УДК 517.95

І.М. АЛЕКСАНДРОВИЧ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *ialexandrovich@ukr.net*.

С.І. ЛЯШКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.serg@gmail.com*.

М.В.-С. СИДОРОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *myksyd@knu.ua*.

Н.І. ЛЯШКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.natali@gmail.com*.

О.С. БОНДАР
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *alenkajob@gmail.com.*

ІНТЕГРАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР РІМАНА ДЛЯ СТАЦІОНАРНИХ ТА НЕСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ

Анотація. Побудовано інтегральні оператори, основою яких є функція Рімана, що переводять довільні аналітичні функції в регулярні розв'язки рівнянь еліптичного, параболічного та гіперболічного типів другого порядку. Одержано узагальнення операторного методу Рімана щодо біоосесиметричного рівняння Гельмгольця. Розроблено метод знаходження в аналітичному вигляді розв'язків зазначених вище рівнянь. У ряді випадків побудовано формули обернення інтегральних представлень розв'язків. Сформульовано умови розв'язання задачі Коші для осесиметричного рівняння Гельмгольця.

Ключові слова: інтегральний оператор, регулярні розв'язки, аналітичні функції.

Диференціальні рівняння в частинних похідних, що містять диференціальні оператори вигляду

$$L_{k,S}^{\mu}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2\mu}{x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{k}{y}\frac{\partial}{\partial y}+S$$

та їхні ітерації, широко використовуються в теорії апроксимації, теорії відображень і задачах математичної фізики, пов'язаних з явищами вібрації, процесами дифузії, а також біологічними і екологічними проблемами [1–11].

Методами розв'язування таких рівнянь є створення інтегральних та диференціальних операторів, що визначають розв'язок рівнянь та систем еліптичного та гіперболічного типів [12–18].

Одним з методів розв'язування таких рівнянь є операторний метод Рімана. Він зводиться до знаходження інтегральної формули, що виражає у явному вигляді розв'язок задачі Коші через початкові дані і разом з тим безпосередньо доводить єдиність розв'язку.

Узагальнення операторного методу Рімана здійснюватиметься на основі двоосесиметричного рівняння Гельмгольця [19].

1. Нехай G — довільна зіркова область відносно $z=0$, $z^*\in G^*=\{x-iy\,|\,x+iy\in G\}$, τ — дійсна (або комплексна) змінна, $\tau\in T$.

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду

$$L_{k,S}^{\mu}\Phi=\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{2\mu}{x}\Phi_x+\frac{k}{y}\Phi_y+S\Phi=0,\ \mu,k-\text{const}>0,\qquad (L_{k,S}^{\mu})$$

де $\Phi=\Phi(x,y,\tau)$, S — лінійний оператор, залежний тільки від τ.

Інтегральне зображення розв'язків рівняння $(L_{k,S}^{\mu})$ шукатимемо у вигляді

$$\Phi(x, y, \tau) =$$
$$= \frac{x^{-\mu}}{B\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \omega(x + iy\cos t, \tau)(x + iy\cos t)^{\mu} \sin^{k-1} t \times \tag{1}$$
$$\times \Sigma_2\left(\mu, 1-\mu, \frac{k}{2}, \frac{-y^2 \sin^2 t}{4x(x + iy\cos t)}, -\frac{S}{4} y^2 \sin^2 t\right) dt,$$

де $\omega(z, \tau)$ – аналітична в G і неперервна в $\overline{G}$ функція, Σ_2 — вироджена гіпергеометрична функція Горна двох змінних [20]:

$$\Sigma_2(\alpha, \beta, \gamma, x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m (\beta)_m}{(\gamma)_{m+n}\, m!\, n!} x^m y^n, \quad |x| < 1, \ (\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2}$$

Запишемо (1) у вигляді

$$\Phi(x, y, \tau) =$$
$$= \frac{x^{-\mu}}{B\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} (x + iy\cos t)^{\mu} \sin^{k-1} t \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\mu)_m (1-\mu)_m}{\left(\frac{k}{2}\right)_{m+n} m!\, n!} \frac{(-1)^{m+n}}{4^{m+n}} \times \tag{3}$$
$$\times \left(\frac{y^2 \sin^2 t}{x(x + iy\cos t)}\right)^m (y^2 \sin^2 t)^n S^n \omega(x + iy\cos t, \tau) dt.$$

Припустимо, що оператор S і функція ω такі, що ряд під інтегралом (3) рівномірно збіжний $\forall z = x + iy \in G, \ \tau \in T_0 \subset T$. Підставимо співвідношення (3) у рівняння $(L_{k,S}^{\mu})$.

