \Delta \times V$, справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} [W(t, \tau, \upsilon) - \gamma_0(t, \tau) - q_0(t, \tau, \upsilon)].$$

Позначимо $\xi(t) = \xi(t, g(t), \gamma(t, \cdot)) = \pi g(t) + \int_0^t \gamma(t, \tau)\, d\tau$ і розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in V$ багатозначні відображення

$$\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon) = \{\alpha \geq 0\colon \alpha[M_2 - \xi(t)] \subset \widetilde{W}(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)\},$$

$$\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon) = \{\alpha \geq 0\colon 0 \in [[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \alpha[M_2 - \xi(t)]]\}, \tag{5}$$

$$\mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon) = \{\alpha \geq 0\colon 0 \in [[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau) - q(t, \tau, \upsilon)] - \alpha[M_2 - \xi(t)]]\}. \tag{5*}$$

Якщо багатозначні відображення $\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)$, $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$ і $\mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon)$ не порожні на множині $\Delta \times V$, то розглянемо для $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in V$ розв'язувальні функції [3]

$$\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\alpha\colon \alpha \in \widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)\},\ \widetilde{\alpha}_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha\colon \alpha \in \widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)\},$$

$$\alpha^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\},\ \alpha_*(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)\},$$

$$\alpha_q^*(t, \tau, \upsilon) = \sup\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon)\},\ \alpha_*^q(t, \tau, \upsilon) = \inf\{\alpha\colon \alpha \in \mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon)\}.$$

Умова 2. Існують припустимі функції $\gamma(t, \tau)$, $q(t, \tau, \upsilon)$ і множина M_2, для яких за всіма $\tau \in [0, t]$, $t > 0$, $\upsilon \in V$ багатозначне відображення $\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)$ набуває непустих значень і справедливі включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(t)]\},$$

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau) - q(t, \tau, \upsilon)] - \mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(t)]\}$$

та нерівності $\inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon) \leq \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(t, \tau, \upsilon)$, $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon) \geq \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(t, \tau, \upsilon)$.

Можна показати [12], що багатозначні відображення $\mathfrak{A}(t, \tau, \upsilon)$, $\widetilde{\mathfrak{A}}(t, \tau, \upsilon)$ і $\mathfrak{A}_q(t, \tau, \upsilon)$ замкнутозначні, $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірні за сукупністю (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, а відповідні розв'язувальні функції $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірні за сукупністю (τ, υ), $\tau \in [0, t]$, $\upsilon \in V$, і тому вони суперпозиційно вимірні [12], тобто $\alpha^*(t, \tau, \upsilon(\tau))$, $\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon(\tau))$, $\alpha_q^*(t, \tau, \upsilon(\tau))$, $\alpha_*(t, \tau, \upsilon(\tau))$, $\widetilde{\alpha}_*(t, \tau, \upsilon(\tau))$ і $\alpha_*^q(t, \tau, \upsilon(\tau))$ вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$, для будь-якої вимірної функції $\upsilon(\cdot) \in V(\cdot)$, де $V(\cdot)$ — сукупність вимірних функцій $\upsilon(\tau)$, $\tau \in [0, +\infty]$, зі значеннями з V. Зауважимо також, що верхні розв'язувальні функції напівнеперервні зверху, нижні — напівнеперервні знизу за змінної υ і функції $\inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(t, \tau, \upsilon)$, $\inf_{\upsilon \in V} \widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon)$, $\inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(t, \tau, \upsilon)$, $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(t, \tau, \upsilon)$, $\sup_{\upsilon \in V} \widetilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon)$, $\sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(t, \tau, \upsilon)$ вимірні за τ, $\tau \in [0, t]$.

Для допустимих функцій зсуву $\gamma(t, \tau)$, $q(t, \tau, \upsilon)$ і множин M_1, M_2 розглянемо множину

$$\text{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\geq 0:\ \xi(t)\in M_2,\, q(t,\tau,V)\subset\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(t,\tau,\upsilon)M_1,\right.$$
$$\left.\tau\in[0,t],\ \int_0^t\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(t,\tau,\upsilon)\,d\tau\leq 1\right\}. \qquad (6)$$

Якщо співвідношення в фігурних дужках рівності (6) не виконуються ні для яких $t\geq 0$, то покладемо $\text{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 1. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконана умова 2, для деяких припустимих функцій зсуву $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ і множин M_1, M_2 множина $\text{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не порожня та $\text{P}_*^1\in\text{P}_*^1(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент P_*^1 з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau\in[0,\text{P}_*^1]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо для $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\text{P}_*^1]$ компактнозначне багатозначне відображення

$$U_*^1(\tau,\upsilon)=$$
$$=\{u\in U:\pi\Omega(\text{P}_*^1,\tau)\varphi(u,\upsilon)-\gamma(\text{P}_*^1,\tau)-q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)\in\alpha_*^q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)[M_2-\xi(\text{P}_*^1)]\}.$$

