УДК 519.6

В.А. СТОЯН
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *a_stoyan@ukr.net*.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ПРОСТОРОВО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ. II. ВИПАДОК НЕПЕРЕРВНО ВИЗНАЧЕНИХ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВИХ ЗОВНІШНЬОДИНАМІЧНИХ ЗБУРЕНЬ[1]

Анотація. Виконано дослідження двох класів нелінійних просторово розподілених динамічних систем, неперервно спостережуваних за гранично-початковими та просторово розподіленими зовнішньодинамічними збуреннями. Для кожної з них побудовано аналітичні залежності функції стану, яка за середньоквадратичним критерієм узгоджується з наявною інформацією про зовнішньодинамічні умови їхнього функціонування. Розв'язок початково-крайових задач для розглядуваних систем визначається через множини векторів, які за середньоквадратичним критерієм моделюють заданий початково-крайовий стан разом з просторово розподіленими зовнішньодинамічними збуреннями. Наведено умови точності і однозначності отриманих математичних результатів. Розглянуто випадки необмежених просторових областей та усталеної динаміки систем.

Ключові слова: псевдорозв'язки, математичне моделювання динамічних систем, просторово розподілені динамічні системи, системи з невизначеностями, некоректні початково-крайові задачі.

ВСТУП

Стаття продовжує наукові дослідження автора з математичного моделювання некоректно сформульованих початково-крайових задач математичної фізики для деяких класів нелінійних просторово розподілених динамічних систем, виконаних ним в роботі [1]. Як і в [1], предметом дослідження є процеси і явища з квадратично нелінійною математичною моделлю їхнього функціонування та обмеженою кількістю гранично-початкових спостережень за ними. Якщо в [1] диференціально визначені математичні моделі динаміки таких процесів і явищ вивчалися за дискретно заданої інформації щодо наявних зовнішньодинамічних збурень, то в цій публікації початково-крайові спостереження за ними визначаються неперервно в області їхнього функціонування. Задачі побудови функції стану таких систем є складними [2, 3] внаслідок їхньої некоректності і не завжди розв'язними методами аналітичної та обчислювальної математики.

Викладені в цій роботі наукові дослідження ґрунтуються на запропонованій в [4, 5] методиці математичного моделювання наявних початково-крайових спостережень за системою незалежно від кількості та якості останніх. Буде побудовано та досліджено на середньоквадратичну точність та однозначність множини моделювальних факторів. Їх буде застосовано до дослідження функцій стану системи. Це стало можливим після виконаного в [6, 7] переходу (за середньоквадратичним критерієм) від диференціально заданої математичної моделі системи до її інтегрального еквіваленту та з використанням запропонованих в [8] методів псевдообернення лінійних алгебраїчних, інтегральних і функціональних розв'язувальних рівнянь відносно зовнішньо визначених моделювальних факторів.

Отримані в роботі розв'язки (якщо вони існують) або середньоквадратичні наближення до розв'язків розглядуваних початково-крайових задач динаміки квадратично нелінійних просторово розподілених систем, неповно спостережуваних за неперервно визначеними зовнішньодинамічними збуреннями,

---
[1]Початок див. в № 5, 2021.

в поєднанні з результатами досліджень таких систем під час дискретно визначених спостережень за ними [1], незважаючи на складність проблеми, виявилися простими і доступними для практичної реалізації у дослідженнях нелінійно уточнених моделей класично відомих просторово розподілених динамічних систем [9, 10]. Вартують уваги визначені в роботі особливості використання отриманих розв'язків у необмежених просторових областях та для усталених режимів функціонування системи.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ІДЕЙНІ ПРИНЦИПИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ФУНКЦІЇ СТАНУ СИСТЕМИ

Продовжимо розпочаті в [1] дослідження розподіленого в просторово-часовій області

$$S_0^T = \{s = (x, t) : x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in S_0, \, t \in [0, T]\}$$

динамічного (t — часова координата) процесу, функція $y(s)$ стану якого визначається одним із двох рівнянь вигляду

$$\sum_{k=0}^{n} (L_k(\partial_s) y(s)) \partial_s^{n-k} y(s) = u(s), \tag{1}$$

$$L(\partial_s) + \sum_{k=0}^{n} (L_k(\partial_s) y(s)) \partial_s^{n-k} y(s) = u(s). \tag{2}$$

Тут $u(s)$ — просторово розподілене зовнішньодинамічне збурення, $\partial_s = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \ldots, \partial_{x_N})$, а $L(\partial_s)$, $L_k(\partial_s)$ $(k = \overline{0, n})$ — лінійні диференціальні оператори. На відміну від розглянутого в [1] припускатимемо, що на контурі Γ просторової області S_0 та для $t = 0$ мають місце такі неперервно визначені початково-крайові спостереження:

$$L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} = Y_r^0(x) \quad (x \in S_0, \, r = \overline{1, R_0}), \tag{3}$$

$$L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) \Big|_{x = x^\Gamma \in \Gamma} = Y_\rho^\Gamma(x^\Gamma, t) \quad (t \in [0, T], \, \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \tag{4}$$

Так само, як у випадку дослідження лінійних [4, 5] та нелінійних [6, 7] динамічних систем, вимагатимемо, щоб

$$\sum_{r=1}^{R_0} \int_{S_0} \left(L_r^0(\partial_t) y(s) \Big|_{t=0} - Y_r^0(x) \right)^2 dx + \sum_{\rho=1}^{R_\Gamma} \int_{\Gamma \times [0, T]} (L_\rho^\Gamma(\partial_x) y(s) - Y_\rho^\Gamma(x, t))^2 \, dx dt \to \min_{y(s)}. \tag{5}$$

Як і вище, функцію $y(s)$ стану систем (1), (3), (4) та (2)–(4) подамо у вигляді суми

