УДК 519.83

І.В. СИЛЕНКО
Національний університет «Києво-Могилянська академія», Київ, Україна,
e-mail: *sylenkoillia@ukr.net.*

РІВНОВАГА НЕША В ОСОБЛИВОМУ ВИПАДКУ СИМЕТРИЧНИХ ІГОР ВИДОБУТКУ РЕСУРСІВ

Анотація. Наведено нові результати щодо існування рівноваги Неша в іграх видобутку ресурсів з довільною кількістю агентів. У побудованій моделі вподобання гравців є ідентичними, функція корисності має степеневий вигляд, послідовність станів зі спільних інвестицій учасників формується геометричним випадковим блуканням. Застосовано ітеративний метод побудови нерандомізованої стаціонарної рівноваги Неша у грі з нескінченним горизонтом. Доведено належність положення рівноваги до множини неоптимальних за Парето стратегій.

Ключові слова: стохастичні ігри, видобуток ресурсів, накопичення капіталу, стаціонарна рівновага Неша, степенева функція корисності, геометричне випадкове блукання.

ВСТУП

Стохастична гра видобутку ресурсів, також відома як гра з накопичення капіталу, належить до класу динамічних ігор з ненульовою сумою та незліченним простором станів. У контексті теорії ігор задача вперше була сформульована в [1] для моделювання економічної взаємодії агентів за умови спільного користування ресурсом. Історично існування у грі стаціонарної рівноваги Неша в чистих стратегіях отримувалось за рахунок певних структурних припущень. У [2] визначена можливість рівноваги у детермінованій моделі. Результат поширено на стохастичний випадок у [3, 4], де функції корисності гравців є симетричними і обмеженими.

У [5] вперше вилучено умову обмеженості функції корисності і простору станів, а також наведено загальніший розподіл переходу. З іншого боку, у грі збережена симетричність, а множину гравців складають лише двоє учасників. Несиметричний випадок описано в [6], де доведено існування стаціонарної рівноваги Неша між двома гравцями, функції корисності яких не обмежуються. Як ймовірність переходу між станами розглянуто опуклу комбінацію стохастичних ядер, залежних лише від змінної стану і незалежних від рішень. Водночас допускається залежність коефіцієнтів комбінації від спільної інвестиції гравців на поточному етапі. Не зважаючи на строгість припущення, воно було типовим у дослідженнях гри видобутку ресурсів. Зокрема, такий розподіл переходу розглянуто у дослідженні [7], де ітеративним шляхом визначається стаціонарна рівновага Неша для симетричної гри з довільною кількістю учасників, обмеженим простором станів і обмеженою функцією корисності.

У постановці задачі запропонованої роботи розглядається симетрична модель гри, в якій вилучено умову обмеженості функції корисності, простір станів розширено до $[0; +\infty)$, встановлено залежність величини стану від інвестиції гравців напряму, а не опосередковано через імовірності вибору того чи іншого стохастичного ядра. На відміну від статті [5], дозволена участь довільної кількості гравців. Таким чином, структуру гри взято з розширеного класу, але зосереджено увагу на конкретному вигляді функції корисності і розподілу переходу, вибір яких є економічно обґрунтованим. По-перше, використовується степенева функція корисності. Це зумовлено її популярністю в практичному застосуванні, що можна пояснити властивістю функції зберігати сталу відносну уникливість ризику. Відповідність цієї якості реальній поведінці інвесторів підтверджено дослідженням [8], в якому аналізувалися дані внесків у нерухомість. По-друге, для визначення послідовності станів використовується розподіл з випадковими мультиплікативними збуреннями (random multiplicative shocks), що діють на залишок від споживання на кожному етапі гри. Така модель, відома як геометричне випадкове блукання (geometric random walk), застосовується, зокрема, для прогнозування даних фондового ринку. Стан гри можна інтерпретувати як вартість спільного капіталу, що еволюціонує згідно з зазначеним розподілом.

Степенева функція корисності в поєднанні з обраними ймовірностями переходу дають змогу довести існування симетричної стаціонарної рівноваги Неша методом побудови збіжних послідовностей рівноваг Неша і відповідних їм виграшів у іграх зі скінченним горизонтом. Подібний спосіб доведення наявний у [7, 9]. Одержані методом зворотної індукції послідовності мають монотонні властивості, що дає змогу зробити висновок щодо існування границь на нескінченності без використання теорем про нерухому точку. Однією з особливостей підходу є те, що він описує ітеративну процедуру знаходження рівноваги Неша, даючи можливість легко її обчислювати для застосування на практиці.

Специфіка моделі гри дозволила провести додаткові дослідження і показати неоптимальність за Парето отриманої рівноваги Неша. Подібні властивості не завжди висвітлюються в інших роботах, проте вони є доречними у випадку використання моделі в задачах, де допускається потенційна кооперація. Відмінність у виграшах між рівновагою Неша і можливою переговорною стратегією гравців проілюстровано на прикладі у розд. 4.

1. МОДЕЛЬ ГРИ

Стохастична симетрична гра G видобутку ресурсів з m гравцями задається:

— простором станів $S = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, де $s = 0$ — поглинальний стан;

— простором рішень, що є завжди однаковим для всіх гравців і залежить від поточного стану гри s_t, $A(s_t) = [0; s_t / m]$;

— неперервною функцією корисності $u : S \to [0; +\infty)$, однаковою для кожного гравця;

— стохастичним законом переходу між станами, залежним від поточного стану і рішень гравців у ньому.