З урахуванням властивостей параметрів процесу (1) і нижньої розв'язувальної функції $\alpha_*^q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)$ компактнозначне відображення $U_*^1(\tau,\upsilon)$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним [12] для $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\text{P}_*^1]$. Тому за теоремою про вимірний вибір селектора [9] багатозначне відображення $U_*^1(\tau,\upsilon)$ містить $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірний селектор $u_*^1(\tau,\upsilon)$, який є суперпозиційно вимірною функцією [12]. При цьому зсув $q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)$ за визначенням є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірним [12] за (τ,υ), $\upsilon\in V$, $\tau\in[0,\text{P}_*^1]$, і також є суперпозиційно вимірною функцією.

Покладемо керування першого гравця $u_*^1(\tau)=u_*^1(\tau,\upsilon(\tau))$, $\tau\in[0,\text{P}_*^1]$. Взявши до уваги формулу (1), отримаємо

$$\pi z(\text{P}_*^1)=\int_0^{\text{P}_*^1}q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))d\tau+\xi(\text{P}_*^1)+$$
$$+\int_0^{\text{P}_*^1}[\pi\Omega(\text{P}_*^1,\tau)\varphi(u_*^1(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\text{P}_*^1,\tau)-q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))]d\tau. \qquad (7)$$

За визначенням моменту P_*^1 маємо

$$0\in M_1,\ q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))\in\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)M_1,\tau\in[0,\text{P}_*^1],\ \int_0^{\text{P}_*^1}\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)\,d\tau\leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення $\int_0^{\text{P}_*^1}q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))d\tau\in M_1$.

Згідно з вибором керування і за визначенням моменту P_*^1 маємо

$$0\in M_2-\xi(\text{P}_*^1),$$
$$\pi\Omega(\text{P}_*^1,\tau)\varphi(u_*^1(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\text{P}_*^1,\tau)-q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))\in$$
$$\in\alpha_*^q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))[M_2-\xi(\text{P}_*^1)],$$
$$\int_0^{\text{P}_*^1}\alpha_*^q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))\,d\tau\leq\int_0^{\text{P}_*^1}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*^q(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)\,d\tau\leq$$
$$\leq\int_0^{\text{P}_*^1}\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)\,d\tau\leq\int_0^{\text{P}_*^1}\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(\text{P}_*^1,\tau,\upsilon)\,d\tau\leq 1.$$

Тоді з урахуванням леми 1 справедливе включення

$$\int_0^{\mathrm{P}_*^1}[\pi\Omega(\mathrm{P}_*^1,\tau)\varphi(u_*^1(\tau),\upsilon(\tau))-\gamma(\mathrm{P}_*^1,\tau)-q(\mathrm{P}_*^1,\tau,\upsilon(\tau))]d\tau\in M_2-\xi(\mathrm{P}_*^1).$$

Отже, співвідношення (7) визначає $\pi z(\mathrm{P}_*^1)\in M_1+\xi(\mathrm{P}_*^1)+M_2-\xi(\mathrm{P}_*^1)=$ $=M_1+M_2\subset M$ і, значить, $z(\mathrm{P}_*^1)\in M^*$, що завершує доведення теореми.

Лема 2. Для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконана умова 1 тоді і тільки тоді, коли існують припустимі функції $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ і множини M_1, M_2, для яких $0\in\mathfrak{A}_q(t,\tau,\upsilon)$ на множині $\Delta\times V$.

Доведення. Нехай існують припустимі функції $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ і множини M_1, M_2, для яких $0\in\mathfrak{A}_q(t,\tau,\upsilon)$ на множині $\Delta\times V$. Тоді нульове значення α з урахуванням співвідношення (5*) забезпечує справедливість включення $0\in W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)-q(t,\tau,\upsilon)$, $(t,\tau)\in\Delta$, $\upsilon\in V$. Звідси випливає, що для $(t,\tau)\in\Delta$ маємо $0\in\bigcap_{\upsilon\in V}[W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)-q(t,\tau,\upsilon)]$, тобто слушна умова 1. Поміркувавши в зворотному порядку, дійдемо потрібного висновку.

