УДК 004.421.6

М.С. ЛЬВОВ
Херсонський державний університет, Херсон, Україна,
e-mail: *lvov@ksu.ks.ua*.

Ю.Г. ТАРАСІЧ
Херсонський державний університет, Херсон, Україна,
e-mail: *yutarasich@ksu.ks.ua*.

АЛГОРИТМ ПОПОВНЕННЯ В АЛГЕБРАХ МНОЖИН

Анотація. Описано алгоритм, який за аналогією з алгоритмами Бухбергера і Кнута–Бендикса можна назвати алгоритмом поповнення. Наведено конкретні реалізації теоретичної конструкції (абстрактної системи редукцій) в алгебрах скінчених, числових, лінійних напівалгебраїчних множин та алгебри мультимножин. Розглянуто задачу елементарної теорії чисел, яка може бути інтерпретована як задача алгебри мультимножин. Основна мета роботи — привернути увагу до простих прикладів застосування алгоритму поповнення.

Ключові слова: алгоритм поповнення, конструктивна алгебра множин, стандартний базис.

ВСТУП

Алгоритм поповнення набув популярності у конструктивній теорії поліноміальних ідеалів. Застосував цей алгоритм Б. Бухбергер [1–3] для побудови базису ідеалу кільця многочленів, що має гарні властивості. (За ініціативи Б. Бухбергера, у якого професор В. Гребнер (W. Gröbner) був науковим керівником, ці базиси називають базисами Гребнера.) Якщо базис Гребнера ідеалу побудовано, багато класичних задач теорії поліноміальних ідеалів можуть бути ефективно розв’язані. Це, для прикладу, задача належності $f \in I$, задача порівняння $I = J$ тощо. Фактично, метод базисів Гребнера став основним у конструктивній теорії поліноміальних ідеалів.

Алгоритм поповнення — алгоритм Кнута–Бендикса критичних пар [4, 5] — також відомий у теорії систем переписування термів. Його успішно застосовують для таких систем, що задовольняють властивість канонічності Черча–Россера [6–8]. Застосунки цього алгоритму — теорія напівгруп і теорія груп з визначальними співвідношеннями тощо [9]. Зазначимо, що алгоритми Бухбергера і Кнута–Бендикса формулюються в специфічних предметних областях.

У запропонованій роботі алгоритм, який за аналогією з алгоритмами Бухбергера і Кнута–Бендикса можна назвати алгоритмом поповнення, використовується для розв’язання прикладних задач у конструктивних алгебрах множин. Розглядаються конкретні реалізації теоретичної конструкції — абстрактної системи редукцій в декількох алгебрах множин. Це алгебра скінченних множин, алгебра числових множин [10, 11] і алгебра мультимножин. Також розглядається задача елементарної теорії чисел, яку можна інтерпретувати як задачу ще однієї алгебри мультимножин.

Основна мета цієї роботи — привернути увагу викладачів дискретної математики, комп’ютерної алгебри, основ алгоритмізації та інших комп’ютерних наук до простих прикладів застосування алгоритму поповнення.

Є підстави вважати, що алгоритм поповнення може бути ефективно застосований для розв'язання алгоритмічних проблем в алгебрі лінійних напівалгебраїчних множин і в інших алгоритмічно складних алгебрах множин.

ЗАДАЧА 1. ПРОБЛЕМА НАЛЕЖНОСТІ В АЛГЕБРІ МНОЖИН

Нехай $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ — скінченна множина-універсум і $\overline{A} = \{A_1, A_2, \dots$ $\dots, A_m\}$ — скінченна система непорожніх підмножин множини U: $A_i \subseteq U, i = 1, 2, \dots, m$. Розглянемо множину всіх формул вигляду $f(x_1, x_2, \dots$ $\dots, x_m)$ у сигнатурі $\sum_\Omega = \{() \cap (), () \cup (), () - ()\}$: $\Omega(\overline{X}) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_m)\}$ і визначимо алгебру множин з системою твірних $\overline{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ як множину $\Omega(\overline{A}) = \{f(A_1, A_2, \dots, A_m)\}$. Нехай далі дано множину $C \subseteq U$. Проблема належності (membership problem) формулюється так: визначити $C \in \Omega(\overline{A})$.