Поняття симетричності у грі означає, що всі гравці мають ідентичні функції корисності і простори рішень. Проте, рішення у них можуть відрізнятися, відповідно продукуючи різні виграші.

Очікуваним виграшем гравця i є математичне сподівання (по ймовірнісній мірі, яка керує законом переходу між станами)

$$\mathbb{E} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(x_{ti}),$$

де x_{ti} — його рішення в період t, $\beta \in (0;1)$ — множник дисконтування.

Додатково далі на модель накладаються такі припущення:

A1: $u(x) = c \cdot x^{\alpha}$, де c — додатна константа, $\alpha \in (0;1)$;

A2: якщо $x_t = (x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm})$ — рішення гравців у момент часу t, наступний стан визначається з попереднього s_t за законом

$$s_{t+1} = \left(s_t - \sum_{i=1}^{m} x_{ti} \right) \cdot \xi,$$

де ξ — деяка невід'ємна випадкова величина з відомим розподілом;

A3: $l := \beta \cdot \mathbb{E}(\xi^{\alpha}) \in (0;1)$.

Нехай F — множина всіх вимірних за Борелем функцій $f : S \to S$, таких що $f(s) \in A(s)\ \ \forall s \in S$.

Марковською стратегією гравця i є послідовність $\pi_i = (f_1, f_2, \dots)$, де кожне $f_t \in F$. Якщо всі f_t однакові, стратегія π_i називається стаціонарною. Множину всіх можливих стратегій, яка є однаковою для всіх гравців, позначимо Π.

Для довільного профілю стратегій $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ і початкового стану $s_1 \in S$ визначимо імовірнісну міру $P_{s_1}^{\pi}$ і стохастичний процес $\{S_t, X_t\}$ у канонічний спосіб (див. розд. 7 у [10]), де випадкові величини S_t і X_t описують стан і вектор виборів гравців у момент часу t. Тоді, використовуючи термінологію з [7], кожному профілю стратегій $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_m)$ і початковому стану $s_1 \in S$ ставимо у відповідність очікуваний дисконтований виграш гравця i на нескінченному майбутньому

$$\gamma_i(\pi)(s_1) = \mathbb{E}_{s_1}^{\pi} \left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1}\ u(X_{ti}) \right],$$

де X_{ti} — i-та координата вектора X_t, а $\mathbb{E}_{s_1}^{\pi}$ означає математичне сподівання відносно міри $P_{s_1}^{\pi}$.

Уведемо запис $(z_i, \bar{y}_{-i})$, який вказуватиме, що у векторі $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots$ $\dots, y_m) \in Y^m$ координата y_i замінена $z_i \in Y$.

Набір (стаціонарних) стратегій $\pi^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_m^*) \in \Pi^m$ іменується (стаціонарною) рівновагою Неша тоді і тільки тоді, коли жодне відхилення від нього в односторонньому порядку не є вигідним, тобто $\forall i,\ \forall \pi_i \in \Pi,\ \forall s_1 \in S$

$$\gamma_i(\pi^*)(s_1) \ge \gamma_i(\pi_i, \pi_{-i}^*)(s_1).$$

Якщо стратегії $\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_m^*$ є ідентичними, рівновага називається симетричною.

Рівновага Неша для гри з обмеженим горизонтом визначається аналогічно.

2. ІСНУВАННЯ РІВНОВАГИ НЕША У ГРІ

Спочатку отримаємо результат для допоміжної одноетапної гри, який буде корисним для доведення розглянутих далі теорем.

Із довільними числами $s \in S$ і $d \in \mathbb{R}^+$ будемо асоціювати одноетапну симетричну m-осібну гру $\Gamma(s, d)$, у якій виграш i-го гравця дорівнює

$$w_i(\bar{x})(s, d) = c x_i^{\alpha} + d \cdot \left(s - \sum_{j=1}^{m} x_j \right)^{\alpha},$$

де $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$ — вибори гравців з простору $A(s)$, $c \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in (0;1)$.

Лема 1. Гра $\Gamma(s, d)$ має симетричну рівновагу Неша $\forall s \in S,\ d \in \mathbb{R}^+$. До того ж виграшем кожного гравця в ситуації симетричної рівноваги є функція вигляду $(\text{const} \cdot s^\alpha)$.

Доведення. Зрозуміло, що у грі $\Gamma(0, d)$ виграші дорівнюють нулю і рівновагою є $(0, 0, \dots, 0)$.

Нехай $s \neq 0$. У цьому разі необхідно довести існування такого вектора $\bar{a} = (a, \dots, a),\ a \in A(s)$, що $\forall i$

$$w_i(\bar{a})(s, d) = \max_{x_i \in A(s)} w_i(x_i, \bar{a}_{-i})(s, d).$$

Для цього достатньо знайти значення $a \in A(s)$, що задовольняє рівняння

$$a = \arg\max_{x \in A(s)} (cx^\alpha + d(s - x - (m-1)\,a)^\alpha)\,. \tag{1}$$

Тому спочатку дослідимо функцію $g : A(s) \times A(s) \to \mathbb{R}^+$, задану формулою

$$g(x, y) := cx^\alpha + d(s - x - (m-1)\ y)^\alpha.$$

Знайдемо першу

$$g'_x(x, y) = c\alpha x^{\alpha-1} - d\alpha(s - x - (m-1)\ y)^{\alpha-1}$$

і другу похідні

$$g''_{xx}(x, y) = c\alpha(\alpha-1)\, x^{\alpha-2} + d\alpha(\alpha-1)(s - x - (m-1)\ y)^{\alpha-2}.$$

Друга частинна похідна є від'ємною у внутрішній частині області визначення, до того ж не існує в деяких граничних точках. Проте, оскільки функція g неперервна, цього достатньо, щоб стверджувати, що $g(\cdot, y)$ з фіксованим другим аргументом є опуклою вгору на $A(s)$.