Зауваження 1. Якщо для деяких припустимих функцій $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ і множин M_1, M_2 виконана умова 1, то з урахуванням леми 2 $\alpha_*^q(t,\tau,\upsilon)=$ $=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}_q(t,\tau,\upsilon)\}=0$ на множині $\Delta\times V$. Якщо виконана умова Понтрягіна, то за аналогією з лемою 2 $q(t,\tau,\upsilon)\equiv 0$, $\alpha_*(t,\tau,\upsilon)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}(t,\tau,\upsilon)\}=$ $=\alpha_*^q(t,\tau,\upsilon)=\inf\{\alpha:\alpha\in\mathfrak{A}_q(t,\tau,\upsilon)\}=0.$

Умова 3. На множині Δ виконана умова 2 і справедливі включення

$$0\in\bigcap_{\upsilon\in V}\{[W(t,\tau,\upsilon)-\gamma(t,\tau)-q(t,\tau,\upsilon)]-\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*^q(t,\tau,\upsilon)[M_2-\xi(t)]\},$$

$$q(t,\tau,V)\subset\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(t,\tau,\upsilon)M_1,\ \tau\in[0,t].$$

Зауваження 2. Якщо для деяких припустимих функцій $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ і множин M_1, M_2 виконана умова 1, то за аналогією з лемою 2 виконана умова 3 і $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*^q(t,\tau,\upsilon)=0$. Якщо виконана умова Понтрягіна, то виконана умова 3 і $q(t,\tau,\upsilon)\equiv 0$, $\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*^q(t,\tau,\upsilon)=0.$

Розглянемо множину

$$T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))=\left\{t\ge 0:\ \int_0^t\inf_{\upsilon\in V}\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\,d\tau\ge 1,\ \int_0^t\sup_{\upsilon\in V}\widetilde{\alpha}^*(t,\tau,\upsilon)\,d\tau<1\right\}.\qquad(8)$$

Якщо для деякого $t>0$ маємо $\alpha^*(t,\tau,\upsilon)\equiv+\infty$ для $\tau\in[0,t]$, $\upsilon\in V$, то в такому разі значення відповідного інтеграла в фігурних дужках співвідношення (8) природно покласти рівним $+\infty$ і $t\in T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))$, якщо для цього t справедлива інша нерівність в фігурних дужках співвідношення (8). У разі, коли нерівності співвідношення (8) не виконуються для всіх $t>0$, покладемо $T(g(t),\gamma(\cdot,\cdot))=\varnothing$.

Теорема 2. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконана умова 3, для деяких припустимих функцій зсуву $\gamma(t,\tau)$, $q(t,\tau,\upsilon)$ та множин M_1, M_2 множина $T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$ не порожня і $T\in T(g(\cdot),\gamma(\cdot,\cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (3).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau\in[0,T]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T,g(T),\gamma(\cdot,\cdot))\notin M_2$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t)=1-\int_0^t\alpha_q^*(T,\tau,\upsilon(\tau))d\tau-\int_t^T\sup_{\upsilon\in V}\alpha_*^q(T,\tau,\upsilon)d\tau,\ \ t\in[0,T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0)=1-\int_0^T \sup_{v\in V}\alpha_*^q(T,\tau,v)\,d\tau \ge 1-\int_0^T \sup_{v\in V}\alpha_*(T,\tau,v)\,d\tau \ge 1-\int_0^T \sup_{v\in V}\widetilde{\alpha}^*(t,\tau,v)\,d\tau>0,$$

$$h(T)=1-\int_0^T \alpha_q^*(T,\tau,v(\tau))d\tau \le 1-\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha_q^*(T,\tau,v)\,d\tau \le 1-\int_0^T \inf_{v\in V}\alpha^*(T,\tau,v)d\tau \le 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_*\in(0,T]$, що $h(t_*)=0$. Зауважимо, що момент перемикання t_* залежить від передісторії керування другого гравця $v_{t_*}(\cdot)=\{v(s)\colon s\in[0,t_*]\}$.

Проміжки часу $[0,t_*)$, $[t_*,T]$ називатимемо «активним» і «пасивним» відповідно. Опишемо спосіб керування першого гравця на кожному з них. Для цього розглянемо компактнозначні відображення

$$U_1^*(\tau,v)=\{u\in U\colon \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)-q(T,\tau,v)\in$$
$$\in\alpha_q^*(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]\},\ \tau\in[0,t_*), \tag{9}$$

$$U_*^1(\tau,v)=\{u\in U\colon \pi\Omega(T,\tau)\varphi(u,v)-\gamma(T,\tau)-q(T,\tau,v)\in$$
$$\in\sup_{v\in V}\alpha_*^q(T,\tau,v)[M_2-\xi(T)]\},\ \tau\in[t_*,T]. \tag{10}$$

Багатозначні відображення $U_1^*(\tau,v)$ та $U_*^1(\tau,v)$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\alpha_q^*(T,\tau,v)$ і $\sup_{v\in V}\alpha_*^q(T,\tau,v)$ компактнозначні відображення $U_1^*(\tau,v)$, $\tau\in[0,t_*)$, і $U_*^1(\tau,v)$, $\tau\in[t_*,T]$, для $v\in V$ є $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою щодо вимірного вибору селектора [9] в кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L}\otimes\mathfrak{B}$-вимірному селектору $u_1^*(\tau,v)$ і $u_*^1(\tau,v)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на «активному» проміжку рівним $u_1^*(\tau)=u_1^*(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[0,t_*)$, а на «пасивному» — рівним $u_*^1(\tau)=u_*^1(\tau,v(\tau))$, $\tau\in[t_*,T]$.