Отже, в задачі потрібно побудувати алгоритм розв'язання проблеми належності за заданими універсумом U, системою твірних $\overline{A}$ і множиною $C \subseteq U$.

Означення 1. Скінченна система непорожніх множин $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ називається диз'юнктивним базисом алгебри $\Omega(\overline{A})$ A, якщо

1) $B_i \cap B_j = \varnothing$ для всіх $i, j: i \neq j$;
2) $A_i = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \dots \cup B_{il_i}$ для всіх i;
3) $f(A_1, A_2, \dots, A_m) = B_{f1} \cup B_{f2} \cup \dots \cup B_{fl_f}$ для всіх $f \in \Omega(\overline{X})$.

Диз'юнктивний базис (далі — базис) B системи A називається стандартним, якщо він містить мінімально можливу кількість елементів.

Властивості 2, 3 означають, що будь-який елемент алгебри множин $\Omega(\overline{A})$ може бути представлений у вигляді об'єднання деяких елементів базису B.

Як базис можна вибрати систему одноелементних підмножин універсуму U: $B = \{\{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_k\}\}$. Представлення будь-якої множини $f(\overline{A})$ у розкладанні за базисними елементами, тобто у вигляді $f(A) = B_{f1} \cup B_{f2} \cup \dots \cup B_{fl_f}$, є єдиним.

Як базис можна вибрати також систему всіх елементарних кон'юнктів $A_1^{\alpha_1} \cap A_2^{\alpha_2} \cap \dots \cap A_m^{\alpha_m}$, де $A_i^{\alpha_i} = A_i$, якщо $\alpha_i = 0$, і $A_i^{\alpha_i} = \overline{A}_i$, якщо $\alpha_i = 1$. У цьому визначенні алгебри $\Omega(\overline{A})$ серед базисних елементів відсутній елементарний коньюнкт $\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \dots \cap \overline{A}_m$ (усі базисні множини з запереченням). Представлення будь-якої множини $f(\overline{A})$ у розкладанні за такими базисними елементами $f(A) = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \dots \cup B_{il_i}$ також є єдиним. Завдяки стандартному базису таке представлення є найбільш економним.

Приклад 1. Допустимо, що потрібно побудувати стандартний базис системи множин A, B, C. Якщо ці множини містяться в загальному положенні,

$$\text{StBase} =< ABC, \overline{A}BC, A\overline{B}C, AB\overline{C}, \overline{A}\overline{B}C, \overline{A}B\overline{C}, A\overline{B}\overline{C} >.$$

Якщо, для прикладу, $AB = \varnothing$, тоді $\overline{A}B = B, A\overline{B} = A$ і

$$\text{StBase} =< BC, AC, \overline{A}\overline{B}C, B\overline{C}, A\overline{C} >.$$

АЛГОРИТМ ПОБУДОВИ СТАНДАРТНОГО БАЗИСУ

У задачі 1 наведено скінченну систему непорожніх підмножин $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ множини-універсуму U. Якщо за цією системою побудувати стандартний диз'юнктивний базис $B = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$, проблема належності розв'язується легко: потрібно для всіх елементів стандартного базису визначити $B_i \subseteq C$. Відповідне перетворення має вигляд

Цикл по i **від** 1 **до** n **Якщо** $B_i \subseteq C$ **то** $C := C - B_i$,

якщо після цього циклу $C = \varnothing$, $C \in \Omega(\overline{A})$.

Розглянемо алгоритм побудови стандартного базису системи множин $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$. Цей алгоритм є прикладом із класу алгоритмів, які називаються алгоритмами поповнення.

Алгоритм поповнення походить з множини $A = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Крок 1. Покладемо $B_i^{(0)} = A_i$, $B^{(0)} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$.