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s) + y_\Gamma(s), \tag{6}$$

складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ якої визначають вплив просторово-часових збурень $u(s)$, початкових та крайових умов (3) та (4) відповідно. Будемо виходити з того, що отримані в [4, 5] розв'язки рівнянь (1) та (2) дають змогу записати функціональні залежності $y_\infty(s)$ цих двох систем у випадку, коли функція $u(s)$ розподілених зовнішньодинамічних збурень визначена вектором $\vec{u} = \mathrm{col}((u(s'_m), s'_m \in S_0^T), m = \overline{1, M})$ її значень. Як і в [4, 5], ці залежності для системи (1) запишемо співвідношеннями:

$$y_\infty(s) = a(s)\alpha \, / \, b\beta, \tag{7}$$

$$\alpha = \mathrm{col}((\widetilde{P}^{+}_{(m)}\vec{u})^{3/2},\ m = \overline{1, M}),$$

$$\beta = \mathrm{col}(\widetilde{P}^{+}_{(m)}\vec{u},\ m = \overline{1, M}),$$

$$a^{\mathrm{T}}(s) = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{n} P^{+}_{i(m)} \overline{G}_i(s) \sqrt{P^{+}_{n-i(m)} \partial^{i}_{s} \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m}},\ m = \overline{1, M} \right),$$

$$b^{\mathrm{T}} = \mathrm{col}\left(\sum_{i=0}^{n} P^{+}_{n-i(m)} \partial^{i}_{s} \overline{G}_{n-i}(s)\Big|_{s=s'_m},\ m = \overline{1, M} \right).$$

Зауважимо, що тут і далі $P^{+}_{k(m)}$, $\widetilde{P}^{+}_{m}$ — відповдно m-рядок та m-стовпець матриць, псевдообернених до матриць:

$$P_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_k(s)\overline{G}^{\mathrm{T}}_k(s)ds,\ \widetilde{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}(s)\widetilde{G}^{\mathrm{T}}(s)ds, \tag{8}$$

в яких

$$A_k(s) = a_k \int_{-\infty}^{+\infty} G_k(s - s')ds',$$

$$\widetilde{G}(s) = \mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^{+}_{k(m)}\overline{G}_k(s),\ k = \overline{0, n}),\ m = \overline{1, M}), \tag{9}$$

$$\overline{G}^{\mathrm{T}}_k(s) = \mathrm{str}(G_k(s - s'_m),\ m = \overline{1, M}) \tag{10}$$

для

$$L(\partial_s) = a_0\partial^{n}_{s} + a_1\partial^{n-1}_{s} + \ldots + a_n,$$

$$G_k(s - s') = \frac{1}{2\pi^{N+1}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{L_k(i\lambda)} e^{i\lambda^{\mathrm{T}}(s-s')} d\lambda$$

та (i — уявна одиниця)

$$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N, \mu)^{\mathrm{T}},\ d\lambda = d\lambda_1 \ldots d\lambda_N d\mu,$$

$$\lambda(s - s') = \sum_{k=1}^{N} \lambda_{\kappa}(x_k - x'_k) + \mu(t - t').$$

Для системи (2)

$$y_{\infty}(s) = \frac{a(s)\alpha(\vec{u})}{b\alpha(\vec{u})}, \tag{11}$$

де на відміну від (7)

$$\alpha(\vec{u}) = \mathrm{col}(((y_{km}(\vec{u})\widetilde{P}^{+}_{(m)}\vec{u},\ y^{2}_{km}(\vec{u})),\ k = \overline{0, n}),\ m = \overline{1, M}),$$

$$a^{\mathrm{T}}(s) = \mathrm{col}(((P^{+}_{k(m)}\overline{G}_k(s), -A_k(s)),\ k = \overline{0, n}),\ m = \overline{1, M}),$$

$$b^{\mathrm{T}} = (((0,1),\ k = \overline{0, n}),\ m = \overline{1, M}).$$

Відповідно до (5) необхідно змоделювати вплив початково-крайових збурень (3), (4) на стан $y(s)$ розглядуваних систем для $s \in S^{T}_{0}$. Як і вище, розглянемо вектори

$$u_0 = \mathrm{col}(u_0(\sigma^{0}_{m}),\ m = \overline{1, M_0}),$$

$$u_{\Gamma} = \mathrm{col}(u_{\Gamma}(\sigma^{\Gamma}_{m}),\ m = \overline{1, M_{\Gamma}})$$

значень $u_0(\sigma^{0}_{m})$ $(m = \overline{1, M_0})$ та $u_{\Gamma}(\sigma^{\Gamma}_{m})$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$, визначених в областях

$S^0 = S_0 \times (-\infty, 0]$ та $S^\Gamma = (R^N \setminus S_0) \times [0, T]$ моделювальних функцій $u_0(s)$ та $u_\Gamma(s)$. Використовуючи вектори u_0 та u_Γ, визначимо складові $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ розв'язку (6). При цьому

$$y_0(s) = a_0(s)\alpha_0 \,/\, b_0\beta_0, \;\; y_\Gamma(s) = a_\Gamma(s)\alpha_\Gamma \,/\, b_\Gamma\beta_\Gamma, \tag{12}$$

$$y_0(s) = \frac{a_0(s)\alpha_0(u_0)}{b\alpha_0(u_0)}, \;\; y_\Gamma(s) = \frac{a_\Gamma(s)\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b\alpha_\Gamma(u_\Gamma)} \tag{13}$$

для задач (1), (3), (4) та (2), (3), (4) відповідно.

