УДК 004.827+519.87

Є.В. ІВОХІН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *ivohin@univ.kiev.ua.*

О.Ф. ВОЛОШИН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *olvoloshyn@ukr.net*.

М.Ф. МАХНО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *makhnom@gmail.com*.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ НА ОСНОВІ ДИФУЗІЙНИХ РІВНЯНЬ З НЕЧІТКИМ ОБЛІКОМ ЧАСУ

Анотація. Розглянуто підхід до формулювання та знаходження розв'язків скалярних рівнянь дифузії з урахуванням нечіткого сприйняття плину часу у процесах поширення фізичних речовин та інформаційних потоків. Опис нетрадиційного способу обліку течії часу ґрунтується на використанні нечітких структурованих числових множин, в основу чого покладено принцип формування нечіткого оригіналу з подальшою реплікацією його на числовій осі. Формалізація нечіткого оригіналу полягає у визначенні двох параметрично заданих на відрізку $[0, 1]$ функцій, що визначають темп суб'єктивного сприйняття одиниці часу. Запропоновано та проведено аналіз рівняння дифузії, що описує поширення інформації у соціальному середовищі. Отримано розв'язок, який визначає стан процесу розповсюдження з урахуванням «швидкого» та «повільного» плину часу. Запропонована методика надає змогу формалізувати задачу нечіткого опису та обліку суб'єктивного сприйняття відліку часу, розв'язуючи різні завдання динаміки.

Ключові слова: формалізація нечіткого обліку часу, дифузійні рівняння, моделі розповсюдження інформації.

ВСТУП

Поведінка людини та сприйняття нею часу суттєво залежать від емоційного стану. Емоції людини виконують роль локального критерію управління у вигляді деякої цільової функції, яка залежить від конкретних чинників впливу на емоції. Емоційний стан сприяє «запуску» суб'єктивної поведінки, що відповідає конкретній ситуації та впливає на облік важливих (наприклад, часових) факторів. Іншими словами, суб'єктивний стан людини впливає на сприйняття параметрів реальності, що потребує відповідної формалізації.

Одним з важливих ресурсів, розглядуваним у процесах за участю людини, є час. Тривалість проміжку часу можна визначити у вигляді інтервалів [1], точні межі яких залишаються невідомими до моменту настання конкретного стану динаміки процесу і можуть бути наближено описані з урахуванням особливостей плину часу. Вимірювання часових проміжків можна подати також у вигляді лінгвістичних термів, які визначають швидкість відліку часового ресурсу, наприклад, «швидке реагування», «звичайний часовий відлік» або «довге очікування». Відповідно, під час розв'язування задач, в яких виникає необхідність врахування вербальних термів для опису часового відліку, треба досліджувати вплив нерівномірності плину часу.

На сьогодні є декілька способів опису неточності та невизначеності в результатах процесів вимірювань та спостережень. В одному з них використовують основи загальної теорії нечітких множин, математичне обґрунтування якої стосовно побудови нечітких множин і відношень увів Л.А. Заде [2]. Запропоновані означення, операції над нечіткими множинами, відображення нечітких множин та їхні властивості надають змогу ефективно застосовувати їх у задачах опису систем, які функціонують з урахуванням невизначеності.

Слід зазначити, що фундаментальне припущення в теорії нечітких множин полягає у способі описування суб'єктивного сприйняття та оцінювання будь-якого об'єкта за тією інформацією, яка про нього є доступною. Водночас, ця інформація може бути недостатньою для того, щоб точно характеризувати розглядуваний об'єкт.

Подальший розвиток та застосування теорії нечітких множин дали можливість узагальнити рівні опису неточності (невизначеності) за допомогою нечітких множин довільного ступеня ієрархії. Одним з таких представлень є поняття нечіткої множини другого рівня, сформульоване Орловським С.А. [3], нечіткої множини типу 2 [4], а також добре відоме означення невизначених нечітких множин, запропоноване Питьєвим Ю.П. [5].

Потрібно відзначити, що останніми роками теорія нечітких множин перетворюється на детально вивчений інструмент з широким спектром задач практичного характеру, в яких формулюються та застосовуються такі нові терміни, як «нечітка величина» (вперше був сформульований Кофманом у [6]), «нечітке число» [7] або «складене або структуроване нечітке число» [8]. Важливим поштовхом у цьому процесі є можливість констуктивного опису різних понять, що за своєю сутністю містять численні нечіткості та невизначеності.

Цей підхід дає змогу послідовно застосовувати поняття теорії нечітких множин для формування нечітких аналогів відомих математичних понять, створювати необхідний формальний апарат для моделювання різних фізичних, економічних та інших процесів, а також процесів, пов'язаних з інформаційним розповсюдженням, впливом інформації на формування соціального світогляду та виникнення подій у сучасному суспільстві.

У статті запропоновано розглянути підхід до формулювання та знаходження розв'язків скалярних рівнянь дифузії з урахуванням нечіткого сприйняття плину часу у процесах поширення фізичних речовин та інформаційних потоків. Описування нетрадиційного способу обліку термінів часових інтервалів ґрунтується на використанні нечітких структурованих числових множин, в основу чого покладено принцип формування нечіткого оригіналу з подальшою реплікацією його на числовій осі.

Для моделювання процесів інформаційного поширення запропоновано застосувати дифузійне рівняння, яке описує динаміку в часі з урахуванням спостережень за швидкістю плину часу. Формалізацію суб'єктивного сприйняття часового обліку здійснено на основі нечіткого подання кожного одиничного інтервалу часу у вигляді нечіткого трикутного числа.