Крок 2. Якщо у множині $B = \{B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \ldots, B_l^{(s)}\}$ існують такі два елементи: $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$, що $B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)} \neq \varnothing$, приймаємо $B_{l+1}^{(s)} = B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)}$ і перетворюємо $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$: $B_i^{(s)} := B_i^{(s)} - B_{l+1}^{(s)}$, $B_j^{(s)} := B_j^{(s)} - B_{l+1}^{(s)}$.

Пара $B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)} \neq \varnothing$ називається критичною парою. Множини $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$ редукуються відніманням з кожної множини їхнього перетину. У результаті виконання цієї операції множини $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$ редуковано до множин, які взаємно не перетинаються, і систему поповнено множиною $B_{l+1}^{(s)} = B_i^{(s)} \cap B_j^{(s)}$.

Ці перетворення виконуються за умови, що обчислені множини непорожні.

Крок 3. Якщо у множині $B = \{B_1^{(s)}, B_2^{(s)}, \ldots, B_l^{(s)}\}$ існує два рівні елементи: $B_i^{(s)}, B_j^{(s)}$, $B_i^{(s)} = B_j^{(s)}$, згідно алгоритму $B := B - \{B_j^{(s)}\}$, тобто із системи B вилучається один з таких елементів.

Кроки 2, 3 завершуються і $s := s + 1$ (здійснюється перехід до наступних перетворень).

Крок 4. Алгоритм завершує роботу, коли умови кроків 2, 3 нездійсненні.

Можна довести, що побудований таким чином базис є стандартним. У цьому разі представлення будь-якої множини A_i у вигляді $A_i = B_{i1} \cup B_{i2} \cup \ldots \cup B_{il_i}$ є єдиним.

Зазначимо, що розглянутий алгоритм використовує три типи операцій:

— поповнення системи B перетином двох множин (елементів цієї системи);

— редукування системи B відніманням від цих множин їхнього перетину;

— мінімізація системи B вилученням із B одного з двох рівних елементів.

Насправді, всі ці міркування і результати мають місце і в загальній ситуації. Так, можна вимагати лише, щоб алгебра множин $\Omega(\overline{A})$ над універсумом U була конструктивною. Це означає, що елементи $\Omega(\overline{A})$ — скінченні об'єкти — конструкції і всі операції сигнатури алгебри $\Omega(\overline{A})$, а також відношення рівності $A = B$ реалізовані алгоритмами.

Прикладом конструктивної алгебри може бути алгебра числових множин, елементи якої — суть скінченні об'єднання числових інтервалів.

Також вартий уваги такий приклад: алгебра мультимножин.

Нехай, як і в задачі 1, задано універсум $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Мультимножиною A називається сукупність деяких елементів з U кожен з яких міститься в A у декількох екземплярах. Таким чином, $A = \{(u_1, k_1), (u_2, k_2), \ldots, (u_m, k_m)\}$. У парі (u_i, k_i) k_i означає кількість елементів u_i у мультимножині A.

Приклад 2. Універсум цього прикладу — набір різнокольорових куль: $U = \{red, yellow, green, blue\}$. Тоді мультимножина $A = \{(red, 3), (yellow, 0), (green, 1), (blue, 5)\}$ містить дев'ять елементів: три червоні кулі, одну зелену і п'ять синіх куль.

Визначимо сигнатуру алгебри мультимножин $M(U)$. Якщо $A, B \in M(U)$ — мультимножини і

$$A = \{(u_1, k_1), (u_2, k_2), \ldots, (u_m, k_m)\}, \quad B = \{(u_1, l_1), (u_2, l_2), \ldots, (u_m, l_m)\},$$