У співвідношеннях (12), (13) для визначених вище векторів u_0 та u_Γ

$$\alpha_0 = \mathrm{col}\,((\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0)^{3/2}, \; m = \overline{1, M_0}),$$

$$\alpha_\Gamma = \mathrm{col}\,((\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma)^{3/2}, \; m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\beta_0 = \mathrm{col}\,(\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0, \; m = \overline{1, M_0}),$$

$$\beta_\Gamma = \mathrm{col}\,(\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma, \; m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

$$a_0(s) = \mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{i0(m)}\overline{G}_{i0}(s)\sqrt{P^+_{n-i0(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}}, \; m = \overline{1, M_0} \right),$$

$$a_\Gamma(s) = \mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{i\Gamma(m)}\overline{G}_{i\Gamma}(s)\sqrt{P^+_{n-i\Gamma(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}}, \; m = \overline{1, M_\Gamma} \right),$$

$$b_0 = \mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{n-i0(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}, \; m = \overline{1, M_0} \right),$$

$$b_\Gamma = \mathrm{str}\left(\sum_{i=0}^{n} P^+_{n-i\Gamma(m)}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}, \; m = \overline{1, M_\Gamma} \right),$$

де аналогічно (8)–(10)

$$\overline{G}^{\mathrm{T}}_{k0}(s) = \mathrm{str}(G_k(s - \sigma_m^0), \; m = \overline{1, M_0}),$$

$$\overline{G}^{\mathrm{T}}_{k\Gamma}(s) = \mathrm{str}(G_k(s - \sigma_m^\Gamma), \; m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

матимемо

$$P_{k0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_{k0}(s)\overline{G}^{\mathrm{T}}_{k0}(s)ds,$$

$$P_{k\Gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{G}_{k\Gamma}(s)\overline{G}^{\mathrm{T}}_{k\Gamma}(s)ds,$$

$$\widetilde{G}_0(s) = \mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^+_{i0(m)}\overline{G}_{i0}(s), \; i = \overline{0, n}), \; m = \overline{0, M_0}),$$

$$\widetilde{G}_\Gamma(s) = \mathrm{diag}(\mathrm{str}(P^+_{i\Gamma(m)}\overline{G}_{i\Gamma}(s), \; i = \overline{0, n}), \; m = \overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\widetilde{P}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}_0(s)\widetilde{G}^{\mathrm{T}}_0(s)ds,$$

$$\widetilde{P}_\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}_\Gamma(s)\widetilde{G}^{\mathrm{T}}_\Gamma(s)ds.$$

Задачі знаходження векторів u_0 та u_Γ розглянемо окремо для квадратично нелінійної динамічної системи (1) та лінійної динамічної системи (2), в які ця квадратична нелінійність входить адитивно. Для кожної із цих систем запишемо розв'язувальні відносно u_0 та u_Γ рівняння, які середньоквадратично обернемо для тих випадків, де це можливо.

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ КВАДРАТИЧНО НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Розглянемо проблеми розв'язання задачі (5) для системи (1). Як і в [4, 5], вважатимемо, що функція $y(s)$ стану розглядуваної системи представлена співвідношенням (6), складові $y_\infty(s)$, $y_0(s)$ та $y_\Gamma(s)$ якого співвідношеннями (7), (11) визначаються через вектори $\vec{u}$, u_0 та u_Γ значень просторово розподілених зовнішньодинамічних збурень $u(s)$ $(s \in S_0^T)$ та функцій $u_0(s)$ $(s \in S^0)$ і $u_\Gamma(s)$ $(s \in S^\Gamma)$, якими згідно з (5) моделюються початково-крайові збурення (3) та (4) відповідно.

Здійснимо підстановку (6) в (3) та (4) і з урахуванням (7), (11) отримаємо співвідношення

$$\frac{L_r^0(\partial_t)a_0(s)\Big|_{t=0}\alpha_0(u_0)}{b_0\beta_0(u_0)}+\frac{L_r^0(\partial_t)a_\Gamma(s)\Big|_{t=0}\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b_\Gamma\beta_\Gamma(u_\Gamma)}=\bar{Y}_r^0(x)$$

$$(x \in S_0,\ r=\overline{1, R_0}), \tag{14}$$

$$\frac{L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_0(s)\alpha_0(u_0)}{b_0\beta_0(u_0)}+\frac{L_\rho^\Gamma(\partial_x)a_\Gamma(s)\alpha_\Gamma(u_\Gamma)}{b_\Gamma\beta_\Gamma(u_\Gamma)}=\bar{Y}_\rho^\Gamma(s)$$

$$(s \in \Gamma\times[0,T],\ \rho=\overline{1, R_\Gamma}), \tag{15}$$

де за аналогією з визначеними вище $\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_\Gamma$, $a_0(s)$, $a_\Gamma(s)$, b_0, b_Γ

$$\alpha_0(u_0)=\mathrm{col}((\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0)^{3/2},\ m=\overline{1, M_0}),$$

$$\alpha_\Gamma(u_\Gamma)=\mathrm{col}((\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma)^{3/2},\ m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\bar{Y}_r^0(x)=Y_r^0(x)-L_r^0(\partial_t)y_\infty(s)\Big|_{t=0}\ (r=\overline{1, R_0}),$$

$$\bar{Y}_\rho^\Gamma(s)=Y_\rho^\Gamma(s)-L_\rho^\Gamma(\partial_x)y_\infty(s)\ \ (\rho=\overline{1, R_\Gamma}).$$

Позначимо

$$\alpha_{0m}=(\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0)^{3/2},\quad \beta_{0m}=\widetilde{P}^+_{0(m)}u_0\ \ (m=\overline{1, M_0})$$

та

$$\alpha_{\Gamma m}=(\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma)^{3/2},\quad \beta_{\Gamma m}=\widetilde{P}^+_{\Gamma(m)}u_\Gamma\ \ (m=\overline{1, M_\Gamma})$$