Отримано розв'язки однорідного та гібридного за просторовою змінною рівнянь дифузії, які надають змогу визначити стан процесу інформаційного розповсюдження в соціальному середовищі з урахуванням різних темпів плину часу.

НЕЧІТКІ МНОЖИНИ ТА ЧИСЛА ЯК СПОСІБ ФОРМАЛІЗАЦІЇ НЕЧІТКОГО ОБЛІКУ ЧАСУ

Означення 1 [3]. Нечіткою множиною $\widetilde{A}$ в універсальному просторі (множині) X називається сукупність пар вигляду $\{(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))\}$, де $x \in X$, а $\mu_{\widetilde{A}}(x) \colon X \to [0,1]$ — функція належності нечіткої множини $\widetilde{A}$.

Величина функції належності $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ для довільного елемента $x \in X$ визначає ступінь належності елемента x до нечіткої множини $\widetilde{A}$, а множину $\{x \in X : \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$ називають носієм нечіткої множини $\widetilde{A}$ і позначають $\operatorname{supp} \widetilde{A}$.

Нечіткі величини як частинний випадок нечітких множин можна визначити у різні способи. У загальному випадку, нечітка величина — це нечітка множина $\widetilde{A}$, яка задана на універсальній множині дісних чисел $X = R^1$. У прикладних задачах для збільшення конструктивності використовується поняття нечіткого числа, яке також ґрунтується на класичному означенні нечіткої множини. У цьому випадку нечітка множина $\widetilde{A}$ містить сукупність пар, складених з двох скалярних значень $x \in R^1$ та $\mu_{\widetilde{A}}(x)$, причому функція належності нечіткої множини $\widetilde{A}$ є унімодальною. У разі використання функцій належності заданого вигляду (трикутного, трапецієвидного та ін.) говорять про відповідні нечіткі числа. Широко відомим є означення трикутного нечіткого числа.

Означення 2 [9]. Нечітким трикутним числом $\widetilde{b}$ називають упорядковану трійку чисел $\widetilde{b} = \{(a, b, c)\}$, $a \le b \le c$, для якої визначено функцію належності $\mu_{\widetilde{b}}(x)$ вигляду

$$\mu_{\widetilde{b}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \; \mu_{\widetilde{b}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c]; \; \mu_{\widetilde{b}}(x) = 0, x \notin [a, c]. \quad (1)$$

Нечітке трикутне число вигляду (a, b, b), що називається лівим нечітким трикутним числом [9], визначається функцією належності вигляду

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x < a; \quad \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{x-a}{b-a}, x \in [a, b]; \; \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x > b, \quad (2)$$

а нечітке трикутне число вигляду (b, b, c), що називається правим нечітким трикутним числом — функцією належності такого вигляду:

$$\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1, x < b; \; \mu_{\widetilde{A}}(x) = \frac{c-x}{c-b}, x \in [b, c]; \; \mu_{\widetilde{A}}(x) = 0, x > c. \quad (3)$$

Для нечіткого числа $\widetilde{b}$ носієм $\operatorname{supp} \widetilde{b} = \{x \in X : \mu_{\widetilde{b}}(x) > 0\}$ є інтервал [2]. Водночас для нечіткого трикутного числа $\widetilde{b} = (a, b, c)$ носієм буде інтервал (a, c), для правого нечіткого трикутного — інтервал $[b, c)$, для лівого нечіткого трикутного — інтервал $(a, b]$.

У роботі [10] запропоновано означення нечітких числових структурованих множин на основі поняття нечіткого числового оригіналу.

Означення 3 [10]. Довільне нечітке трикутне число $\widetilde{E}(u, v)$, носієм якого є числовий інтервал (u, v), $u < v$, назвемо нечітким оригіналом.

Нечіткий оригінал $\widetilde{E}(u, v]$ називають лівим, якщо носій відповідного нечіткого числа задається інтервалом $(u, v]$, а нечіткий оригінал $\widetilde{E}[u, v)$ — правим, якщо носій задається інтервалом $[u, v)$.

Розгляд структурованих нечітких чисел, що утворюються з нечіткого оригіналу, дав можливість формалізувати опис невизначеності у вимірюванні відліку часу. Тривалість часових інтервалів, типово поданих у лінгвістичній формі, є відображенням оцінки суб'єктом відрізку часу з урахуванням емоційного впливу специфічних умов, пов'язаних з режимом спостереження часу. Відомо, що дефіцит часу, який виникає у ситуаціях оперативного прийняття рішень, швидкісного тестування, змагань з обмеженням часу, призводить до «прискорення» плину часу. Відповідно, за наявності надлишку часу та відсутності процесів, що його «споживають» (в умовах очікування подій, тривалої бездіяльності тощо), плин часу сповільнюється. Іншими словами, вимірювання відліку часу в різних ситуаціях визначається суб'єктивною оцінкою, яку можна описати нечіткою величиною трикутного вигляду.

Якщо припустити, що вимірювання часу здійснюється за допомогою інтервалів однієї тривалості (одиниць часу), спостереження за нечітким відліком часу можна інтуїтивно оцінювати проміжком, який залишається до завершення кожного інтервалу часу або перевищує його тривалість. У цьому випадку «швидкий» плин одиниці часу можна задати правим нечітким трикутним числом з носієм, довжина якого менше за тривалість часового інтервалу, а «повільний» — такого самого вигляду нечітким числом з носієм, довжина якого більша за тривалість інтервалу. Очевидно, що тоді, коли час «тече» природним чином, величина носія цього нечіткого числа за довжиною збігається з величиною одиничного часового інтервалу.