Перевіримо, чи існує роз'язок рівняння $g'_x(a, a) = 0$ для $a \in A(s)$:

$$g'_x(a, a) = c\alpha a^{\alpha-1} - d\alpha(s - m\,a)^{\alpha-1} = 0;$$

$$a = (d / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}\ (s - ma);$$

$$a = \frac{(d / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}\ s}{1 + m\,(d / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \frac{(c / d)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(c / d)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1 / m} \cdot \left(\frac{s}{m}\right). \tag{2}$$

Легко перевірити, що значення a належить множині $A(s)$.

Оскільки функція $g(\cdot, a)$ опукла вгору і в точці a справджується $g'_x(a, a) = 0$, значення a задовольняє рівність (1) як екстремум опуклої вгору функції.

Таким чином, вираз (2) є рішенням гравців у положенні симетричної рівноваги Неша.

Тоді виграш гравця i в контексті симетричної рівноваги дорівнює

$$w_i(\bar{a})(s, d) = ca^\alpha + d(s - ma)^\alpha = c\left(\frac{(c / d)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(c / d)^{\frac{1}{1-\alpha}} + 1 / m}\right)^\alpha \left(\frac{s}{m}\right)^\alpha +$$

$$+\,dm^{\alpha}\left(1-\frac{(c/d)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{(c/d)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1/m}\right)^{\alpha}\left(\frac{s}{m}\right)^{\alpha}=\frac{c\,(c/d)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}+d}{((c/d)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1/m)^{\alpha}}\left(\frac{s}{m}\right)^{\alpha}=$$

$$=\frac{d((c/d)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1)}{(m\,(c/d)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1)^{\alpha}}\cdot s^{\alpha}. \qquad (3)$$

□

Гру видобутку ресурсів, яка на відміну від G обмежується скінченним часовим горизонтом n, позначимо G^n.

Теорема 1. У грі G^n видобутку ресурсів з m гравцями, що задовольняє припущення А1–А3, існує нерандомізована симетрична рівновага Неша.

Доведення. Нехай $V(S)$ — простір усіх невід'ємних вимірних за Борелем функцій $v: S \to R$, таких що $v(0)=0$. Для $f \in F$, $v \in V(S)$ визначимо оператор динамічного програмування

$$(T_f v)(s)=u(f(s))+\beta\,\mathbb{E}[v((s-m\,f(s))\cdot\xi)].$$

Тут і надалі математичне сподівання береться за мірою випадкової величини ξ.

Вочевидь, $T_f v \in V(S)$. Зауважимо також, якщо $v(s)=k s^{\alpha}$, тоді $\forall i \in \{1, \ldots, m\}$

$$(T_f v)(s)=w_i(\bar{f}(s))(s, kl),$$

де $\bar{f}(s)=(f(s), \ldots, f(s))$, $l:=\beta\,\mathbb{E}[\xi^{\alpha}]$.

Тепер побудуємо рівновагу Неша методом зворотної індукції.

Для довільного $s \in S$ покладемо

$$v_1(s):=\max_{x\in A(s)} u(x)=(c/m^{\alpha})s^{\alpha},$$

$$f_1(s):=\arg\max_{x\in A(s)} u(x)=s/m,$$
$$k_1:=c/m^{\alpha}.$$

Наведені змінні інтерпретуються таким чином: $\bar{f}_1(s)=(f_1(s), \ldots, f_1(s))$ є симетричною рівновагою Неша у грі G^1, $v_1(s)$ — це відповідний виграш кожного гравця, а змінною k_1 позначено коефіцієнт при s^{α} у $v_1(s)$.

Нехай $SNE\,\Gamma(s, d)$ — позначення симетричної рівноваги Неша гри $\Gamma(s, d)$.

Використовуючи лему 1 і вираз (3), встановлюємо такі рівності для послідовного обчислення значень $\bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n \in F^m$, $v_2, \ldots, v_n \in V(S)$ та $k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{R}$:

$$\bar{f}_j(s):=SNE\,\Gamma(s, k_{j-1}\,l),$$

$$v_j(s):=(T_{f_j} v_{j-1})(s)=k_j s^{\alpha},$$

$$k_j:=k_{j-1}l\left(\left(\frac{c}{k_{j-1}l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)\left(m\left(\frac{c}{k_{j-1}l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{-\alpha},$$

де $s \in S$, $j=2, \ldots, n$.

Для i-го учасника гри G^n визначимо стратегію $\pi_i^{(n)} = (f_n, f_{n-1}, \ldots, f_1)$, де $f_j \in F$ — елемент вектора $\bar{f}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Зауважимо використання зворотного порядку: $f_n(s)$ є функцією вибору в момент часу $t = 1$, тоді як $f_1(s)$ — вибір у момент часу $t = n$.

З особливості побудови функцій f_j $(j = 1, \ldots, n)$ і рівняння Беллмана у стохастичному динамічному програмуванні зі скінченним горизонтом [11] випливає, що профіль стратегій $\pi^{(n)} = (\pi_1^{(n)}, \ldots, \pi_m^{(n)})$ утворює рівновагу Неша у грі G^n. Оскільки стратегії $\pi_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ однакові, рівновага симетрична. Якщо $s_1 \in S$ — початковий стан гри, виграш кожного гравця у положенні рівноваги дорівнює $v_n(s_1)$. □

Перш ніж перейти до розгляду гри з нескінченним горизонтом і доведення основної теореми статті, дослідимо поведінку послідовностей $\{f_n\}$ і $\{v_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ з теореми 1.