компоненти шуканих згідно з (14), (15) векторів $\alpha_0(u_0)$, β_0 та $\alpha_\Gamma(u_\Gamma)$, β_Γ, а

$$a_{rm}^{00}(x)=\sum_{i=0}^{n}P^+_{i0(m)}L_r^0(\partial_t)\bar{G}_{i0}(s)\Bigg|_{t=0}\sqrt{P^+_{n-i(m)}\partial_s^i\bar{G}_{n-i\,0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}},$$

$$a_{\rho m}^{0\Gamma}(s)=\sum_{i=0}^{n}P^+_{i0(m)}L_\rho^\Gamma(\partial_x)\bar{G}_{i0}(s)\sqrt{P^+_{n-i(m)}\partial_s^i\bar{G}_{n-i\,0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}},$$

$$a_{rm}^{\Gamma 0}(x)=\sum_{i=0}^{n}P_{i\Gamma(m)}^{+}L_r^0(\partial_t)\overline{G}_{i\Gamma}(s)\Big|_{t=0}\sqrt{P_{n-i(m)}^{+}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\,\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^{\Gamma}}},$$

$$a_{\rho m}^{\Gamma\Gamma}(s)=\sum_{i=0}^{n}P_{i\Gamma(m)}^{+}L_\rho^{\Gamma}(\partial_x)\overline{G}_{i\Gamma}(s)\sqrt{P_{n-i(m)}^{+}\partial_s^i\overline{G}_{n-i\,\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^{\Gamma}}},$$

де $\sigma_m^0\in S^0$ $(m=\overline{1, M_0})$ та $\sigma_m^{\Gamma}\in S^{\Gamma}$ $(m=\overline{1, M_{\Gamma}})$ — точки визначення компонент u_{0m} та $u_{\Gamma m}$ векторів u_0 та u_{Γ}, позначимо компоненти векторів

$$a_r^{00}(x)=\operatorname{str}(a_{rm}^{00}(x),\, m=\overline{1, M_0}),$$
$$a_\rho^{0\Gamma}(s)=\operatorname{str}(a_{\rho m}^{0\Gamma}(s),\, m=\overline{1, M_0}),$$
$$a_r^{\Gamma 0}(x)=\operatorname{str}(a_{rm}^{\Gamma 0}(x),\, m=\overline{1, M_{\Gamma}}),$$
$$a_\rho^{\Gamma\Gamma}(s)=\operatorname{str}(a_{\rho m}^{\Gamma\Gamma}(s),\, m=\overline{1, M_{\Gamma}})$$

для $r=\overline{1, R_0}$, $\rho=\overline{1, R_{\Gamma}}$ та $x\in S_0$, $s\in\Gamma\times[0, T]$.

Останнє дає змогу розв'язувальні рівняння (14) та (15) записати у вигляді

$$\frac{\sum_{m=1}^{M_0}a_{rm}^{00}(x)\alpha_{0m}}{\sum_{m=1}^{M_0}b_m^0\beta_{0m}}+\frac{\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}a_{rm}^{\Gamma 0}(x)\alpha_{\Gamma m}}{\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}b_m^{\Gamma}\beta_{\Gamma m}}=\overline{Y}_r^{\,0}(x)\quad(x\in S_0,\, r=\overline{1, R_0}), \tag{16}$$

$$\frac{\sum_{m=1}^{M_0}a_{\rho m}^{0\Gamma}(s)\alpha_{0m}}{\sum_{m=1}^{M_0}b_m^0\beta_{0m}}+\frac{\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}a_{\rho m}^{\Gamma\Gamma}(s)\alpha_{\Gamma m}}{\sum_{m=1}^{M_{\Gamma}}b_m^{\Gamma}\beta_{\Gamma m}}=\overline{Y}_\rho^{\,\Gamma}(s) \tag{17}$$

$$(s\in\Gamma\times[0, T],\, \rho=\overline{1, R_{\Gamma}})$$

за визначених вище b_m^0 $(m=\overline{1, M_0})$ та b_m^{Γ} $(m=\overline{1, M_{\Gamma}})$.

Позначимо

$$A_{11}(x)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((a_{ri}^{00}(x)b_j^{\Gamma},\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{12}(x)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((a_{rj}^{\Gamma 0}(x)b_i^0,\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, r=\overline{1, R_0}),$$

$$A_{21}(s)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((a_{\rho i}^{0\Gamma}(s)b_j^{\Gamma},\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, \rho=\overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$A_{22}(s)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((a_{\rho j}^{\Gamma\Gamma}(s)b_i^0,\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, \rho=\overline{1, R_{\Gamma}}),$$

$$B_1(x)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((\overline{Y}_r^{\,0}(x)b_i^0b_j^{\Gamma},\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, r=\overline{1, R_0}),$$

$$B_2(s)=\operatorname{col}(\operatorname{str}((\overline{Y}_\rho^{\,\Gamma}(s)b_i^0b_j^{\Gamma},\, i=\overline{1, M_0}),\, j=\overline{1, M_{\Gamma}}),\, \rho=\overline{1, R_{\Gamma}})$$

матричні функції і з (16) та (17) отримаємо систему лінійних функціональних рівнянь

$$A_{11}(x)\alpha_1+A_{12}(x)\alpha_2=B_1(x)\beta, \tag{18}$$

$$A_{21}(s)\alpha_1+A_{22}(s)\alpha_2=B_2(s)\beta \tag{19}$$

відносно векторів α_1, α_2 та β.