На основі формули (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi z(T)=\int_0^T q(T,\tau,v(\tau))d\tau+$$
$$+\xi(T)+\int_0^{t_*}[\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_1^*(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau)-q(T,\tau,v(\tau))]d\tau+ \tag{11}$$
$$+\int_{t_*}^T[\pi\Omega(T,\tau)\varphi(u_*^1(\tau),v(\tau))-\gamma(T,\tau)-q(T,\tau,v(\tau))]d\tau.$$

Згідно з умовою 3 та за визначенням моменту T маємо

$$0\in M_1,\ q(T,\tau,v(\tau))\in\sup_{v\in V}\widetilde{\alpha}^*(T,\tau,v)M_1,\ \tau\in[0,T],\ \int_0^T\sup_{v\in V}\widetilde{\alpha}^*(T,\tau,v)d\tau<1.$$

Тоді на підставі леми 1 справедливе включення $\int_0^T q(T,\tau,v(\tau))d\tau\in M_1$. З урахуванням останнього включення співвідношення (9)–(11) визначають

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon(\tau))[M_2 - \xi(T)]\, d\tau +$$

$$+ \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]\, d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon(\tau)) d\tau [M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon) d\tau [M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T) \left[1 - \int_0^{t_*} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon) d\tau \right] +$$

$$+ \left[\int_0^{t_*} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon(\tau))\, d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon) d\tau \right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Тут враховано рівність $h(t_*) = 0$, включення $M_1 + M_2 \subset M$, а перехід під час інтегрування багатозначних відображень з множиною M_2 можна підтвердити застосуванням апарату опорних функцій [10].

Для випадку $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot)) \in M_2$ достатньо застосувати теорему 1, що завершує доведення теореми.

СХЕМА МЕТОДУ ДЛЯ КЛАСУ СТРОБОСКОПІЧНИХ СТРАТЕГІЙ

З доведення теореми 2 випливає, що переслідувач у момент t використовує інформацію про $\upsilon_t(\cdot)$, причому вона необхідна лише для визначення моменту перемикання t_*, що розділяє активний і пасивний інтервали. На самих інтервалах переслідувач застосовує контркерування, яке визначається стробоскопічною стратегією. У наведеній далі теоремі показано, що для реалізації гарантованого часу теореми 2 можна обмежитися контркеруванням.

Умова 4. На множині Δ виконана умова 2 і справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{\upsilon \in V} \{[W(t, \tau, \upsilon) - \gamma(t, \tau)] - \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(t, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(t)]\}.$$

Теорема 3. Нехай для конфліктно-керованого процесу (1), (2) виконані умови 3, 4, для деяких припустимих функцій зсуву $\gamma(t, \tau)$, $q(t, \tau, \upsilon)$ і множин M_1, M_2 множина $T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$ не є порожньою і $T \in T(g(\cdot), \gamma(\cdot, \cdot))$. Тоді гра може бути закінчена в момент T з використанням керування вигляду (4).

Доведення. Нехай $\upsilon(\tau)$ — довільний вимірний селектор компакта V, $\tau \in [0, T]$. Зазначимо спосіб вибору керування переслідувачем.

Розглянемо спочатку випадок $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot, \cdot) \notin M_2$ і запровадимо контрольну функцію

$$h(t) = 1 - \int_0^t \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon) d\tau - \int_t^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon) d\tau, \ t \in [0, T].$$

За визначенням T маємо

$$h(0) = 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \geq 1 - \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \geq 1 - \int_0^T \max_{\upsilon \in V} \tilde{\alpha}^*(t, \tau, \upsilon)\, d\tau > 0,$$

$$h(T) = 1 - \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \leq \int_0^T \inf_{\upsilon \in V} \alpha^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau \leq 0.$$

Внаслідок безперервності функції $h(t)$ існує такий момент часу t_*, $t_* \in (0, T]$, що $h(t_*) = 0$. Відзначимо, що момент перемикання t_* не залежить від передісторії керування другого гравця $\upsilon_{t_*}(\cdot) = \{\upsilon(s): s \in [0, t_*]\}$.