Отже, маючи зразок відліку вимірювання інтервалу часу у вигляді правого початкового оригіналу $\widetilde{E}[0, v)$, можна визначити нечітку *n*-кратну послідовну копію [10] на його основі, яка буде описувати зміни часу на заданому часовому проміжку.

Нехай $\widetilde{E}^Q[0, v_Q)$ — правий нечіткий оригінал у формі трикутного числа з лінійною спадною функцією належності, який визначає «швидкий» одиничний проміжок часу ($v_Q < 1$), а $\widetilde{E}^D[0, v_D)$ — аналогічний нечіткий оригінал, що визначає «повільний» одиничний проміжок ($v_D > 1$). Очевидно, що нечітка n_Q-кратна послідовна копія оригіналу $\widetilde{E}^Q[0, v_Q)$ вигляду $\widetilde{C}^Q = \bigcup\limits_{i_Q=1}^{n_Q} \widetilde{C}^Q_{i_Q}[s_{i_Q}, s_{i_Q+1})$ описує процес «швидкої» зміни часу на проміжку $[s_1, s_{n_Q+1})$, а нечітка n_D-кратна послідовна копія оригіналу $\widetilde{E}^D[0, v_D)$, яка формується у вигляді $\widetilde{C}^D = \bigcup\limits_{i_D=1}^{n_D} \widetilde{C}^D_{i_D}[s_{n_Q+i_D}, s_{n_Q+i_D+1})$, визначає «повільну» зміну часу на проміжку $[s_{n_Q+1}, s_{n_Q+n_D+1})$. Тут $\widetilde{C}^Q_{i_Q}[s_{i_Q}, s_{i_Q+1})$, $i_Q = \overline{1, n_Q}$, $\widetilde{C}^D_{i_D}[s_{n_Q+i_D}, s_{n_Q+i_D+1})$, $i_D = \overline{1, n_D}$, — копії правих нечітких оригіналів $\widetilde{E}^Q[0, v_Q)$ і $\widetilde{E}^D[0, v_D)$ відповідно з носіями, заданими числовими інтервалами заданої довжини v_Q і v_D. Тоді структурована нечітка числова множина вигляду $\widetilde{C}^Q \cup \widetilde{C}^D$ буде описувати відлік часу на проміжку $[s_1, s_{n_Q+n_D+1}]$. Цей відлік складається з двох фаз: фази швидкої зміни часу на проміжку $[s_1, s_{n_Q+1}]$ і повільної — на $[s_{n_Q+1}, s_{n_Q+n_D+1}]$. Очевидно, що, змінюючи характер відліку часу на проміжках та об'єднуючи отримані нечіткі копії, можна формувати нечітку числову множину, яка відображає нечіткість сприйняття темпів плину часу на довільному часовому проміжку. До того ж, отриману нечітку числову множину можна доповнити копією одиничного оригіналу $\widetilde{E}$, який визначає стандартний (природний) відлік часу.

Наведений спосіб формалізації використано у дослідженні розв'язків оптимізаційних задач, що виникають під час формування послідовності виконання сукупності завдань у межах заданого часового проміжку з урахуванням або без урахування додаткових обмежень на процес виконання та з урахуванням різних темпів відліку часу [8, 10].

ФОРМАЛІЗАЦІЯ СПОСОБУ ПОБУДОВИ ЧИСЛОВИХ ФУНКЦІЙ ВІД НЕЧІТКИХ АРГУМЕНТІВ

Для конструктивного використання розглянутого способу опису нечіткого сприйняття плину часу розглянемо альтернативний спосіб опису нечіткого числа.

Означення 4 [11]. Нечітким числом $\widetilde{b}$ називають впорядковану пару функцій $(u(r), v(r))$, $r \in [0,1]$, які задовольняють такі умови:

1) $u(r)$ — обмежена, неперервна зліва, неспадна функція на $[0,1]$;
2) $v(r)$ — обмежена, неперервна зліва, незростаюча функція на $[0,1]$; (4)
3) $u(r) \le v(r)$, $r \in [0,1]$, $u(1) = v(1) = b$.

Тут величина параметра $r \in [0,1]$ задає рівень міри належності, а значення $v(r) - u(r)$ визначає розмір множини рівня $r \in [0,1]$ нечіткого числа і позначається $\underline{b}_r = \{x \in X : \mu_{\widetilde{b}}(x) \ge r\}$.

Зрозуміло, що будь-яке чітке число a подається за цим означенням у вигляді впорядкованої пари функцій $(u(r), v(r))$, для яких виконується $u(r) = v(r) = a$, $r \in [0,1]$, а для довільних нечітких чисел $\widetilde{b} = (a, b, c)$ трикутного вигляду можна покласти, що функції $u(r)$ та $\upsilon(r)$, $r \in [0, 1]$, є лінійними, для яких справедливим є співвідношення $u(1) = \upsilon(1) = b$. За аналогією з лівими та правими трикутними нечіткими числами можна говорити про верхнє та нижнє трикутне подання нечіткого числа впорядкованими парами функцій відповідно. При цьому праві трикутні нечіткі числа $\widetilde{b} = (b, b, c)$ подають у вигляді пари функцій, для яких виконуються умови $u(r) = b \le \upsilon(r)$, $r \in [0, 1]$, $\upsilon(0) = c$, (верхнє трикутне подання), а ліві трикутні нечіткі числа $\widetilde{b} = (a, b, b)$ — у вигляді пари функцій, для яких є справедливими умови $u(r) \le \upsilon(r) = b$, $r \in [0, 1]$, $u(0) = a$ (нижнє трикутне подання). Використовувати поняття нечіткого трикутного числа за будь-яким означенням може бути зручно лише для узагальненого опису подій та фактів, які нечітко або неточно визначені. Важливим питанням є розгляд та формалізація побудови числових функцій (чітких або нечітких) від нечітких числових аргументів. Водночас потрібно зауважити, що типове трактування таких функцій є формалізованим і ґрунтується на загальному принципі узагальнення [3, 6].