тоді

$$A \cap B = \{(u_1, \min(k_1, l_1)), (u_2, \min(k_2, l_2)), \ldots, (u_m, \min(k_m, l_m))\},$$

$$A \cup B = \{(u_1, \max(k_1, l_1)), (u_2, \max(k_2, l_2)), \ldots, (u_m, \min(k_m, l_m)\},$$

$$A - B = \{(u_1, k_1 - \min(k_1, l_1)), (u_2, k_2 - \min(k_2, l_2)), \ldots, (u_m, k_m - \min(k_m, l_m))\}.$$

Означення 1 диз'юнктивного стандартного базису для алгебри мультимножин має одну варту уваги відмінність, а саме: у п. 2, 3 цього означення серед базисних елементів $f(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ можуть бути рівні. Якщо для алгебри скінченних множин у розкладі $f(A_1, A_2, \ldots, A_m) = B_{f1} \cup B_{f2} \cup \ldots \cup B_{fl_f}$ для всіх $f \in \Omega(\overline{X})$, $B_{fi} \neq B_{fj}$, тоді для алгебри мультимножин у цьому розкладі для деяких базисних елементів є можливою рівність $B_{fi} = B_{fj}$.

Зазначимо, що для будь-яких конструктивних алгебр множин, якщо $|\overline{A}| = m$, кількість елементів у стандартному диз'юнктивному базисі не перевищує $2^m : |\overline{B}| \le 2^m$.

ЗАДАЧА 2. СТАНДАРТНІ МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ БАЗИСИ ЧИСЛОВИХ СИСТЕМ

Нехай $\overline{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ — скінченний набір натуральних чисел, більших одиниці. Будемо називати такий набір системою чисел. Визначимо алгебру $\Xi(\overline{A})$ сигнатурою $\sum_{\Xi} = \{() \cdot (), GCD((),()), DIV((),()), MOD((),())\}$ та множиною твірних $\overline{A}$.

Означення 2. Система натуральних чисел $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ називається мультиплікативним базисом (далі — базисом) системи A, якщо

1) $GCD(b_i, b_j) = 1$ для всіх $i, j: i \neq j$;

2) $a_i = b_{i1}^{d_{i1}} \cdot b_{i2}^{d_{i2}} \cdot \ldots \cdot b_{il_i}^{id_{ili}}$ для всіх i;

3) $f(a_1, a_2, \ldots, a_m) = b_{f1}^{d_{f1}} \cdot b_{f2}^{d_{f2}} \cdot \ldots \cdot b_{il_i}^{fd_{flf}}$.

Мультиплікативний базис B алгебри $\Xi(A)$ називається стандартним, якщо він містить мінімально можливу кількість елементів.

Серед базисних елементів у п. 2, 3 означення 2 можуть бути рівні. Інакше кажучи, будь-який елемент алгебри $\Xi(A)$ можна навести у вигляді добутку натуральних степенів деяких елементів базису B.

Нехай $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ — набір простих чисел, через які можна виразити будь-яке число системи $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}: a_i = p_1^{di1} \cdot p_2^{di2} \cdot \ldots \cdot p_n^{din}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тоді, вочевидь, набір P — мультиплікативний базис алгебри $\Xi(A)$. Представлення будь-якого елементу $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ алгебри $\Xi(A)$ у розкладанні по базису P, тобто у вигляді $f(a_1, a_2, \ldots, a_m) = p_1^{df1} \cdot p_2^{df2} \cdot \ldots \cdot p_n^{dfn}$, є єдиним.

Проте, стандартний базис робить таке представлення найбільш економним. Зауважимо також, що алгоритм обчислення базису P вимагає повної факторизації всіх чисел системи A. Оскільки відомі алгоритми факторизації є неефективними, алгоритми обчислення P також неефективні.

У задачі 2 дано скінченну систему натуральних чисел, більших одиниці $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Потрібно побудувати стандартний мультиплікативний базис $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ алгебри $\Xi(A)$.

Розглянемо алгоритм побудови стандартного мультиплікативного базису алгебри $\Xi(A)$. Так само, як і алгоритм задачі 1, цей алгоритм є прикладом із класу алгоритмів, які називаються алгоритмами поповнення. Щоб зв'язок алгоритмів поповнення задач 1, 2 став очевидним, алгоритм задачі 2 викладемо так само, як і алгоритм задачі 1.