Проміжки часу $[0, t_*)$, $[t_*, T]$ називатимемо «активним» і «пасивним» відповідно. Опишемо спосіб керування першого гравця на кожному з них. Для цього розглянемо компактнозначні відображення

$$U_2^*(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) - q(T, \tau, \upsilon) \in \\ \in \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]\},\ \tau \in [0, t_*), \tag{12}$$

$$U_*^2(\tau, \upsilon) = \{u \in U : \pi\Omega(T, \tau)\varphi(u, \upsilon) - \gamma(T, \tau) - q(T, \tau, \upsilon) \in \\ \in \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]\},\ \tau \in [t_*, T]. \tag{13}$$

Багатозначні відображення $U_2^*(\tau, \upsilon)$ і $U_*^2(\tau, \upsilon)$ мають непорожні образи. З урахуванням властивостей параметрів процесу (1), функцій $\inf\limits_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon)$ та $\sup\limits_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)$ компактнозначні відображення $U_2^*(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [0, t_*)$, і $U_*^2(\tau, \upsilon)$, $\tau \in [t_*, T]$, для $\upsilon \in V$ є $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірними [12]. Тому за теоремою щодо вимірного вибору селектора [9] в кожному з них існує хоча б по одному $\mathfrak{L} \otimes \mathfrak{B}$-вимірному селектору $u_2^*(\tau, \upsilon)$ і $u_*^2(\tau, \upsilon)$, які є суперпозиційно вимірними функціями [12]. Покладемо керування першого гравця на «активному» проміжку рівним $u_2^*(\tau) = u_2^*(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [0, t_*)$, а на «пасивному» — рівним $u_*^2(\tau) = u_*^2(\tau, \upsilon(\tau))$, $\tau \in [t_*, T]$.

Згідно з формулою (1) для вибраних керувань отримаємо

$$\pi z(T) = \int_0^T q(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau + \xi(T) + \int_0^{t_*} (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_2^*(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau) - \\ - q(T, \tau, \upsilon(\tau)))d\tau + \int_{t_*}^T (\pi\Omega(T, \tau)\varphi(u_*^2(\tau), \upsilon(\tau)) - \gamma(T, \tau) - q(T, \tau, \upsilon(\tau)))d\tau. \tag{14}$$

З урахуванням умови 3 та за визначенням моменту T маємо

$$0 \in M_1,\ q(T, \tau, \upsilon(\tau)) \in \sup_{\upsilon \in V} \tilde{\alpha}^*(T, \tau, \upsilon) M_1, \tau \in [0, T], \int_0^T \sup_{\upsilon \in V} \tilde{\alpha}^*(T, \tau, \upsilon)\, d\tau < 1.$$

Тоді згідно з лемою 1 справедливе включення $\int\limits_0^T q(T, \tau, \upsilon(\tau))d\tau \in M_1$. З урахуванням останнього включення співвідношення (12)–(14) визначають

$$\pi z(T) \in M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]d\tau + \\ + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)[M_2 - \xi(T)]d\tau =$$

$$= M_1 + \xi(T) + \int_0^{t_*} \inf_{\upsilon \in V} \alpha_q^*(T, \tau, \upsilon)d\tau[M_2 - \xi(T)] + \int_{t_*}^T \sup_{\upsilon \in V} \alpha_*^q(T, \tau, \upsilon)d\tau[M_2 - \xi(T)] =$$

$$= M_1 + \xi(T)\left[1 - \int_0^{t_*} \inf_{v\in V} \alpha_q^*(T,\tau,v)d\tau - \int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*^q(T,\tau,v)d\tau\right] +$$

$$+\left[\int_0^{t_*} \inf_{v\in V} \alpha_q^*(T,\tau,v)d\tau + \int_{t_*}^{T} \sup_{v\in V} \alpha_*^q(T,\tau,v)d\tau\right] M_2 = M_1 + M_2 \subset M.$$

Тут враховано рівність $h(t_*) = 0$, включення $M_1 + M_2 \subset M$, а перехід під час інтегрування багатозначних відображень з множиною M_2 можна підтвердити застосуванням апарату опорних функцій [10].

Для випадку $\xi(T, g(T), \gamma(\cdot,\cdot)) \in M_2$ достатньо застосувати теорему 1, що завершує доведення теореми.

ПРИКЛАД

Розглянемо простий рух

$$\dot z = u - v,\ z \in R^n,\ z(0) = z_0,\ v \in S,\ u \in S_1^a,\ a > 1,\ M^* = M = \varepsilon S,\ M_0 = 0,\ \varepsilon > 0.$$

Тут S — одинична куля з центром у нулі, S_1^a — кільце з центром у нулі, зовнішнім радіусом a і внутрішнім радіусом одиниця. Покладемо

$$M_1 = l_1 S,\ M_2 = M \overset{*}{-} M_1 = (\varepsilon - l_1)S = l_2 S,\ l_2 = \varepsilon - l_1,\ l_1 > 0,\ \varepsilon > l_1,$$

де $\overset{*}{-}$ — геометрична різниця Мінковського [1].