Розглянемо спосіб задання та побудови множини значень чіткої числової функції від нечіткого скалярного аргументу з урахуванням уведених означень нечіткого числа. Традиційне поняття числової функції пов'язане з розглядом двох числових універсальних множин X і Y. Говорять, що на числовій множині X задано неперервну функцію $y = f(x)$ з областю визначення $D(f) \subset X$ і значеннями у числовій множині $E(f) \subset Y$, якщо в силу деякого закону f кожному елементу $x \in D(f)$ відповідає елемент $y \in E(f)$. Функція $f(x)$ визначає відображення $f: X \to Y$ множини X у множину Y. Водночас значення $f(x) \in Y$, якого функція набуває на елементі $x \in X$, називають образом елемента $x \in X$, а значення $f^{-1}(y) \in X$ — прообразом елемента $y \in Y$. Аналогічно, множину $f(A) = B \subset Y$ елементів з Y, які є образами елементів множини $A \subset X$ у випадку чіткого відображення $f: X \to Y$, називають образом множини A, а множину $f^{-1}(B) \subset X$ — прообразом множини $B = f(A)$.

У випадку нечіткої числової множини $\widetilde{A}$ процедура побудови нечіткої множини образів заданої чіткої неперервної функції $f(\widetilde{A})$ за суттю є способом визначення функції належності $\mu_{f(\widetilde{A})}(y): Y \to [0, 1]$, де нечітка множина $\widetilde{A}$ задана на універсальній числовій множині X. Область визначення функції $D(f)$ можна задати як довільну множину, яка, вочевидь, є підмножиною універсальної множини X і може повністю містити носій множини $\widetilde{A}$, $\operatorname{supp} \widetilde{A}$, або бути його частиною. Водночас функція належності нечіткої множини $f(\widetilde{A})$ визначається зі співвідношення

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_{\widetilde{A}}(x), \tag{5}$$

де $y = f(x) \in Y$, а величина $\sup\limits_{x \in f^{-1}(y)}$ обчислюється за всіма прообразами елемента y.

У випадку, коли неперервна функція $y = f(x)$, є строго монотонною на області свого визначення, а нечітка числова множина $\widetilde{A}$ подається у вигляді нечіткого числа, то для функції належності нечіткої множини образів, отриманих за допомогою чіткої функції $f(\widetilde{A})$, будемо мати

$$\mu_{f(\widetilde{A})}(y) = \mu_{\widetilde{A}}(x) \text{ для всіх } x \in \operatorname{supp} \widetilde{A},\ y \in \operatorname{supp} f(\widetilde{A}):\ y = f(x).$$

Дійсно, якщо покласти (від супротивного), що для деякого значення $y \in Y$ існує два прообрази $x_1, x_2 \in D(f)$: $y = f(x_1)$, $y = f(x_2)$, то отримуємо протиріччя з припущенням щодо строгої монотонності заданої неперервної функції $y = f(x)$. Іншими словами, у випадку відображення нечіткого скалярного аргументу $(x, \mu_{\widetilde{A}}(x))$ у нечітке значення $(y, \mu_{f(\widetilde{A})}(y))$, $y = f(x)$, чітка строго монотонна неперервна функція $f(x)$ з областю визначення, яка є частиною носія нечіткого числа $\widetilde{A}$ або повністю містить цей носій, зберігає величину ступеня належності елементів $x \in \operatorname{supp} \widetilde{A}$.

Припустимо, що функція $f(x)$ є строго зростаючою, а область визначення функції подано правими трикутними нечіткими числами. Використовуючи означення 4, кожне нечітке число $\widetilde{b} = (b, b, c)$ описуємо парою функцій $u(r)$ та $v(r)$, $r \in [0, 1]$, $u(r) = b \leq v(r)$, $r \in [0, 1]$, $v(0) = c$. Тоді справедливим буде подання нечіткого образу $f(\widetilde{b})$ нечіткого аргументу $\widetilde{b}$ у вигляді пари функцій $(U(r), V(r))$, $r \in [0, 1]$, де $U(r) = f(u(r))$ та $V(r) = f(v(r))$, $U(r) = f(b) = B \leq V(r)$, $r \in [0, 1]$, $V(0) = f(c)$, $V(1) = B$. Отже, маємо верхнє трикутне подання нечіткого образу, визначеного на відрізку $r \in [0, 1]$.

На основі запропонованої формалізації нечіткого плину часу із застосуванням правих нечітких трикутних чисел з лінійною функцією належності скористаємось отриманим поданням для опису конструктивного способу формування множини образу нечіткого числа у моделях, стани в яких залежать від часу.

ДИФУЗІЙНЕ РІВНЯННЯ З НЕЧІТКИМ ВИМІРЮВАННЯМ ЧАСУ

Однією з класичних моделей, які використовують для формалізації динаміки процесів у часі, є математична модель дифузійного розповсюдження речовин або тепла в заданих межах деякої іншої субстанції або геометрично визначених розмірів тіла. Ці моделі записують у вигляді дифузійного рівняння (або рівняння теплопровідності), яке розглядають на заданому часовому інтервалі $t \in [0, T]$ з урахуванням граничних та початкових умов.