Об'єднаємо останні у вектор

$$\alpha = \mathrm{col}(\alpha_1, \alpha_2, \beta) \tag{20}$$

і запишемо систему (18), (19) у вигляді

$$\begin{aligned} &A_1(x)\alpha = 0, \ x \in S^0, \\ &A_2(s)\alpha = 0, \ s \in \Gamma \times [0, T], \end{aligned} \tag{21}$$

де

$$A_1(x) = \mathrm{str}\,(A_{11}(x), A_{12}(x), B_1(x)),$$
$$A_2(s) = \mathrm{str}\,(A_{21}(s), A_{22}(s), B_2(s)).$$

За умови, коли $\det P = 0$ [8], де $P = \int\limits_S A_1^{\mathrm{T}}(x) A_1(x) dx + \int\limits_{\Gamma \times [0, T]} A_2^{\mathrm{T}}(s) A_2(s) ds$, розв'язок системи (21) визначатиметься співвідношенням

$$\alpha = v - PP^+ v \tag{22}$$

за довільного $M_0 M_\Gamma (2 + L_0 R_0)$ — вимірного вектора v.

З урахуванням визначення (20) вектора α з (22) отримаємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження моделювальних векторів u_0 та u_Γ:

$$((P_0^+)_{(i)} u_0)^{3/2} ((P_\Gamma^+)_{(i)} u_\Gamma) = (Z(P) v)_{M_0(j-1)+i},$$

$$((P_0^+)_{(i)} u_\Gamma)((P_\Gamma^+)_{(j)} u_0)^{3/2} = (Z(P) v)_{M_0 M_\Gamma + M_0(j-1)+i}$$

або, що еквівалентно,

$$\xi_{0i}^{3/2} \xi_{\Gamma j} = (Z(P) v)_{M_0(j-1)+i},$$

$$\xi_{0i} \xi_{\Gamma j}^{3/2} = (Z(P) v)_{M_0 M_\Gamma + M_0(j-1)+i}$$

для

$$\xi_{0m} = (\widetilde{P}_0^+)_{(m)} u_0 \quad (m = \overline{1, M_0})$$

та

$$\xi_{\Gamma m} = (\widetilde{P}_\Gamma^+)_{(m)} u_\Gamma \quad (m = \overline{1, M_\Gamma}).$$

Це означає, що вектори u_0 та u_Γ визначаються співвідношеннями $u_0 = \widetilde{P}_0 \xi_0$ та $u_\Gamma = \widetilde{P}_\Gamma \xi_\Gamma$, в яких

$$\xi_0 = \mathrm{col}\,(\xi_{0m}, m = \overline{1, M_0}), \ \xi_\Gamma = \mathrm{col}\,(\xi_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma}).$$

РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СТАНУ ЛІНІЙНО РОЗПОДІЛЕНИХ СИСТЕМ З АДИТИВНО ВИЗНАЧЕНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

Розглянемо проблеми побудови векторів u_0 та u_Γ, з використанням яких згідно з (5) моделювався би розв'язок початково-крайової задачі (2), (4) для лінійної динамічної системи (2), адитивно уточненої нелінійним диференціальним членом.

Як і вище, будемо виходити з того, що розв'язком рівняння (2) в необмеженій просторово-часовій області є функція (11). Залишимо без змін і обчислення векторів значень $u_{0m} = u_0(\sigma_m^0)$ та $u_{\Gamma m} = u_\Gamma(\sigma_m^\Gamma)$ моделювальних функцій $u_0(s)$, $u_\Gamma(s)$ та складових $y_0(s)$, $y_\Gamma(s)$ в представленні (6) функції $y(s)$ стану системи (2).

Після підстановки (6) в (3) та (4) отримаємо розв'язувальну систему вигляду (14), (15), в якій крім визначених вище $\alpha_0(u_0)$, $\alpha_\Gamma(u_\Gamma)$, $a_0(s)$, $a_\Gamma(s)$ маємо

$$b_0 = b_\Gamma = b = (((0,1), \quad k = \overline{0, n}), \quad m = \overline{1, M}).$$

Розглянемо

$$a_{rkm}^{00}(x)=[P_{k0(m)}^{+}L_{r}^{0}(\partial_t)\overline{G}_{k0}(s), \quad -L_{r}^{0}(\partial_t)A_k(s)]_{t=0}\ ,$$

$$a_{rkm}^{\Gamma 0}(x)=[P_{k\Gamma(m)}^{+}L_{r}^{0}(\partial_t)\overline{G}_{k\Gamma}(s), \quad -L_{r}^{0}(\partial_t)A_k(s)]_{t=0} \ \ (x\in S_0,\, r=\overline{1, R_0},\, m=\overline{1, M_0}),$$

$$a_{\rho km}^{0\Gamma}(s)=(P_{k0(m)}^{+}L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)\overline{G}_{k0}(s), \quad -L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)A_k(s)),$$

$$a_{\rho km}^{\Gamma\Gamma}(s)=(P_{k\Gamma(m)}^{+}L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)\overline{G}_{k\Gamma}(s), \quad -L_{\rho}^{\Gamma}(\partial_x)A_k(s)) \tag{23}$$

$$(s\in\Gamma\times[0,T],\, \rho=\overline{1, R_\Gamma},\, m=\overline{1, M_\Gamma}),$$

$$\alpha_{km}^{0}=\mathrm{col}(y_{km}(u_0)\widetilde{P}_{0(m)}^{+}u_0,\, y_{km}^2(u_0)),$$

$$\alpha_{km}^{\Gamma}=\mathrm{col}(y_{km}(u_\Gamma)\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_\Gamma,\, y_{km}^2(u_\Gamma)),$$

$$b_{km}=(0,1) \ \ \forall k=\overline{0, n}.$$

Тут, як і вище, $y_{km}(u_0)$ та $y_{km}(u_\Gamma)$ — корені квадратних рівнянь

$$y_{km}^2+a_{km}^{0}y_{km}=\beta_{km}^{0}, \qquad y_{km}^2+a_{km}^{\Gamma}y_{km}=\beta_{km}^{\Gamma} \tag{24}$$