Алгоритм поповнення виходить з множини $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Крок 1. Покладемо $b_i^{(0)} = a_i$: $B^{(0)} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$.

Крок 2. Якщо у множині $B = \{b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, \ldots, b_l^{(s)}\}$ існують такі два елементи: $b_i^{(s)}, b_j^{(s)}$, що $GCD(b_i^{(s)}, b_j^{(s)}) \neq 1$, вважаємо, що $b_{l+1}^{(s)} = GCD(b_i^{(s)}, b_j^{(s)})$, і перетворюємо $b_i^{(s)}, b_j^{(s)}$:

$$b_i^{(s)} := DIV(b_i^{(s)}, b_{l+1}^{(s)}),\, b_j^{(s)} := DIV(b_j^{(s)}, b_{l+1}^{(s)}).$$

Інакше кажучи, числа $b_i^{(s)}, b_j^{(s)}$ редукуються діленням кожного з них на їхній найбільший спільний дільник. У результаті виконання цієї операції числа $b_i^{(s)}, b_j^{(s)}$ редуковано до взаємно простих, і систему поповнено числом $b_{l+1}^{(s)} = GCD(b_i^{(s)}, b_j^{(s)})$. Ці перетворення виконуються за умови, що отримані числа не рівні одиниці.

Крок 3. Якщо у множині $B = \{b_1^{(s)}, b_2^{(s)}, \ldots, b_l^{(s)}\}$ існують такі два елементи: $b_i^{(s)}, b_j^{(s)}$, що $b_i^{(s)} = b_j^{(s)}$, вважаємо, що $B := B - \{b_j^{(s)}\}$, тобто вилучаємо із системи B один з таких елементів. Крок завершується і $s := s+1$ (перехід до наступних перетворень).

Крок 4. Алгоритм завершує роботу, коли умови кроків 2, 3 нездійсненні.

Можна довести, що побудований таким чином базис є стандартним. У цьому разі представлення будь-якого числа $f(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ у вигляді $a_i = b_{i1} \cdot b_{i2} \cdot \ldots \cdot b_{il_i}$ є єдиним.

Зазначимо, що і цей алгоритм використовує три типи операцій:

— поповнення системи B GCD двох чисел (елементів цієї системи);

— редукування системи B діленням цих чисел на їхні GCD;

— мінімізація системи B вилученням із B одного з двох рівних її елементів.

Алгоритм задачі 2 не лише подібний до алгоритму задачі 1, а є безпосереднім його узагальненням. Власне, якщо в задачі 1 алгоритм побудови базису сформульовано для множин, алгоритм задачі 2 фактично використовує так звані мультимножини. Розглянемо новий виклад алгоритму 2.

Нехай, як і в задачі 1, задано універсум $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$. Мультимножиною A називається сукупність деяких елементів з U, кожен з яких міститься в A у декількох екземплярах. Таким чином, $A = \{(u_1, k_1), (u_2, k_2), \ldots, (u_m, k_m)\}$. У парі (u_i, k_i) k_i означає кількість елементів u_i у мультимножині A.

Нехай, для прикладу, універсум — це набір різнокольорових куль: $U = \{red, yellow, green, blue\}$. Тоді мультимножина $A = \{(red, 3), (yellow, 0), (green, 1), (blue, 5)\}$ містить дев'ять елементів: три червоні кулі, одну зелену і п'ять синіх куль.