Розглянемо для прикладу рівняння дифузії, яке задається однорідним скалярним рівнянням [12] вигляду

$$\frac{\partial w(x, t)}{\partial \tau} = -k(t) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \tag{6}$$

з початковою умовою $w(x, 0) = g(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, та крайовими умовами $w_x(0, t) = w_0 \geq 0$, $w_x(1, t) = w_1 \geq 0$, $t \in [0, T]$, де $k(t)$, $k(t) > 0$, — коефіцієнт дифузії, $g(x)$ — задана початкова функція.

Якісна залежність рівня розповсюдження від температури є зрозумілою з фізичних міркувань. Після початкового перехідного періоду очікується зростання рівня у часі для кожної точки простору. Отже, розв’язок цього рівняння у вигляді функції $w = w(x, t)$ надає змогу отримати числовий показник рівня концентрації у довільній точці (x, t) просторово-часової площини з центром у точці (0, 0).

Виходячи із загальної теорії другого закону Фіка [13] та враховуючи ефект сорбції, вважаємо, що коефіцієнт дифузії є спадною функцією у часі, а сам часовий інтервал $[0, T]$ складається із заданої кількості одиниць часу, що дає можливість досліджувати динаміку процесу дифузії в умовах звичайного ритму вимірювання часу.

З урахуванням цих припущень розв’язок рівняння (6) будемо шукати у вигляді

$$w(x, t) = w(x) + af(t), \tag{7}$$

де $f(t)$ — задана зростаюча функція, $f(t) \geq 0$, $t \in [0, T]$, $f(0) = 0$, похідна від якої $f'(t)$ є спадною функцією, $a > 0$ — деяка константа, а невідома функція $w(x)$ з урахуванням зростання концентрації речовини, що розповсюджується, записується у вигляді

$$w(x) = \int_0^x R(s) ds, \tag{8}$$

з шуканою функцією $R(s)$, $s \in [0, 1]$.

За наведених вище умов дифузійне рівняння (6) зводиться до вигляду

$$af'(t) = -k(t) R'(x) \tag{9}$$

з початковою умовою $w(x) = g(x) \geq 0$, $0 \leq x \leq 1$, та крайовими умовами $R(0) = w_0 \geq 0$, $R(1) = w_1 \geq 0$, $t \in [0, T]$.

Для дослідження впливу динаміки плину часу на розв'язок рівняння (6) з урахуванням сформульованих припущень будемо вважати, що на кожному одиничному часовому інтервалі облік сприйняття часу може бути прискорений або уповільнений внаслідок впливу деяких зовнішніх дій або обставин.

ПОШУК РОЗВ'ЯЗКУ ДИФУЗІЙНОГО РІВНЯННЯ З УРАХУВАННЯМ НЕЧІТКОГО ПЛИНУ ЧАСУ

Припустимо, що динаміку дифузійного процесу в часі можна формалізувати з урахуванням спостережень за швидкістю плину часу. Подамо невизначеність у сприйнятті часового обліку на основі нечіткого представлення кожного інтервалу часу у вигляді верхнього трикутного нечіткого числа, заданого впорядкованою парою лінійних функцій $(u(r), v(r))$, $r \in [0, 1]$.

Зрозуміло, що нечітке подання тривалості часового проміжку залежатиме лише від вигляду функції $v(r)$, $r \in [0, 1]$. Для довільного значення тривалості одиниці часу Δt і будь-якого моменту $t \in [0, T]$ будемо вважати, що $u(r) = t$, $v(r) = t + p(1 - r)$, $p \geq 0$, $r \in [0, 1]$. Тоді для $p > \Delta t$ маємо сповільнений плин одиничного часового проміжку, для $p = \Delta t$ — природний темп плину часу, а для $p < \Delta t$ — його прискорене сприйняття. Отже, враховуючи сформульовані умови спадання функції коефіцієнта дифузії $k(t)$ та зростання функції $f(t)$ у розв'язку (7), можна отримати розв'язок, який визначає стан процесу розповсюдження на основі дифузійного рівняння з урахуванням «швидкого» та «повільного» плину часу.

Перепишемо рівняння (9) у вигляді

$$R'(x) = -af'(t) / k(t).$$

Розв'язуючи це рівняння, отримуємо нечіткий розв'язок $w(x, t)$ вигляду (7), що визначається як чітка функція від нечітких чисел, за допомогою яких формалізується нечітке подання незалежної змінної t на кожному одиничному часовому інтервалі.

З іншого боку, розв'язок має бути чіткою функцією за просторовою змінною x. Для забезпечення цієї умови можна припустити, що коефіцієнт дифузії є пропорційним $f'(t)$, тобто $k(t) = \mu f'(t)$, $\mu > 0$.

У результаті маємо звичайне диференціальне рівняння

$$R'(x) = -a / \mu, \tag{10}$$

а крайові умови набувають вигляду $w_0 = R(0) = a / \mu$, $w_1 = R(1) = 0$.