Лема 2. Для довільного натурального n справджуються нерівності

$$v_{n+1}(s) \geq v_n(s) \text{ і } f_{n+1}(s) \leq f_n(s) \quad \forall s \in S.$$

Доведення виконаємо методом математичної індукції по n.

Крок 1. Маємо

$$v_2(s) = \max_{x \in A(s)} (u(x) + k_1\, l\, (s - x - (m-1)\, f_2(s))^{\alpha}) \geq u(s/m) = v_1(s).$$

Водночас, $f_2(s) \in A(s)$, тобто $f_2(s) \leq s/m = f_1(s)$.

Крок 2. Допустимо тепер, що для деякого n і довільного $s \in S$ справджуються нерівності $v_n(s) \geq v_{n-1}(s)$ і $f_n(s) \leq f_{n-1}(s)$.

Якщо $s = 0$, маємо $v_{n+1}(0) = v_n(0) = 0$ і $f_{n+1}(0) = f_n(0) = 0$, що задовольняє умову індукції.

Покладемо $s > 0$. Тоді з припущення $k_n\, s^{\alpha} = v_n(s) \geq v_{n-1}(s) = k_{n-1}\, s^{\alpha}$ випливає, що $k_n \geq k_{n-1}$. Звідси, використовуючи означення функцій f_n, f_{n+1} і формулу (2), отримуємо:

$$f_{n+1}(s) = \left(1 - \frac{1}{1 + m\left(\dfrac{c}{k_n l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)\left(\frac{s}{m}\right) \leq \left(1 - \frac{1}{1 + m\left(\dfrac{c}{k_{n-1} l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)\left(\frac{s}{m}\right) = f_n(s).$$

Відповідно

$$v_{n+1}(s) = \max_{x \in A(s)} (u(x) + k_n\, l\, (s - x - (m-1)\, f_{n+1}(s))^{\alpha}) \geq$$

$$\geq \max_{x \in A(s)} (u(x) + k_{n-1}\, l\, (s - x - (m-1)\, f_{n+1}(s))^{\alpha}) \geq$$

$$\geq \max_{x \in A(s)} (u(x) + k_{n-1}\, l\, (s - x - (m-1)\, f_n(s))^{\alpha}) = v_n(s).$$

Застосування методу математичної індукції завершує доведення. □

Лема 3. Для будь-якого $s > 0$ послідовність $\{f_n(s)\}$ має скінченну ненульову границю за умови $n \to \infty$.

Доведення. Існування границі випливає з монотонності і обмеженості послідовності.

Зафіксуємо $s > 0$ і покажемо від супротивного, що $f^*(s) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) \neq 0$.

Нехай $f^*(s) = 0$. З леми 2 випливає, що $(v_{n+1}(s) - v_n(s)) \geq 0$ для всіх натуральних n, зокрема достатньо великих. З іншого боку, застосовуючи гіпотезу (хибність якої доводимо) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} (v_{n+1}(s) - v_n(s)) = \lim_{n\to\infty} ((T_{f_{n+1}} v_n)(s) - v_n(s)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (u(f_{n+1}(s)) + \beta\,\mathbb{E}[v_n((s - m\, f_{n+1}(s)) \cdot \xi)] - v_n(s)) = (l-1) \lim_{n\to\infty} v_n(s).$$

Оскільки $\{v_n(s)\}$ — неспадна послідовність і $v_1(s) > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(s) \in$ $\in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$. Тоді, використовуючи A3, отримуємо $\lim\limits_{n\to\infty} (v_{n+1}(s) - v_n(s)) \in$ $\in \mathbb{R}^- \cup \{-\infty\}$, що суперечить знакосталості послідовності $(v_{n+1}(s) - v_n(s))$.

Отримана суперечність демонструє хибність припущення, отже насправді $f^*(s) > 0$. □

Наслідок 1. Для довільного $s \in S$ існує скінченна границя $v^*(s) := \lim\limits_{n\to\infty} v_n(s)$.

Зазначимо, що $v^*(0) = 0$ і $f^*(0) = 0$.

Нехай $\pi^* \in \Pi^m$ — профіль стратегій, за якого кожен гравець в усі моменти часу користується функцією вибору $f^*(s)$.

Теорема 2. Гра G видобутку ресурсів з m гравцями, яка задовольняє умови A1–A3, має симетричну нерандомізовану стаціонарну рівновагу Неша π^*.

Доведення базується на аналогічному доведенні основної теореми у [7].

Використовуючи означення v_n і f_n, можемо отримати такі рівності для будь-якого $s \in S$:

$$v^*(s) = \lim_{n\to\infty} v_n(s) = \lim_{n\to\infty} (c \cdot (f_n(s))^\alpha + \beta \mathbb{E}[v_{n-1}((s - mf_n(s)) \cdot \xi)]) =$$

$$= c \cdot (f^*(s))^\alpha + \beta\,\mathbb{E}[v^*((s - mf^*(s)) \cdot \xi)],$$

а також

$$v^*(s) = \lim_{n\to\infty} \max_{x\in A(s)} (c \cdot x^\alpha + \beta \mathbb{E}[v_{n-1}((s - x - (m-1) f_n(s)) \cdot \xi)]) =$$

$$= \max_{x\in A(s)} (c \cdot x^\alpha + \beta \mathbb{E}[v^*((s - x - (m-1) f^*(s)) \cdot \xi)]).$$