Умова Понтрягіна не має місця, оскільки $S_1^a \overset{*}{-} S = \varnothing$. Виберемо функцію зсуву $\gamma(t,\tau) \equiv 0$. Оскільки $\Omega(t,\tau) = E$, E — одинична матриця, і $\pi = E$, маємо $\xi(t) = z_0$. Тоді багатозначне відображення $\mathfrak{A}(t,\tau,v)$ не залежить від t, τ і має вигляд

$$\mathfrak{A}(t,\tau,v) = \mathfrak{A}(v, z_0) = \{\alpha \ge 0 : [S_1^a - v] \cap \alpha[l_2 S - z_0] \ne \varnothing\}.$$

Воно має непорожні образи, тому справедливе включення

$$0 \in \bigcap_{v\in S} \{[S_1^a - v] - \mathfrak{A}(v, z_0)[l_2 S - z_0]\}.$$

Отже, умова 2 виконана.

Верхня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення

$$\alpha^*(t,\tau,v) = \alpha^*(v, z_0) = \sup\{\alpha \ge 0 : [aS_1^a - v] \cap \alpha[l_2 S - z_0] \ne \varnothing\} =$$

$$= \sup\{\alpha > 0 : [\alpha z_0 - v] \in [a + \alpha l_2]S\} = \sup\{\alpha > 0 : \|v - \alpha z_0\| = [a + \alpha l_2]\},$$

тому вона є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\|z_0\|^2 - l_2^2)\alpha^2 - 2[(v, z_0) + a l_2]\alpha - (a^2 - \|v\|^2) = 0.$$

Отже, справедлива формула

$$\alpha^*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) + a l_2 + \sqrt{[(v, z_0) + a l_2]^2 + (\|z_0\|^2 - l_2^2)(a^2 - \|v\|^2)}}{\|z_0\|^2 - l_2^2}.$$

При цьому маємо, що $\min\limits_{v\in S} \alpha^*(v, z_0) = \dfrac{a-1}{\|z_0\| - l_2}$ досягається для $v = -\dfrac{z_0}{\|z_0\|}$.

Нижня розв'язувальна функція визначається зі співвідношення

$$\alpha_*(t,\tau,v) = \alpha_*(v, z_0) = \inf\{\alpha \ge 0 : [S_1^a - v] \cap \alpha[l_2 S - z_0] \ne \varnothing\} =$$

$$= \sup\{\alpha \ge 0 : \alpha[l_2 S - z_0] \subset [S - v]\} = \sup\{\alpha \ge 0 : \|v - \alpha z_0\| = [1 - \alpha l_2]\},$$

тому вона є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\| z_0 \|^2 - l_2^2)\alpha^2 - 2[(v, z_0) - l_2]\alpha - (1 - \| v \|^2) = 0 .$$

Отже, отримаємо

$$\alpha_*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) - l_2 + \sqrt{[(v, z_0) - l_2]^2 + (\| z_0 \|^2 - (l_2)^2)(1 - \| v \|^2)}}{\| z_0 \|^2 - (l_2)^2} .$$

При цьому маємо, що $\max\limits_{v \in S} \alpha_*(v, z_0) = \dfrac{2}{\| z_0 \| + l_2}$ досягається для $v = \dfrac{z_0}{\| z_0 \|}$.

Верхня розв'язувальна функція $\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, v)$ визначається зі співвідношення

$$\widetilde{\alpha}^*(t, \tau, v) = \widetilde{\alpha}^*(v, z_0) = \sup \{\alpha \geq 0 : \alpha[l_2 S - z_0] \subset [aS - v]\} =$$

$$= \sup \{\alpha \geq 0 : \| v - \alpha z_0 \| = [1 - \alpha l_2]\},$$

тому вона є більшим позитивним коренем квадратного рівняння

$$(\| z_0 \|^2 - l_2^2)\alpha^2 - 2[(v, z_0) - a l_2]\alpha - (a^2 - \| v \|^2) = 0 .$$

Отже, отримаємо

$$\widetilde{\alpha}^*(v, z_0) = \frac{(v, z_0) - a l_2 + \sqrt{[(v, z_0) - a l_2]^2 + (\| z_0 \|^2 - (l_2)^2)(a^2 - \| v \|^2)}}{\| z_0 \|^2 - (l_2)^2} .$$

При цьому маємо, що $\max\limits_{v \in S} \widetilde{\alpha}^*(v, z_0) = \dfrac{a+1}{\| z_0 \| + l_2}$ досягається для $v = \dfrac{z_0}{\| z_0 \|}$.