Якщо A, B — мультимножини, до того ж $A = \{(u_1, k_1), (u_2, k_2), \ldots, (u_m, k_m)\}$, $B = \{(u_1, l_1), (u_2, l_2), \ldots, (u_m, l_m)\}$, тоді

$$A \cap B = \{(u_1, \min(k_1, l_1)), (u_2, \min(k_2, l_2)), \ldots, (u_m, \min(k_m, l_m))\},$$

$$A \cup B = \{(u_1, k_1 + l_1), (u_2, k_2 + l_2), \ldots, (u_m, k_m + l_m)\},$$

$$A - B = \{(u_1, k_1 - \min(k_1, l_1)), (u_2, k_2 - \min(k_2, l_2)), \ldots, (u_m, k_m - \min(k_m, l_m))\}.$$

У задачі 2 універсум — це $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$, а будь-яке натуральне число a_i — елемент системи A (мультимножина з простих чисел) дільників a_i: $a_i = p_1^{di1} \cdot p_2^{di2} \cdot \ldots \cdot p_n^{din}$.

Вочевидь, якщо $a = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot \ldots \cdot p_n^{dn}$, $b = p_1^{e1} \cdot p_2^{e2} \cdot \ldots \cdot p_n^{en}$, тоді

$$GCD(a, b) = p_1^{\min(d1, e1)} \cdot p_2^{\min(d2, e2)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(dn, en)},$$

тобто $GCD(a, b)$ — перетин мультимножин, які представлені числами a, b.

Зазначимо, що операція об'єднання мультимножин незастосовна до множин.

Розглянемо насамкінець задачу, ефективний алгоритм розв'язання якої вимагає побудови стандартного мультиплікативного базису [9].

ЗАДАЧА 3. МУЛЬТИПЛІКАТИВНІ СПІВВІДНОШЕННЯ В ЧИСЛОВІЙ СИСТЕМІ

Дано систему натуральних чисел $\overline{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Алгоритмічна проблема така: визначити, чи існує нетривіальне мультиплікативне співвідношення вигляду

$$a_1^{d_1} \cdot a_2^{d_2} \cdot \ldots \cdot a_m^{dm} = 1, \tag{1}$$

в якому степені $d_1, d_2, \ldots, d_m$ — цілі числа, не всі рівні нулю [9].

Розв'язання. Використовуючи систему $\overline{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, будуємо стандартний мультиплікативний базис $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$.

Розкладемо a_i за степенями базисних елементів:

$$a_1 = b_1^{d11} \cdot b_2^{d12} \cdot \ldots \cdot b_n^{d1n},$$

$$a_2 = b_1^{d21} \cdot b_2^{d22} \cdot \ldots \cdot b_n^{d2n},$$

$$\ldots$$

$$a_m = b_1^{dm1} \cdot b_2^{dm2} \cdot \ldots \cdot b_n^{dmn}.$$

Співвідношення (1) запишемо у вигляді

$$b_1^{\sum_{j=1}^{m} d_{j1} k_j} \cdot b_2^{\sum_{j=1}^{m} d_{j2} k_j} \cdot \ldots \cdot b_n^{\sum_{j=1}^{m} d_{jn} k_j} = 1.$$

З огляду на лінійну незалежність базисних елементів маємо

$$\begin{gathered} d_{11}k_1 + d_{21}k_2 + \ldots + d_{m1}k_m = 0, \\ d_{12}k_1 + d_{22}k_2 + \ldots + d_{m2}k_m = 0, \\ \ldots \\ d_{1n}k_1 + d_{2n}k_2 + \ldots + d_{mn}k_m = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Система (2) має нетривіальні розв'язки тоді і тільки тоді, коли система векторів

$$\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \ldots \\ d_{1n} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \\ \ldots \\ d_{2n} \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} d_{m1} \\ d_{m2} \\ \ldots \\ d_{mn} \end{bmatrix}$$

лінійно залежна. Алгоритмічна проблема зводиться до стандартної задачі лінійної алгебри. Зокрема, якщо $n < m$, співвідношення (1) має нетривіальний розв'язок.

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто декілька простих алгоритмічних задач, для розв'язання яких алгоритм поповнення є ефективним. З огляду на ізоморфізм алгебри множин та алгебри висловлювань ці задачі і результати можна перенести на алгебру висловлювань. Складнішою є задача про мультиплікативні співвідношення в числових системах. Однак вона легко зводиться до задачі теорії мультимножин і розв'язується алгоритмом поповнення.