Тоді, прирівнявши праві частини, маємо

$$v^*(s) = c \cdot (f^*(s))^\alpha + \beta \mathbb{E}[v^*((s - mf^*(s)) \cdot \xi)] =$$

$$= \max_{x\in A(s)} (c \cdot x^\alpha + \beta \mathbb{E}[v^*((s - x - (m-1) f^*(s)) \cdot \xi)]).$$

Звідси, користуючись рівнянням оптимальності у дисконтованому динамічному програмуванні [11], одержуємо, що $\forall i$, $\forall s_1 \in S$

$$v^*(s_1) = \gamma_i(\pi^*)(s_1) = \sup_{\pi_i \in \Pi} \gamma_i(\pi_i, \pi^*_{-i})(s_1),$$

тобто π^* є симетричною стаціонарною рівновагою Неша у грі G з початковим станом $s_1 \in S$. □

Зауваження 1. У випадку $\alpha \geq 1$, тобто нестрогої опуклості вниз степеневої функції корисності, гра видобутку ресурсів з припущеннями А2, А3 також має симетричну стаціонарну рівновагу Неша, яка полягає в повному виснаженні ресурсу всіма гравцями на першому кроці. Це можна легко показати, провівши аналогічне доведення, яке значно спрощується завдяки тому, що $f_1(s) = f_2(s) = f_3(s) = \ldots = s / m \quad \forall s \in S$. До того ж умову А3 можна навіть замінити загальнішою $l \in (0; m^{\alpha})$.

3. ДОСЛІДЖЕННЯ НА ПАРЕТО-ОПТИМАЛЬНІСТЬ

Теорема 3. У грі G з властивостями А1–А3 і ненульовим початковим станом симетрична стаціонарна рівновага Неша π^* не є оптимальною за Парето.

Доведення. Побудуємо такий профіль стаціонарних стратегій $\widetilde{\pi}^*$, що $\forall i, \ \forall s_1 > 0$

$$\gamma_i(\widetilde{\pi}^*)(s_1) > \gamma_i(\pi^*)(s_1).$$

Крок 1. Повернімось до допоміжної гри $\Gamma(s, d)$. У лемі 1 шукали симетричну рівновагу Неша цієї гри, тобто такий вектор виборів, що лежить на перетині множини рівноваг Неша і діагоналі. Цього разу знайдемо найоптимальніший вектор виборів серед тих, які лежать на діагоналі, тобто такий, що продукуватиме найбільші виграші порівняно з іншими векторами вигляду $\bar{x} = (x, x, \ldots, x)$. Інакше кажучи, розв'яжемо рівняння

$$\widetilde{a} = \arg\max_{x \in A(s)} (cx^{\alpha} + d(s - mx)^{\alpha}). \tag{4}$$

Нехай $\widetilde{g}(x) := c\,x^{\alpha} + d(s - m\,x)^{\alpha}$. Тоді

$$\widetilde{g}'(x) = c\alpha\, x^{\alpha-1} - dm\alpha(s - mx)^{\alpha-1};$$

$$\widetilde{g}''(x) = c\alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha-2} + dm^2\alpha(\alpha - 1)(s - mx)^{\alpha-2}.$$

Як наслідок, $\widetilde{g}(x)$ — опукла вгору, адже є неперервною функцією, друга похідна якої від'ємна у внутрішній частині області визначення і не існує у граничних точках. З множини $A(s)$ виокремимо таке $\widetilde{a}$, для якого $\widetilde{g}'(\widetilde{a}) = 0$:

$$c\alpha\widetilde{a}^{\alpha-1} - dm\alpha(s - m\widetilde{a})^{\alpha-1} = 0;$$

$$\widetilde{a} = (dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}(s - m\widetilde{a});$$

$$\widetilde{a} = \frac{(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}\, s}{1 + m(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}} = \frac{(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 / m} \cdot \left(\frac{s}{m}\right). \tag{5}$$

Визначене в такий спосіб $\widetilde{a}$ дійсно належить $A(s)$. До того ж для нього справджується $\widetilde{g}'(\widetilde{a}) = 0$ і $\widetilde{g}''(\widetilde{a}) < 0$, що є ознакою локального максимуму. А враховуючи те, що $\widetilde{g}$ опукла вгору на всій області визначення, вираз (5) є розв'язком рівняння (4).

Для кожного гравця i у Γ обчислимо максимальне значення виграшу на множині тотожних виборів:

$$\max_{x \in A(s)} w_i(x, x, \ldots, x)(s, d) = \max_{x \in A(s)} \widetilde{g}(x) = \widetilde{g}(\widetilde{a}) = c\left(\frac{(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(dm / c)^{\frac{1}{\alpha-1}} + 1 / m}\right)^{\alpha} \cdot \left(\frac{s}{m}\right)^{\alpha} +$$

$$+d\left(1-\frac{(d\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(d\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}+1/m}\right)^{\alpha}\cdot s^{\alpha}=\frac{d\,(m\,(d\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}+1)}{(m\,(d\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}+1)^{\alpha}}\cdot s^{\alpha}=$$

$$=d\left(m\left(\frac{c}{d\,m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{1-\alpha}\cdot s^{\alpha}. \qquad (6)$$

Особливість такого виграшу полягає в тому, що для довільного i та додатних s і d маємо $w_i(\widetilde{a},\dots,\widetilde{a})(s,d)>w_i(a,\dots,a)(s,d)$, що справджується внаслідок строгої опуклості вгору функції $\widetilde{g}$ і того, що $\widetilde{a}\neq a$.