для

$$a_{km}^{0}=\partial^{n-k}A_k(s)\Big|_{s=\sigma_m^0},$$

$$\beta_{km}^{0}=P_{k0(m)}^{+}\partial_s^{n-k}\overline{G}_{k0}(s)\Big|_{s=\sigma_m^0}\widetilde{P}_{0(m)}^{+}u_0,$$

$$a_{km}^{\Gamma}=\partial^{n-k}A_k(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma},$$

$$\beta_{km}^{\Gamma}=P_{k\Gamma(m)}^{+}\partial_s^{n-k}\overline{G}_{k\Gamma}(s)\Big|_{s=\sigma_m^\Gamma}\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_\Gamma$$

відповідно. Отриману з урахуванням (14), (15) систему лінійних функціональних рівнянь відносно α_{km}^{0} $(k=\overline{0, n},\ m=\overline{0, M_0})$ та α_{km}^{Γ} $(k=\overline{0, n},\ m=\overline{0, M_\Gamma})$ запишемо у вигляді

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}a_{rkm}^{00}(x)\alpha_{km}^{0}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}b_{km}\alpha_{km}^{0}}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}a_{rkm}^{\Gamma 0}(x)\alpha_{km}^{\Gamma}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}b_{km}\alpha_{km}^{\Gamma}}=\overline{Y}_r^{0}(x) \tag{25}$$

$$(x\in S^0,\, r=\overline{1, R_0}),$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}a_{\rho km}^{0\Gamma}(s)\alpha_{km}^{0}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0}b_{km}\alpha_{km}^{0}}+\frac{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}a_{\rho km}^{\Gamma\Gamma}(s)\alpha_{km}^{\Gamma}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_\Gamma}b_{km}\alpha_{km}^{\Gamma}}=\overline{Y}_\rho^{\Gamma}(s) \tag{26}$$

$$(s\in\Gamma\times[0,T],\, \rho=\overline{1, R_\Gamma}).$$

Можна побачити, що система (25), (26) є узагальненням системи нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень

$$\xi_{0m}=\widetilde{P}_{0(m)}^{+}u_0 \ \ (m=\overline{1, M_0}) \tag{27}$$

та

$$\xi_{\Gamma m}=\widetilde{P}_{\Gamma(m)}^{+}u_\Gamma \ \ (m=\overline{1, M_\Gamma}), \tag{28}$$

отриманої в [1] для випадку моделювання дискретного варіанта розглядуваних тут початково-крайових умов (3), (4).

Не розраховуючи тому на можливість чисельного розв'язання цієї системи відносно змінних ξ_{0m} $(m=\overline{1, M_0})$ та $\xi_{\Gamma m}$ $(m=\overline{1, M_\Gamma})$, що дозволило б з (27), (28) знайти вектори u_0 та u_Γ, розглянемо деякі частинні випадки розв'язуваної нами задачі.

Випадок необмеженої просторової області. Розглянемо варіант розв'язання розглядуваної вище задачі (5) для випадку, коли впливом крайових збурень $Y_\rho^\Gamma(x,t)$ $(\rho=\overline{1, R_\Gamma})$ на стан $y(s)$ системи (2) можна знехтувати. Тоді крайові умови (4) можна не враховувати і функцію $y(s)$ стану системи подамо у вигляді суми

$$y(s) = y_\infty(s) + y_0(s), \tag{29}$$

складові $y_\infty(s)$ та $y_0(s)$ якої аналогічно розглянутому вище визначаються через вектори $\vec{u}$ та u_0 відомих та модельованих зовнішньодинамічних збурень $u(s)$ $(s \in S_0^T)$ та $u_0(s)$ $(s \in S^0)$ відповідно.

За відсутності крайових умов (4), а отже і складової $y_\Gamma(s)$ в (29) та вектора u_Γ, через який ця складова визначається, розв'язувальна система (25), (26) спрощується до такої:

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0} a_{rkm}^{00}(x)\alpha_{km}^0 = \bar{Y}_r^0(x)\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{M_0} b_{km}(x)\alpha_{km}^0 \tag{30}$$

$$(x \in R^N,\ r=\overline{1, R_0}).$$

Позначивши $\alpha_0 = \mathrm{col}((\alpha_{km}^0,\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1, M_0})$ та $A_0(x) = \mathrm{col}(\mathrm{str}(((a_{rkm}^{00}(x) - -\bar{Y}_r^0(x)),\ k=\overline{0,n}),\ m=\overline{1, M_0}),\ r=\overline{1, R_0})$ вектор та матричну функцію, в яких α_{km}^0 $(k=\overline{0,n},\ m=\overline{1, M_0})$, $a_{rkm}^{00}(x)$ $(r=\overline{1, R_0},\ k=\overline{0,n},$ $m=\overline{1, M_0})$ та $\bar{Y}_r^0(x)$ $(r=\overline{1, R_0})$ збігаються із визначеними вище, систему (30) запишемо у вигляді

$$A_0(x)\alpha_0 = 0. \tag{31}$$

Для випадку, коли $\det P_0 = 0$, де $P_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0^{\mathrm{T}}(x) A_0(x)dx$, розв'язок (31) матиме вигляд

$$\alpha_0 = v_0 - P_0^+ P_0 v_0 \quad \forall v_0 \in R^{M_0(n+1)}. \tag{32}$$

З урахуванням знайдених з (32) компонент $\alpha_{km}^0 = \begin{pmatrix} \alpha_{km1}^0 \\ \alpha_{km2}^0 \end{pmatrix}$ $(k=\overline{0,n},\ \ m=\overline{1, M_0})$ вектора α_0, а також враховуючи, що

$$\alpha_{km}^0 = \begin{pmatrix} y_{km}(\xi_0)\xi_{0m} \\ y_{km}^2(\xi_0) \end{pmatrix}, \tag{33}$$