Дійсно складною є задача побудови канонічних форм формул алгебри лінійних напівалгебраїчних множин. Застосування алгоритму поповнення до цієї задачі може привести до нових цікавих результатів.

Якщо зовсім спростити формулювання алгоритму поповнення, його можна описати так: якщо необхідно досліджувати вплив факторів A, B на результат C, тобто проаналізувати $A \vee B \to C$, потрібно розглянути три окремих несумісних варіанти: $AB \to C$, $\overline{A}B \to C$, $A\overline{B} \to C$.

Матеріали, викладені в цій роботі, дають змогу зробити висновок про те, що алгоритм поповнення стосовно задань конструктивних алгебр множин корисно долучити до курсів дискретної математики, алгоритмізації, комп'ютерної алгебри.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Buchberger B. Basic features and development of the critical-pair/completion procedure. International Conference on Rewriting Techniques and Applications. Springer, Berlin, Heidelberg. 1985. P. 1–45. https://doi.org/10.1007/3-540-15976-2_1.
2. Бухбергер Б. и другие. Компьютерная алгебра: Символьные и алгебраические вычисления. Под ред. Бухбергера Б., Коллинза Дж., Лооса Р. Москва: Мир, 1986. 392 с.
3. Buchberger B., Loos R. Algebraic simplification. *Computer algebra.* 1982. Vol. 4. P. 11–43. https://doi.org/10.1007/978-3-7091-3406-1_2.
4. Knuth D., Bendix, P. Simple word problems in universal algebras. *Automation of Reasoning*. 1983. P. 342–376. https://doi.org/10.1007/978-3-642-81955-1_23.
5. Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. Москва: Мир, 2000. 687 с.
6. Staples J. Church–Rosser theorems for replacement systems. *Algebra and Logic. Lecture Notes in Mathematics.* 1975. Vol. 450. P. 291–307. https://doi.org/10.1007/BFb0062861.
7. Book R., Otto F. String-rewriting systems. *Text and Monographs in Computer Science*. 1993. P. 35–64. https//doi.org/10.1007/978-1-4613-9771-7_3.
8. Winkler F. The Church–Rosser property in computer algebra and special theorem proving: an investigation of critical-pair/completion algorithms (Ph. D. thesis). *ACM SIGSAM Bulletin.* 1984. Vol. 18, N 3. P. 22–22. https://doi.org/10.1145/1089389.1089396.
9. Lvov M. Polynomial invariants for linear loops. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2010. Vol. 46, N 4. P. 660–668. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9242-x.
10. Lvov M., Peschanenko V., Letychevskyi O., Tarasich Y., and Baiev A. Algorithm and tools for constructing canonical forms of linear semi-algebraic formulas. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2018. Vol. 54, N 6. P. 993–1002. https://doi.org/10.1007/s10559-018-0102-4.
11. Lvov M., Peschanenko V., Letychevskyi O., Tarasich Y. The canonical forms of logical formulae over the data types and their using in programs verification. *CEUR-WS*. 2017. P. 536–554.
12. Lvov M. Algebraic approach to the problem of solving systems of linear inequalities. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2010. Vol. 46, N 2. P. 326–338. https://doi.org/10.1007/s10559-010-9210-5.

M. Lvov, Y. Tarasich

THE REPLENISHMENT ALGORITHM IN ALGEBRA OF SETS

Abstract. The algorithm, which, by analogy with the Buchberger and Knuth–Bendix algorithms, can be called the replenishment algorithm, is described. Specific implementations of the theoretical construction (abstract reduction system) in algebras of finite, numerical, linear semi-algebraic sets and in the algebra of multisets are described. The problem of elementary number theory, which can be interpreted as a problem of multiset algebra, is considered. The main purpose of this study is to draw attention to simple examples of application of the replenishment algorithm.

Keywords: replenishment algorithm, constructive algebras of sets, standard basis.

Надійшла до редакції 25.01.2021