Покладемо $q(v, z_0) = \alpha_*(v, z_0)[\| z_0 \| - l_2] \dfrac{z_0}{\| z_0 \|}$. За побудовою для всіх $v \in S$ справедливе включення $v + q(v, z_0) \in S^0$, де S^0 — коло одиничного радіуса. Тоді маємо

$$\bigcap_{v \in S} [S_1^a - v - q(v, z_0)] \supset \bigcap_{w \in S^0} [S_1^a - w] = S_1^a \underline{*} S^0 = (a - 1)S.$$

Отже, $0 \in \bigcap\limits_{v \in S} [S_1^a - v - q(v, z_0)]$ і справедлива умова 1, тому

$$0 \in \mathfrak{A}_q(v, z_0) = \{\alpha \geq 0 : [S_1^a - v - q(v, z_0)] \cap \alpha[l_2 S - z_0] \neq \varnothing\}.$$

З урахуванням леми 2 та зауваження 2 маємо $\max\limits_{v \in S} \alpha_*^q(t, \tau, v) = 0$. Легко перевірити, що $\min\limits_{v \in S} \alpha_q^*(v, z_0) = \min\limits_{v \in S} \alpha^*(v, z_0) = \dfrac{a-1}{\| z_0 \| - l_2}$. Щоб показати виконуваність умови 3, залишилося переконатися у справедливості включення

$$q(V, z_0) = \max_{v \in S} \alpha_*(v, z_0)[\| z_0 \| - l_2] \frac{z_0}{\| z_0 \|} \subset \max_{v \in S} \widetilde{\alpha}^*(v, z_0)\, l_1 \frac{z_0}{\| z_0 \|} .$$

Останнє включення справедливе, якщо параметри гри задовольняють умову

$$\frac{2}{a+1} \leq \frac{l_1 / \| z_0 \|}{1 - (l_2 / \| z_0 \|)} . \tag{15}$$

З огляду на побудову верхньої і нижньої розв'язувальних функцій має виконуватися умова $\min\limits_{v \in S} \alpha^*(v, z_0) \geq \max\limits_{v \in S} \alpha_*(v, z_0)$, що зумовлює нерівність

$$\frac{a+1}{1 + (l_2 / \| z_0 \|)} \leq \frac{a-1}{1 - (l_1 / \| z_0 \|)} . \tag{16}$$

Перевіримо справедливість умови 4. Мають місце співвідношення

$$\bigcap_{v \in S} \left\{ [S_1^a - v - q(v, z_0)] - \inf_{v \in S} \alpha_q^*(v, z_0)[l_2 S - z_0] \right\} \supset \left\{ [a-1] S - \right.$$

$$\left. - \inf_{v \in S} \alpha^*(v, z_0)[\| z_0 \| - l_2] \frac{z_0}{\| z_0 \|} \right\} = \left\{ [a-1] S - [a-1] \frac{z_0}{\| z_0 \|} \right\} = [a-1] \left[S - \frac{z_0}{\| z_0 \|} \right],$$

тому справедлива умова 4.

У цьому прикладі маємо

$$\int_0^T \min_{v \in V} \alpha^*(v, z_0)\, d\tau = \frac{a-1}{\| z_0 \| - l_2} T = 1, \; T = T(z_0) = \frac{\| z_0 \| - l_2}{a-1}.$$

Якщо параметри гри задовольняють умову

$$1 > \frac{l_2}{\| z_0 \|} > \frac{1}{a}, \; a > 1, \tag{17}$$

то справедлива нерівність

$$\int_0^T \max_{v \in S} \tilde{\alpha}^*(v, z_0)\, d\tau = \frac{a+1}{\| z_0 \| + l_2} T = \frac{(a+1)}{(\| z_0 \| + l_2)} \frac{(\| z_0 \| - l_2)}{(a-1)} < 1.$$

Отже, якщо параметри гри задовольняють співвідношення (15)–(17), для прикладу виконуються всі умови теорем 2 і 3. Зауважимо, що співвідношення (15)–(17) виконуються, наприклад, якщо $l_1 = l_2 = l$, $\frac{l}{\| z_0 \|} = \frac{1}{3}$, $a = 4$.