Зауважимо, що не зважаючи на спільну вигідність положення $(\widetilde{a},\widetilde{a},\dots,\widetilde{a})$, досі на ньому не фокусувалася увага, оскільки воно є оптимальним лише для спільних відхилень по діагоналі, тоді як рівновага Неша $(a,a,\dots,a)$ — оптимальна відносно односторонніх відхилень для кожного окремого гравця.

Крок 2. Побудуємо нові послідовності $\{\widetilde{f}_n\}$, $\{\widetilde{v}_n\}$ і $\{\widetilde{k}_n\}$ таким чином, що $\widetilde{f}_1:=f_1$, $\widetilde{v}_1:=v_1$, $\widetilde{k}_1:=k_1$, а наступні значення обчислимо послідовно, використовуючи формули (5) і (6):

$$\widetilde{f}_n(s):=\underset{x\in A(s)}{\arg\max}\; w_i(x,x,\dots,x)(s,\widetilde{k}_{n-1}\,l)=\frac{(\widetilde{k}_{n-1}\,l\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{(\widetilde{k}_{n-1}\,l\,m/c)^{\frac{1}{\alpha-1}}+1/m}\cdot\left(\frac{s}{m}\right),$$

$$\widetilde{v}_n(s):=(T_{\widetilde{f}_n}\widetilde{v}_{n-1})(s)=\widetilde{k}_n\,s^{\alpha},\quad \widetilde{k}_n:=\widetilde{k}_{n-1}l\left(m\left(\frac{c}{\widetilde{k}_{n-1}\,l\,m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{1-\alpha}.$$

Означимо відображення $\widetilde{\psi}(k):\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, $\widetilde{\psi}(k):=k\,l\left(m\left(\frac{c}{k\,lm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{1-\alpha}$, що рекурсивно задає $\{\widetilde{k}_n\}$. Відповідно нехай $\psi(k)$: $\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ — рекурсивна функція для послідовності $\{k_n\}$ з теореми 1: $\psi(k):=k\,l\left(\left(\frac{c}{k\,l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)\left(m\left(\frac{c}{k\,l}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{-\alpha}$.

З того, що $\widetilde{\psi}(k)\cdot s^{\alpha}=w_i(\widetilde{a},\dots,\widetilde{a})(s,k\,l)>w_i(a,\dots,a)(s,k\,l)=\psi(k)\cdot s^{\alpha}$ $\forall i$, $\forall s>0$, $\forall k>0$, одразу маємо наслідок:

$$\forall k>0\;\;\widetilde{\psi}(k)>\psi(k). \qquad (7)$$

Крок 3. Обчислимо похідну функції $\widetilde{\psi}(k)$:

$$\widetilde{\psi}'(k)=l\left(m\left(\frac{c}{k\,lm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{1-\alpha}+$$

$$+kl(1-\alpha)\left(m\left(\frac{c}{k\,l\,m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{-\alpha}\cdot m\left(\frac{c}{l\,m}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\left(\frac{-1}{1-\alpha}\right)\cdot k^{-\frac{1}{1-\alpha}-1}=$$

$$=\left(m\left(\frac{c}{klm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{-\alpha}\left(lm\left(\frac{c}{klm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+l-lm\left(\frac{c}{k\,lm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)=l\left(m\left(\frac{c}{klm}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}+1\right)^{-\alpha}.$$

Таким чином, $\forall k > 0$ $\widetilde{\psi}'(k) \in (0; l)$. З цього можна зробити два висновки. По-перше, $\widetilde{\psi}(k)$ — зростаюча функція. Для демонстрації другого наслідку використаємо теорему Лагранжа, яка стверджує, що $\forall x, \ y \in \mathbb{R}^+$ існує проміжна точка z, така що $\widetilde{\psi}(y) - \widetilde{\psi}(x) = \widetilde{\psi}'(z) \cdot (y - x)$. Звідси, підставивши межі похідної, отримуємо нерівність $|\widetilde{\psi}(x) - \widetilde{\psi}(y)| < l \cdot |x - y|$ $\forall x, y > 0$. Разом з умовою А3 це відношення вказує на те, що відображення $\widetilde{\psi}(k)$ є стискальним на множині додатних чисел. Як наслідок за теоремою Банаха про нерухому точку на $\mathbb{R}^+$ існує єдине значення $\widetilde{k}^*$, до якого збігається послідовність $\{\widetilde{k}_n\}$.

Додатково покажемо, що $\widetilde{k}^* \geq k^*$.

Нерівність $\widetilde{k}_n \geq k_n$ виконується $\forall n \in \mathbb{N}$ за індукцією. По-перше, маємо $\widetilde{k}_1 = k_1$. По-друге, якщо для деякого $n \geq 2$ виконується $\widetilde{k}_{n-1} \geq k_{n-1}$, то унаслідок зростання функції $\widetilde{\psi}(k)$ та (7) одержуємо, що $\widetilde{k}_n = \widetilde{\psi}(\widetilde{k}_{n-1}) \geq \widetilde{\psi}(k_{n-1}) >$ $> \psi(k_{n-1}) = k_n$.

Тоді, за властивостями границь,

$$\widetilde{k}^* = \lim_{n\to\infty} \widetilde{k}_n \geq \lim_{n\to\infty} k_n = k^*. \tag{8}$$

Зі збіжності $\{\widetilde{k}_n\}$ випливає також існування скінченних границь $\widetilde{v}^*(s) := \lim_{n\to\infty} \widetilde{v}_n(s)$ та $\widetilde{f}^*(s) := \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}_n(s)$ для $\forall s > 0$.