Інтегруючи, отримуємо розв'язок диференційного рівняння (10) у вигляді $R(x) = \frac{a}{\mu}(1 - x)$, який відповідає граничним умовам. Тоді функція $w(x)$ має вигляд

$$w(x) = \frac{ax}{2\mu}(2 - x), \ 0 \leq x \leq 1. \tag{11}$$

Отже, остаточно маємо нечіткий за часом розв'язок (7) дифузійного рівняння (6) з чітко визначеною функцією $w(x)$ вигляду (11) та зростаючою чіткою функцію нечіткого аргументу $f(t)$. У разі виконання наведених вище початкових та крайових умов цей розв'язок дає змогу описати рівень дифузійного розповсюдження в межах інтервалу визначення просторової змінної в кожний поточний момент часу t, $t \in [0, T]$. Для моделювання динаміки дифузійного процесу з урахуванням швидкості плину часу можна побудувати множини рівня отриманого нечіткого розв'язку на часовому проміжку $[t, t + \Delta t]$ у довільній точці $0 \leq x \leq 1$ з використанням параметра $r \in [0, 1]$:

$$\overline{w}_r(x, t) = \frac{ax}{2\mu}(2 - x) + af(t + p(1 - r)). \tag{12}$$

Функція $\upsilon(r) = t + p(1-r)$, $r \in [0,1]$, із заданим p дає змогу обчислювати плин часу в межах проміжку Δt, забезпечуючи формалізацію нечіткого сприйняття тривалості одиниці часу. Тоді, за умови «швидкого» плину часу, в динаміці дифузійного процесу накопичується невикористаний залишок часу із заданого інтервалу $[0, T]$ і навпаки, у разі його «повільного» темпу часовий інтервал моделювання процесу дифузії завершується до фактичного досягнення величини T. За наявності невикористаного часового залишку тривалість процесу дифузії буде продовжена до кінця інтервалу спостереження, а у випадку дефіциту часу на проміжку $[0, T]$ дифузійний процес завершується достроково.

Слід зауважити, що, виходячи з дифузійного характеру процесів поширення інформації, запропонованою математичною моделлю проникнення (дифузії) вигляду (6) можна скористатися для здійснення аналізу та моделювання зміни рівня інформаційного розповсюдження та впливу в цільових соціальних групах. У роботах [14, 15] наведено приклади використання цієї моделі без взяття до уваги нечіткого сприйняття часового відліку. Особливістю зазначених моделей є також спосіб урахування динаміки кількісного складу соціальних груп, що зумовлює розгляд гібридних дифузійних рівнянь.

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГІБРИДНОГО ДИФУЗІЙНОГО РІВНЯННЯ З НЕЧІТКИМ ОБЛІКОМ ЧАСУ

Зрозуміло, що для дослідження та реалізації математичних моделей розповсюдження інформаційних потоків можна розглядати різні варіанти дифузійних рівнянь, які визначають вплив інформації на цільові соціальні групи з урахуванням часу та їхнього обсягу. Серед основних способів формалізації інформаційних процесів у літературі часто розглядають однорідні та неоднорідні гібридні моделі дифузії [16]. У гібридних моделях додатково застосовують опис динаміки кількісного складу цільових груп, в яких проводять спостереження за рівнем поширення інформації. Для їхнього розроблення та реалізації можна використати, наприклад, механістичні аналоги математичних моделей динаміки медико-біологічних, хімічних та інфекційних процесів.

Будемо моделювати зміну рівня (концентрації) інформації в соціальній групі за допомогою рівняння дифузії (6), припускаючи, що цей процес є аналогічним поширенню деякого епідеміологічного захворювання.

У межах цього підходу розглядають склад цільової групи, який формується з 3-х підгруп з огляду на їхнє сприйняття інформації. Виділяють частку членів групи, сприйнятливих до впливу інформації $y_1(t)$, частку тих осіб, що вже перебувають під впливом інформації $y_2(t)$, і частку байдужих до інформаційного впливу $y_3(t)$. Тоді за допомогою моделі Бейлі [17] поширення захворювань вигляду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= -y_1(t)\,y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t)\,y_2(t) - y_2(t), \\ \dot{y}_3(t) &= y_2(t) \end{aligned} \tag{13}$$

з початковими умовами $y_1(0) = \alpha_1$; $y_2(0) = \alpha_2$; $y_3(0) = \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, можна отримати розв'язки, які визначають динаміку обсягів окремих підгруп.

Якщо вважати, що спостереження за зміною чисельності підгруп здійснюють без урахування швидкості плину часу, то максимальне граничне значення частки складу групи, яка відчуває вплив інформації, x_Γ, $0 \le x_\Gamma(t) \le 1$, буде змінюватися у часі, тобто маємо $0 \le x \le x_\Gamma(t)$, $x_\Gamma(t) = y_1(t) + y_2(t)$ де $y_1(t)$, $y_2(t)$ — компоненти розв'язку системи (13).

Моделюючи динаміку процесу розповсюдження інформації у групі за допомогою рівняння дифузії (6) з урахуванням темпів плину часу, отримаємо нечіткий розв'язок рівняння з параметрично заданими множинами рівня у вигляді (12), в якому додатково накладено умову на діапазон зміни просторової змінної $0 \le x \le x_\Gamma(t)$. Отже, у кожен поточний момент часу t, $t \in [0, T]$, отримуємо можливість обчислити рівень інформаційного розповсюдження за умови обмеженості інтервалу визначення просторової змінної з урахуванням швидкості плину часу.

ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПОШИРЕННЯ ІНФОРМАЦІЇ

Чисельні розрахунки рівня розповсюдження інформації на основі розв'язків дифузійних рівнянь (6) з нечітким обліком часу виконано для різних параметрів моделі.

Як функцію $f(t) \ge 0$ розглянуто степеневу функцію $f(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $t \in [0, 1]$, для якої є справедливими всі вимоги щодо її поведінки та поведінки її похідної. У цьому випадку матимемо $f'(t) = \alpha t^{\alpha - 1}$, а коефіцієнт дифузії задамо у вигляді $k(t) = t^{\alpha - 1}$, звідки $\mu = \alpha$. Для визначеності покладемо $\alpha = 0.5$, а як одиничний часовий інтервал будемо розглядати значення $\Delta t = 0.1$. Результати отриманих чисельних розрахунків чіткого розв'язку рівняння дифузії (6) наведено на рис. 1 і 2.