ВИСНОВКИ

У роботі розглянуто проблему зближення керованих об’єктів в ігрових задачах динаміки. Сформульовано достатні умови закінчення гри за кінцевий гарантований час у разі, коли умова Понтрягіна не виконується. Введено верхні і нижні розв’язувальні функції спеціального типу і на їхній основі запропоновано нову схему методу розв’язувальних функцій, що забезпечує завершення конфліктно-керованого процесу в класі квазістратегій і контркерувань. Наведено ілюстративний приклад.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Chikrii A.A. Conflict controlled processes. Boston; London; Dordrecht: Springer Science and Business Media. 2013. 424 p.
2. Chikrii A.A. An analytical method in dynamic pursuit games. *Proc. Steklov Institute of Mathematics*. 2010. Vol. 271. P. 69–85.
3. Chikrii A.A., Chikrii V.K. Image structure of multivalued mappings in game problems of motion control. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2016. Vol. 48, N 3. P. 20–35.
4. Чикрий А.А. Верхняя и нижняя разрешающие функции в игровых задачах динамики. *Тр. ИММ УрО РАН.* 2017. Т. 23, № 1. С. 293–305. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2017-23-1-293-305.
5. Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. Москва: Наука, 1974. 455 с.
6. Понтрягин Л.С. Избранные научные труды. Москва: Наука, 1988. Т. 2. 576 с.
7. Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. Москва: Наука, 1981. 288 с.
8. Hajek O. Pursuit games. New York: Acad. Press, 1975. Vol. 12. 266 p.
9. Aubin J.-P., Frankowska H. Set-valued analysis. Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1990. 461 p.
10. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. Москва: Мир, 1973. 470 с.

11. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. Москва: Наука, 1974. 480 с.
12. Чикрий А.А., Раппопорт И.С. Метод разрешающих функций в теории конфликтно-управляемых процессов. *Кибернетика и системный анализ*. 2012. Т. 48, № 5. С. 40–64.
13. Chikrii A.A., Eidelman S.D. Game problems for fractional quasilinear systems. *Journal Computers and Mathematics with Applications*. New York: Pergamon, 2002. Vol. 44. P. 835–851.
14. Chikrii A.A., Matychyn I.I. On linear conflict-controlled processes with fractional derivatives. *Trudy Instituta Mathematiki i Mechaniki URo RAN*. 2011. Vol. 17, N 2. P. 256–270.
15. Чикрий А.А., Дзюбенко К.Г. Билинейные марковские процессы поиска движущихся объектов. *Проблемы управления и информатики*. 1997. № 1. С. 92–107.
16. Chikrii A.A., Kalashnikova S.F. Pursuit of a group of evaders by a single controlled object. *Cybernetics*. 1987. Vol. 23, N 4. P. 437–445.
17. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Game problems for fractional-order linear systems. *Proc. Steklov Institute of Mathemaics*. 2010. Vol. 268, suppl 1. P. s54–s70.
18. Пилипенко Ю.В., Чикрий А.А. Колебательные конфликтно-управляемые процессы. *Прикл. математика и механика*. 1993. Т. 57, № 3. С. 3–14.
19. Albus J., Meystel A., Chikrii A.A., Belousov A.A., Kozlov A.J. Analytical method for solution of the game problem of soft landing for moving object. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 75–91.
20. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Игровые задачи управления для квазилинейных систем с дробными производными Римана–Лиувилля. *Кибернетика и системный анализ*. 2001. № 6. С. 66–99.
21. Chikrii A.A., Matychyn I.I. Riemann–Liouville, Caputo, and sequentiol frectional derivatives in differential games. *Advances in Dynamic Games: Theory, Applications, and Numerical Methods for Differential and Stochastic Games.* 2011. Vol. 11. P. 61–82.
22. Чикрий А.А., Эйдельман С.Д. Обобщенные матричные функции Миттаг-Леффлера в игровых задачах для эволюционных уравнений дробного порядка. *Кибернетика и системный анализ*. 2000. № 3. С. 3–32.
23. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. *Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, астрономия, физика, химия.* 1959. № 2. С. 25–32.
24. Половинкин Е.С. Элементы теории многозначных отображений. Москва: Изд-во МФТИ, 1982. 127 с.

I.S. Rappoport

TO SOLVING THE PROBLEM OF APPROACH OF CONTROLLED OBJECTS IN DYNAMIC GAME PROBLEMS

Abstract. The problem of a guaranteed result in game problems of approach of controlled objects is considered. A method for solving such problems is proposed. It involves constructing some scalar functions that qualitatively characterize the course of approach of controlled objects and the efficiency of the decisions made. Such functions are called resolving functions. In contrast to the main scheme of the method, the case is considered where the classical Pontryagin condition does not hold. In this situation, instead of the Pontryagin selector, which does not exist, some shift functions are considered and with their help special multivalued mappings are introduced. They generate upper and lower resolving functions, which are used to formulate the sufficient conditions for the game completion in a certain guaranteed time. An example is given to illustrate the approach of controlled objects with a simple motion, in order to obtain upper and lower resolving functions in explicit form, which allows making a conclusion about the possibility of ending the game when the Pontryagin condition does not hold.

Keywords: quasilinear differential game, multi-valued mapping, measurable selector, stroboscopic strategy, resolving function.

Надійшла до редакції 22.03.2021