Крок 4. У грі G позначимо $\widetilde{\pi}^*$ такий профіль стратегій, в якому кожен гравець на кожному етапі гри використовує функцію вибору $\widetilde{f}^*(s)$.

Тоді, оскільки $\forall s > 0$

$$\widetilde{v}^*(s) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{v}_n(s) = \lim_{n\to\infty} (T_{\widetilde{f}_n} \widetilde{v}_{n-1})(s) = u(\widetilde{f}^*(s)) + \beta\, \mathbb{E}\, [\widetilde{v}^*((s - m\widetilde{f}^*) \cdot \xi)],$$

для кожного гравця i та довільного додатного початкового стану s_1 маємо

$$\widetilde{v}^*(s_1) = \gamma_i(\widetilde{\pi}^*)(s_1).$$

Насамкінець, використовуючи (7), (8) та умову зростання функції $\widetilde{\psi}(k)$, отримуємо, що $\forall s_1 > 0$

$$\widetilde{v}^*(s_1) = \widetilde{k}^* (s_1)^\alpha = \widetilde{\psi}(\widetilde{k}^*)(s_1)^\alpha \geq \widetilde{\psi}(k^*)(s_1)^\alpha > \psi(k^*)(s_1)^\alpha = k^* (s_1)^\alpha = v^*(s_1).$$

Отже, $\forall i, \forall s_1 > 0$ справджується

$$\gamma_i(\widetilde{\pi}^*)(s_1) > \gamma_i(\pi^*)(s_1),$$

що доводить неоптимальність за Парето стаціонарної рівноваги Неша π^*. □

З теореми 3 випливає, що всі гравці здатні покращити свої виграші за рахунок перемовин і спільного переходу від положення рівноваги до профілю $\widetilde{\pi}^*$. Проте, будь-яка домовленість, яка не є рівновагою Неша, не буде стабільною в тому сенсі, що в окремих учасників залишається бажання відхилитися від переговорної стратегії заради індивідуального зиску. Саме тому обставина існування Парето-оптимальної рівноваги Неша є суттєвою.

4. ЧИСЛОВИЙ ПРИКЛАД

Продемонструємо процедуру побудови рівноваги Неша на конкретному прикладі, а також порівняємо обчислені з певною точністю виграші у положенні рівноваги з тими, що можливі за умови кооперування.

Таблиця 1

n	$f_n(s)$	$\mathrm{u}_n(s)$	$\widetilde{f}_n(s)$	$\widetilde{\mathrm{u}}_n(s)$
1	$0.2\,s$	$0.4472135955 \cdot s^{\alpha}$	$0.2\,s$	$0.4472135955 \cdot s^{\alpha}$
2	$0.19388088420s$	$0.50980408991620 \cdot s^{\alpha}$	$0.11179240416\,s$	$0.59816892509057 \cdot s^{\alpha}$
3	$0.19212040652\,s$	$0.52820038700189 \cdot s^{\alpha}$	$0.08293252210\,s$	$0.69449249848605 \cdot s^{\alpha}$
4	$0.19156588933\,s$	$0.53403207202728 \cdot s^{\alpha}$	$0.06889840454\,s$	$0.76194813971706 \cdot s^{\alpha}$
5	$0.19138668966\,s$	$0.53592050746353 \cdot s^{\alpha}$	$0.06078257328\,s$	$0.81122337189901 \cdot s^{\alpha}$
6	$0.19132831137\,s$	$0.53653611454448 \cdot s^{\alpha}$	$0.05561366257\,s$	$0.84808473630563 \cdot s^{\alpha}$
7	$0.19130924394\,s$	$0.53673722665859 \cdot s^{\alpha}$	$0.05211670330\,s$	$0.87607548466860 \cdot s^{\alpha}$
8	$0.19130301090\,s$	$0.53680297376685 \cdot s^{\alpha}$	$0.04965321698\,s$	$0.89754514085054 \cdot s^{\alpha}$
9	$0.19130097279\,s$	$0.53682447257016 \cdot s^{\alpha}$	$0.04786791605\,s$	$0.91412952307961 \cdot s^{\alpha}$
10	$0.19130030630\,s$	$0.53683150303992 \cdot s^{\alpha}$	$0.04654737200\,s$	$0.92700571697902 \cdot s^{\alpha}$
...	...	...	...	...
49	$0.19129998242\,s$	$0.53683491943289 \cdot s^{\alpha}$	$0.04219431974\,s$	$0.97365029746221 \cdot s^{\alpha}$
50	$0.19129998242\,s$	$0.53683491943289 \cdot s^{\alpha}$	$0.04219423901\,s$	$0.97365122897230 \cdot s^{\alpha}$

Нехай у симетричній грі видобутку ресурсів є п'ять учасників, $u(x)=\sqrt{x}$, $\beta=0.8$. Для $t\in\mathbb{N}$ кожен наступний стан гри s_{t+1} визначається з попереднього s_t за формулою

$$s_{t+1}=r(s_t,x_t)+r(s_t,x_t)\cdot\eta,$$

де $x_t=(x_{t1},\ldots,x_{t5})\in A(s_t)\times\ldots\times A(s_t)$ — рішення гравців у стані s_t, $r(s_t,x_t)=$ $=s_t-\sum_{i=1}^{5}x_{ti}$ — їхня спільна інвестиція, а випадкова величина η розподілена рівномірно на проміжку $[-0.25;\,0.75]$. Інакше кажучи, розглядається стохастична модель, в якій на інвестицію впливають рівномірно розподілені мультиплікативні збурення (multiplicative shocks). Тоді $l=0.8\cdot\int_{0.75}^{1.75}\sqrt{\xi}\,d\xi=$ $=0.88827378365$.