де

$$\xi_0 = \mathrm{col}(\xi_{0m},\ m=\overline{1, M_0}), \tag{34}$$

для визначених згідно з (27) значень ξ_{0m} $(m=\overline{1, M_0})$ знаходимо

$$y_{km}(\xi_0) = \sqrt{\alpha_{km2}^0}.$$

З урахуванням останнього з (33) матимемо

$$\bar{\alpha}_m^0 \xi_{0m} = \bar{\alpha}_{m1}^0, \tag{35}$$

де

$$\bar{\alpha}_m^0 = \mathrm{col}(\sqrt{\alpha_{km2}^0}, k = \overline{0, n}), \quad \bar{\alpha}_{m1}^0 = \mathrm{col}(\sqrt{\alpha_{km1}^0}, k = \overline{0, n}).$$

Внаслідок цього з (35) з точністю

$$\varepsilon_m^2 = \min_{\xi_{0m}} \| \bar{\alpha}_m^0 \xi_{0m} - \bar{\alpha}_{m1}^0 \|^2 = (\bar{\alpha}_{m1}^0)^{\mathrm{T}} \bar{\alpha}_{m1}^0 - (\bar{\alpha}_{m1}^0)^{\mathrm{T}} P_m^0 (P_m^0)^+ \bar{\alpha}_{m1}^0,$$

де

$$P_m^0 = \bar{\alpha}_m^0 (\bar{\alpha}_m^0)^{\mathrm{T}},$$

знаходимо ξ_{0m} $(m = \overline{1, M_0})$, а з урахуванням (34) отримуємо

$$\xi_0 = \mathrm{col}(((\bar{\alpha}_m^0)^{\mathrm{T}} \bar{\alpha}_m^0)^{-1} (\bar{\alpha}_m^0)^{\mathrm{T}} \bar{\alpha}_{m1}^0, \ m = \overline{1, M_0}).$$

Останнє дає змогу знайти вектор $u_0 = \tilde{P}_0 \xi_0$, чим і завершується розв'язання задачі (2), (3).

Випадок усталеної динаміки. Розглянемо варіант розв'язання цієї задачі для випадку, коли досліджуваний процес мало залежний від початкового ($t = 0$) стану, тобто коли вплив початкових збурювальних факторів $Y_r^0(x)$ $(r = \overline{1, R_0}, \ x \in S_0)$ незначний і ним можна знехтувати.

За цих умов для розв'язання задачі побудови стану системи початкові умови (3) до уваги можна не брати. Тоді $y(s) = y_\infty(s) + y_\Gamma(s)$ за визначених вище складових $y_\infty(s)$ та $y_\Gamma(s)$ відповідно.

Відсутність початкових умов (3) та складової $y_0(s)$ у визначенні функції $y(s)$ стану системи спрощує розв'язувальну систему рівнянь (25), (26) до такої:

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_\Gamma} a_{\rho km}^{\Gamma\Gamma}(s) \alpha_{km}^{\Gamma} = \bar{Y}_\rho^{\Gamma}(s) \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{M_\Gamma} b_{km} \alpha_{km}^{\Gamma} \quad (s \in \Gamma \times (-\infty, T], \rho = \overline{1, R_\Gamma}). \tag{36}$$

Тут, як і вище,

$$\alpha_{km}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} y_{km}(\xi_\Gamma) \xi_{\Gamma m} \\ y_{km}^2(\xi_\Gamma) \end{pmatrix} \tag{37}$$

для визначених згідно з (28) $\xi_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$,

$$\xi_\Gamma = \mathrm{col}(\xi_{\Gamma m}, m = \overline{1, M_\Gamma}), \tag{38}$$

а y_{km} є коренями рівняння (24). Матричні функції $a_{\rho km}^{\Gamma\Gamma}(s)$ в (36) визначаються згідно з (23), а $b_{km} = (0,1)^{\mathrm{T}}$ $\forall k = \overline{0, n}$, $\forall m = \overline{1, M_\Gamma}$.

Для знаходження розв'язку системи (36) відносно $\xi_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_\Gamma})$, якими через (28) визначається моделювальний вектор u_Γ, аналогічно (31) запишемо її у вигляді

$$A_\Gamma(s) \alpha_\Gamma = 0, \tag{39}$$

де $\alpha_\Gamma = \mathrm{col}((\alpha_{km}^{\Gamma}, k = \overline{0, n}), m = \overline{1, M_\Gamma})$,

$$A_\Gamma(s) = \mathrm{col}(\mathrm{str}((a_{\rho km}^{\Gamma\Gamma}, \ k = \overline{0, n}), \ m = \overline{1, M_\Gamma}), \ \rho = \overline{1, R_\Gamma}).$$

Для випадку, коли $\det P_\Gamma = 0$ для

$$P_\Gamma = \int_{\Gamma \times (-\infty, T]} A_\Gamma^{\mathrm{T}}(s) A_\Gamma(s) ds,$$

розв'язком системи (39) буде

$$\alpha_{\Gamma} = \upsilon_{\Gamma} - P_{\Gamma}^{+} P_{\Gamma} \upsilon_{\Gamma} \tag{40}$$

за довільного $\upsilon_{\Gamma} \in R^{M_{\Gamma}(n+1)}$.

Позначивши через

$$\alpha_{km}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} \alpha_{km1}^{\Gamma} \\ \alpha_{km2}^{\Gamma} \end{pmatrix}$$

компоненти α_{km}^{Γ} $(k = \overline{0, n}, m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ знайденого згідно з (40) вектора α_{Γ} та враховуючи зв'язок (37) цих компонент з компонентами $\xi_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$ вектора ξ_{Γ}, отримуємо рівняння

$$\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma} \xi_{\Gamma m} = \overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma} \quad (m = \overline{1, M_{\Gamma}}) \tag{41}$$

для знаходження компонент $\xi_{\Gamma m}$ $(m = \overline{1, M_{\Gamma}})$. Тут

$$\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma} = \mathrm{col}\,(\alpha_{km1}^{\Gamma}, k = \overline{0, n}),$$

$$\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma} = \mathrm{col}\,(\sqrt{\alpha_{km2}^{\Gamma}}, k = \overline{0, n})$$

— вектори зі знайденими згідно з (40) компонентами.