Зрозуміло, що розв'язки збігаються. Підтвердженням цього є графічні представлення. У разі врахування темпів плину часу отримано нечіткі розв'язки. Графіки динаміки дифузійних процесів для множини рівня $\overline{w}_1(x, t)$ наведено на рис. 3 і 4. Реальна тривалість одиниці часу Δt у першому випадку перевищує максимальний розмір множини рівня (вважається, що відповідне значення не змінюється до початку наступного моменту), а у другому випадку вона навпаки є меншою за максимальний розмір множини рівня. Як наслідок, реальний проміжок часу завершується для значення $r \approx 0.7$.

На графіках спостерігається суттєва особливість розв'язків з урахуванням швидкості плину часу. На рис. 3 є характерний стрибок, пов'язаний з очікуванням наступного моменту часу, на рис. 4 є злом, характерний для переходу на наступний момент часу до завершення повної множини рівня $r = 1$ для нечітко визначеного сприйняття часу у вигляді правого нечіткого трикутного числа.

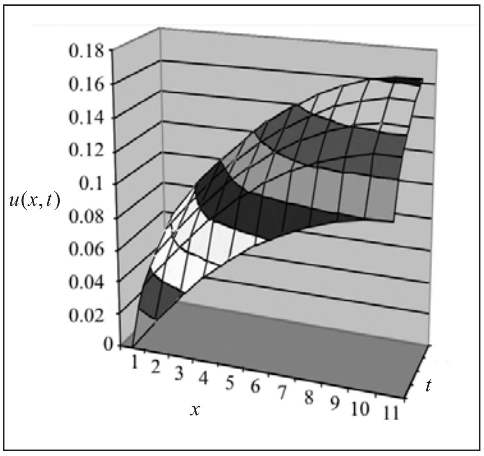

Рис. 1. Поведінка чіткого розв'язку рівняння дифузії (6) для $p = 0.05$

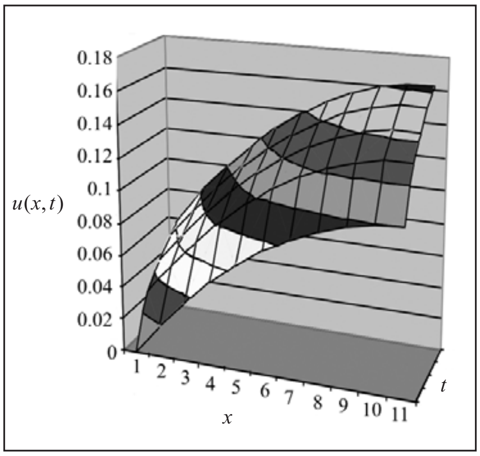

Рис. 2. Поведінка чіткого розв'язку рівняння дифузії (6) для $p = 0.15$

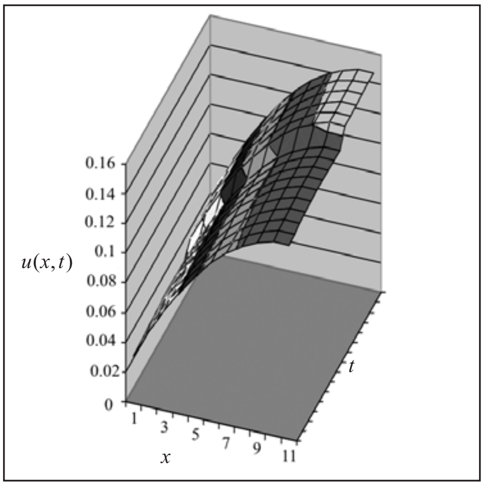

Рис.3. Графічне подання нечіткого розв'язку для рівняння дифузії (6) на прикладі множини рівня $\overline{w}_1(x, t)$ для $p = 0.05$

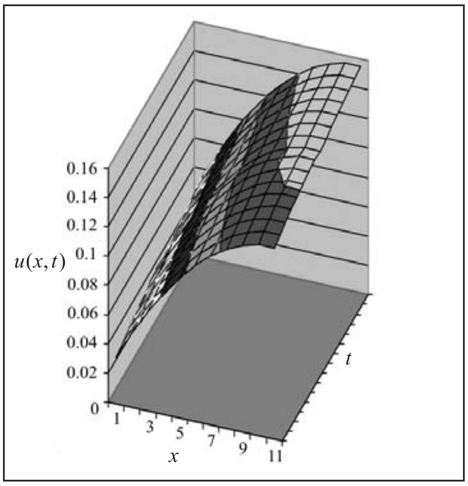

Рис.4. Графічне подання нечіткого розв'язку для рівняння дифузії (6) на прикладі множини рівня $\overline{w}_1(x, t)$ для $p = 0.15$

ВИСНОВКИ

У статті розглянуто підхід до формулювання та знаходження розв'язків скалярних однорідних дифузійних рівнянь з урахуванням суб'єктивного сприйняття плину часу у процесах поширення фізичних речовин та поширення інформаційних потоків. Формалізацію нерівномірності часового обліку здійснено на основі нечіткого подання кожного одиничного інтервалу часу у вигляді нечіткого трикутного числа. Цей підхід ґрунтується на використанні спеціальних нечітких структурованих числових множин згідно з принципом формування нечіткого оригіналу з подальшою його реплікацією на числовій осі.