Послідовно обчислені значення $f_n(s)$, $\upsilon_n(s)$, $\widetilde{f}_n(s)$ і $\widetilde{\upsilon}_n(s)$ наведено у табл. 1.

Таким чином, рівновага Неша досягається симетричною стаціонарною стратегією $f^*(s)=0.1912\ldots s$. Очікувані виграші у цьому разі дорівнюють $\upsilon^*(s_1)=0.5368\ldots\cdot s_1^{\alpha}$. Проте, це значення є суттєво меншим порівняно з виплатами $\widetilde{\upsilon}^*(s_1)=0.9736\ldots\cdot s_1^{\alpha}$, що відповідають вибору профілю стратегій $\widetilde{\pi}^*$. Отримана різниця є показовою і наголошує на важливості існування комунікації та довіри між гравцями у випадку застосування моделі на практиці.

ВИСНОВКИ

Гра видобутку ресурсів описує проблематику економічної взаємодії в умовах спільного користування змінними в часі ресурсами. Ключовим питанням, яке вивчають у цій грі, є існування рівноваги Неша. У роботі доведено існування симетричної стаціонарної рівноваги Неша для симетричної гри видобутку ресурсів з недослідженого досі класу. А саме, у грі передбачається довільна кількість учасників, необмежений простір станів, необмежені функції корисності гравців, а також імовірності переходу у вигляді стохастичного ядра, залежного від спільних інвестицій. Водночас з цього класу виокремлено модель, у якій функції корисності є степеневими, а закон переходу — геометричним випадковим блуканням. Обидва припущення мають практичне значення, оскільки широко використовуються в економічному моделюванні.

Метод доведення існування симетричної стаціонарної рівноваги Неша є одночасно і методом її побудови. Це важливо для практичного застосування, оскільки дає змогу одразу знаходити і оцінювати положення рівноваги. У наведеному прикладі ітеративно обчислено стаціонарну рівновагу Неша для конкретної числової постановки задачі.

Додатковим результатом є те, що знайдена стаціонарна рівновага не є оптимальною за Парето. На практиці це означає, що агентам, які спільно володіють ресурсом або капіталом у відповідному до моделі контексті, доцільно шукати можливості для кооперації та укладати зобов'язання заради вигоди від переговорних стратегій. На прикладі наочно проілюстровано, наскільки суттєвою може бути різниця у виграшах між рівновагою Неша та симетричним відхиленням від неї.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Levhari D., Mirman L. The great fish war: An example using a dynamic Cournot–Nash solution. *The Bell Journal of Economics*. 1980. Vol. 11, N 1. P. 322–334. https://doi.org/10.2307/3003416.
2. Sundaram R.K. Perfect equilibrium in non-randomized strategies in a class of symmetric dynamic games. *Journal of Economic Theory*. 1989. Vol. 47, N 1. P. 153–177. https://doi.org/10.1016/0022-0531(89)90107-5.
3. Majumdar M.K., Sundaram R.K. Symmetric stochastic games of resource extraction. The existence of non-randomized stationary equilibrium. Stochastic Games and Related Topics Raghavan TES et al. (Eds.). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991. P. 175–190.
4. Dutta P.K., Sundaram R. Markovian equilibrium in a class of stochastic games: existence theorems for discounted and undiscounted models. *Econ. Theory.* 1992. Vol. 2, N 2. P. 197–214. https://doi.org/10.1007/BF01211440.
5. Jaskiewicz A., Nowak A.S. On symmetric stochastic games of resource extraction with weakly continuous transitions. *TOP* 26. 2018. P. 239–256. https://doi.org/10.1007/s11750-017-0465-0.
6. Jaskiewicz A., Nowak A.S. Stochastic games of resource extraction. *Automatica*. 2015. Vol. 54. P. 310–316. https://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.01.028.
7. Balbus Ł., Nowak A. Construction of Nash equilibria in symmetric stochastic games of capital accumulation. *Math. Meth. Oper. Res.* 2004. Vol. 60. P. 267–277. https://doi.org/10.1007/s001860400383.
8. Friend I., Blume M.E. The demand for risky assets. *The American Economic Review*. 1975. Vol. 65, N 5. P. 900–922.
9. Szajowski P. Constructions of Nash equilibria in stochastic games of resource extraction with additive transition structure. *Math. Meth. Oper. Res*. 2006. Vol. 63, N 2. P. 239–260. https://doi.org/10.1007/s00186-005-0015-7
10. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic optimal control: The discrete-time case. New York: Academic Press, 1978.
11. Blackwell D. Discounted dynamic programming. *The Annals of Mathematical Statistics*. 1965. Vol. 36, N 1. P. 226–235.

I. Sylenko

NASH EQUILIBRIUM IN A SPECIAL CASE OF SYMMETRIC RESOURCE EXTRACTION GAMES

Abstract. The study complements available results on the existence of Nash equilibrium in resource extraction games with an arbitrary number of agents. In the proposed model, it is assumed that the players have identical preferences, the utility function is a power function, and the sequence of states from the joint investments is determined via geometric random walk. An iterative method is used for constructing a nonrandomized stationary Nash equilibrium in the infinite horizon game. It is shown that the equilibrium belongs to the set of Pareto inefficient strategies.

Keywords: stochastic games, resource extraction, capital accumulation, stationary Nash equilibrium, power utility function, geometric random walk.

Надійшла до редакції 26.08.2020