Із (41) з точністю

$$\varepsilon_{m}^{2} = \min_{\xi_{\Gamma m}} \| \overline{\alpha}_{m}^{\Gamma} \xi_{\Gamma m} - \overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma} \|^{2} = (\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma})^{\mathrm{T}} \overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma} - (\overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma})^{\mathrm{T}} P_{m}^{\Gamma} (P_{m}^{\Gamma})^{+} \overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma},$$

де

$$P_{m}^{\Gamma} = \overline{\alpha}_{m}^{\Gamma} (\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{\mathrm{T}},$$

знаходимо

$$\xi_{\Gamma m} = ((\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{\mathrm{T}} \overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{-1} (\overline{\alpha}_{m}^{\Gamma})^{\mathrm{T}} \overline{\alpha}_{m1}^{\Gamma}$$

для $m = \overline{1, M_{\Gamma}}$, а отже і визначений згідно з (38) вектор ξ_{Γ}. Останнє з урахуванням (28) дає змогу знайти і моделювальний вектор u_{Γ}. При цьому

$$u_{\Gamma} = P_{\Gamma} \xi_{\Gamma}.$$

ВИСНОВКИ

У статті розв'язано задачі дослідження динаміки двох нелінійних просторово розподілених систем, одна з яких визначається лінійною математичною моделлю, доповненою квадратично нелінійним членом, а друга — квадратично нелінійна без лінійного члена. Задачі розв'язано для неперервно заданих значеннь гранично-початкових та просторово розподілених зовнішньодинамічних збурювальних факторів. Критерій побудови функції стану таких просторово розподілених систем вимагає найкращого середньоквадратичного узгодження його із заданою інформацією про зовнішньодинамічні умови функціонування системи. Виконання цих вимог досягнуто на етапі переходу від диференціальної форми математичної моделі системи до її інтегрального еквівалента, виконаного в [6, 7], та у випадку псевдообернення непростих розв'язувальних рівнянь, які визначаються початково-крайовими умовами функціонування системи. В обох випадках суттєво використано результати псевдообернення [5] дискретно перетворюючих алгебраїчно нелінійних систем.

Результатом цього наукового дослідження є розрахункові формули для визначення векторів дискретних значень функцій, які за середньоквадратичним критерієм моделюють дискретно визначені гранично-початкові спостереження за системою, та аналітичні залежності відповідної функції стану системи.

Отримані математичні результати з математичного моделювання розв'язків розглянутих тут (у загальному випадку некоректно сформульованих) початково-крайових задач є прозорими і доступними для практичної реалізації, чого не можна досягти методами класичної та обчислювальної математики.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Стоян В.А. Математичне моделювання квадратично нелінійних просторово розподілених систем. І. Випадок дискретно визначених початково-крайових зовнішньодинамічних збурень. *Кібернетика та системний аналіз.* 2021. Т. 57, № 5. С. 84–97.
2. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. Некорректные задачи математической физики и анализа. Москва: Наука, 1980. 288 с.
3. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. Москва: Наука, 1978. 206 с.
4. Стоян В.А. Математическое моделирование динамики неполно наблюдаемых линейных пространственно распределенных систем. Киев: ИПЦ «Киевский университет», 2019. 318 с.
5. Стоян В.А. Математичне моделювання лінійних, квазілінійних і нелінійних динамічних систем. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2011. 320 с.
6. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. I. Случай дискретно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ*. 2019. Т. 55, № 5. С. 115–127.
7. Стоян В.А. К построению интегральных математических моделей двух классов нелинейных пространственно распределенных систем. II. Случай непрерывно определенных внешнединамических возмущений. *Кибернетика и системный анализ.* 2020. Т. 56, № 1. С. 118–127.
8. Кириченко Н.Ф., Стоян В.А. Аналитическое представление матричных и интегральных линейных преобразований. *Кибернетика и системный анализ*. 1998. № 3. С. 90–104.
9. Булавацький В.М., Кривонос Ю.Г., Скопецький В.В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка, 2005. 282 с.
10. Бомба А.Я., Булавацький В.М., Скопецький В.В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. Київ: Наук. думка, 2007. 291с.

V.A. Stoyan

MATHEMATICAL MODELING OF QUADRATICALLY NONLINEAR SPATIALLY DISTRIBUTED SYSTEMS.
II. THE CASE OF CONTINUOUSLY DEFINED INITIAL-BOUNDARY EXTERNAL-DYNAMIC DISTURBANCES

Abstract. Two classes of nonlinear spatially distributed dynamical systems, discretely observed according to the initial-boundary and spatially distributed external-dynamic disturbances are analyzed. For each of them, analytical dependences are constructed for the state function, which agrees, according to the root-mean square criterion, with the available information on the external-dynamic conditions of their operation. Solution of the initial-boundary-value problems for the systems under study is defined in terms of a set of vectors, which, according to the root-mean square criterion, model the given initial-boundary environment, including the spatially distributed external-dynamic perturbations. Conditions of the accuracy and uniqueness of the obtained mathematical results are presented. The cases of unbounded spatial dmains and systems' steady-state dynamics are considered.

Keywords: pseudosolutions, mathematical modeling of dynamic systems, spatially distributed dynamical systems, systems with uncertainties, ill-posed initial-boundary-value problems.

Надійшла до редакції 10.11.2020