Для моделювання процесів інформаційного поширення використано скалярне дифузійне рівняння, яке описує динаміку станів довільного процесу у часі з урахуванням спостережень за швидкістю плину часу. Розроблений підхід застосовано до дослідження процесів поширення інформації у соціальному середовищі. Розглянуто гібридну за просторовою змінною модель однорідного дифузійного рівняння з урахуванням різних темпів плину часу.

Проведено чисельні експерименти, в межах яких отримано розв'язки дифузійних рівнянь без урахування та з урахуванням нерівномірності часового плину. Виконано їхній аналіз, який підтвердив необхідність урахування впливу нечіткого сприйняття часового обліку під час дослідження динаміки процесів у часі. У наведених чисельних розрахунках продемонстровано цікаві ефекти моделювання процесів інформаційного розповсюдження в соціальному середовищі з урахуванням різних темпів плину часу.

Зрозуміло, що запропонований підхід потребує порівняння з іншими способами та методами врахування нерівномірності обліку часу. На жаль, нині немає альтернатив, які б надали змогу здійснити це порівняння. Автори вважають, що запропонований підхід є новаторським та конструктивним та потребує поглиблення. Запропоновану методику побудови нечіткого трикутного числа, що дає можливість описати зміни темпів плину часу, надалі можна використовувати для дослідження динаміки математичних моделей у задачах ефективного оцінювання впливу нечіткого подання часового ресурсу на поведінку різних фізичних та соціальних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Разин В.В., Тузовский А.Ф. Представление знаний о времени с учётом неопределённости в онтологиях Semantic Web. *Управление, вычислительная техника и информатика. Доклады ТУСУРа*. 2013. № 2 (28). С. 157–162.

2. Заде Л.А. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. Москва: Мир, 1976. 175 с.
3. Орловский С.А. Проблемы принятия решения при нечеткой исходной информации. Москва: Наука, 1981. 206 с.
4. Mashchenko S.O. A mathematical programming problem with the fuzzy set of indices of constraints. *Cybernetics and systems analysis*. 2013. Vol. 49, N. 1. P. 62–68. https://doi.org/10.1007/s10559-013-9485-4.
5. Пытьев Ю.П. Возможность. Элементы теории и применения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000. 128 с.
6. Кофман А. Введение в теорию нечетких множеств. Москва: Радио и связь, 1982. 432 с.
7. Nahmias S. Fuzzy variables. *Fuzzy Sets and Systems*. 1978. Vol. 1, N 2. P. 97–110.
8. Ivokhin E.V., Makhno M.F. On an approach to construction of structured fuzzy sets and their application for description of fuzzy time response. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. Vol. 49, Iss. 10. P. 55–63. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v49.i10.60.
9. Jana B., Roy T.K. Multi-objective fuzzy linear programming and its application in transportation model. *Tamsui Oxford Journal of Mathematics Sciences*. 2005. Vol. 21, N 2. P. 243–268.
10. Івохін Є.В. Формалізація процесів впливу нечіткого опису відліку часу на розв'язки задач розподілу часового ресурсу. *Кібернетика та системний аналіз*. 2021. Т. 57, № 3. С. 30–41. https://doi.org/10.1007/s10559-021-00361-x.
11. Sadeghi A., Ismail A.I.M., Ahmad A., Abbasnejad E. A note on solving the fuzzy Sylvester matrix equation. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 2013. Vol.15, N 1. P. 10–22.
12. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 1969. 288 с.
13. Бондарев Б.В., Калашников Н.П., Спирин Г.Г. Курс общей физики. В 3-х кн. Книга 3. Термодинамика, статистическая физика, строение вещества. Москва: Юрайт, 2015. 369 с.
14. Ivokhin E.V., Naumenko Yu.A. On formalization of information dissemination processes based on hybrid diffusion models. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2018. Vol. 50, Iss. 7. P. 79–86. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v50.i7.70.
15. Ivokhin E.V., Adzhubey L.T., Gavrylenko O.V. On the formalization of dynamics in information processes on the basis of lnhomogeneous one-dimensional diffusion models. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol.51, Iss.2. P. 22–29. https://doi.org/10.1615/jautomatinfscien.v51.i2.30.
16. Brauer F., Kribs C. Dynamical systems for biological modeling. London; New York: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2016. 478 p.
17. Хайрер Е., Нерсет С., Ванер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Москва: Мир, 1990.512 с.

E.V. Ivohin, O.F. Voloshyn, M.F. Makhno

SIMULATION OF INFORMATION DISSEMINATION PROCESSES BASED ON DIFFUSION EQUATIONS WITH FUZZY TIME ACCOUNTING

Abstract. The paper considers an approach to formulating and finding solutions to scalar diffusion equations taking into account the fuzzy perception of the flow of time in the processes of propagation of physical substances and information flows. The description of an unconventional method of accounting for the passage of time is based on the use of fuzzy structured numerical sets, which is based on the principle of forming a fuzzy original with its subsequent replication on the numerical axis. Formalization of the fuzzy original is to define two functions, parametrically set on [0, 1], that determine the rate of subjective perception of a unit of time. The diffusion equation describing the dissemination of information in the social environment is proposed and analyzed. A solution was obtained that determines the state of the propagation process taking into account the "fast" and "slow" flows of time. The proposed methodology allows one to formalize the tasks of fuzzy description and taking into account the subjective perception of time counting when solving various problems of dynamics.

Keywords: fuzzy time formalization, diffusion equations, information dissemination models.

Надійшла до редакції 29.01.2021