Уведемо позначення

$$\Phi_{n,m}(x, y, \tau) = x^{-\mu-m} y^{2n+2m} \int_0^{\pi} \omega(x + iy\cos t, \tau)(x + iy\cos t)^{\mu-m} \sin^{2n+2m+k-1} t dt$$

та

$$L\Phi + S\Phi \equiv \Delta\Phi + \frac{2\mu}{x}\Phi_x + \frac{k}{y}\Phi_y + S\Phi = 0.$$

Проаналізуємо оператор $L\Phi$:

$$L\Phi = \frac{1}{B\left(\frac{k}{2}, \frac{1}{2}\right)} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} (\mu)_m (1-\mu)_m S^n}{\left(\frac{k}{2}\right)_{m+n} m!\, n!\, 4^{m+n}} L\Phi_{n,m}.$$

Після диференціювання та інтегрування частинами матимемо

$$L\Phi_{n,m} = (2n + 2m)(2n + 2m + k - 2) x^{-\mu-m} y^{2n+2m-2} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \omega(x + iy\cos t, \tau)(x + iy\cos t)^{\mu-m} \sin^{2n+2m+k-3} t dt +$$
$$+ (m^2 - \mu^2 + \mu + m) x^{-\mu-m-2} y^{2n+2m} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \omega(x + iy\cos t, \tau)(x + iy\cos t)^{\mu-m} \sin^{2n+2m+k-1} t dt +$$
$$+ 2m(2n + 2m + k - 2) x^{-\mu-m-1} y^{2n+2m-1} \times$$
$$\times \int_0^{\pi} \omega(x + iy\cos t, \tau)(x + iy\cos t)^{\mu-m} i\cos t \cdot \sin^{2n+2m+k-3} t dt.$$

Підставляємо $L\Phi_{n,m}$ в $L\Phi$. Перетворивши вираз під знаком суми, одержимо

$$L\Phi = -S\left[\frac{1}{\mathrm{B}\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\mu)_m(1-\mu)_m}{\left(\frac{k}{2}\right)_{m+n}(2m+2n+k)}\frac{(2m+2n+k)}{2^{2m}2^{2n}}\frac{(-1)^n(-1)^m}{n!\,m!}\times\right.$$

$$\left.\times x^{-\mu-m}y^{2n+2m}\int_0^{\pi}S^n\omega\cdot(x+iy\cos t)^{\mu-m}\sin^{2n+2m+k-1}t\,dt\right]=-S\Phi.$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. Для всіх функцій $\omega(z,\tau)$ аналітичних в G, неперервних в $\overline{G}$ і таких, що ряд у (3) рівномірно збіжний $\forall z\in G, \tau\in T_0\subset T$,

$$\Phi(x,\,y,\tau)=\frac{x^{-\mu}}{\mathrm{B}\left(\frac{k}{2},\frac{1}{2}\right)}\int_0^{\pi}\omega(x+iy\cos t,\tau)(x+iy\cos t)^{\mu}\sin^{k-1}t\times$$

$$\times\sum\nolimits_2\left(\mu,\,1-\mu,\frac{k}{2},-\frac{y^2\sin^2 t}{4x(x+iy\cos t)},-\frac{S}{4}y^2\sin^2 t\right)dt$$

є розв'язком рівняння $(L^{\mu}_{k,S})$ $\forall\tau\in T_0$; $z,\bar z$ із околу $z=0,\bar z=0$.

2. Обернення інтегрального зображення у випадку $\mu=0$.

При $\mu=0$ рівняння $(L^{\mu}_{k,S})$ і формула (1) матимуть відповідно вигляд

$$L_{k,S}\Phi=\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{k}{y}\Phi_y+S\Phi=0, \qquad (L_{k,S})$$

$$\Phi(x,\,y,\tau)=\Phi(z,\bar z,\tau)=C_k\int_0^{\pi}\omega(x+iy\cos t,\tau)\;{}_0F_1\left[\frac{k}{2};-\frac{S}{4}y^2\sin^2 t\right]\sin^{k-1}t\,dt, \qquad (4)$$

де $C_k=\dfrac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$; ${}_0F_1\left[\frac{k}{2};Z\right]$ — частинний випадок узагальненої гіпергеометричної функції, пов'язаної з функцією Бесселя рівністю

$${}_0F_1\left[\frac{k}{2};Z\right]=\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(i\sqrt{z})^{-\frac{k}{2}+1}\mathrm{J}_{\frac{k}{2}-1}(2i\sqrt{z}).$$

Отже, справедлива теорема.

Теорема 2. Для всіх функцій $\omega(z,\tau)$ аналітичних в G, неперервних в $\overline{G}$ і таких, що ряд

$$E\omega=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)}\left(\frac{y\sin t}{2}\right)^{2n}S^n\omega(x+iy\cos t,\tau)$$

рівномірно збіжний $\forall z\in G, \tau\in T_0\subset T$,

$$\Phi(z,\bar z,\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}E\omega(x+iy\cos t,\tau)\sin^{k-1}t\,dt$$

є розв'язком рівняння $(L_{k,S})$ $\forall\tau\in T_0$, $z,\bar z$ із околу $z=0$, $\bar z=0$.

Необхідність обернення інтегрального рівняння (4) зумовлено розв'язуванням крайових задач для рівняння ($L_{k,S}$). Для цього введемо поняття областей двох типів:

а) область G симетрична відносно дійсної осі, належить класу A, якщо вона містить повністю відрізок, що з'єднує дві будь-які її точки з однаковими абсцисами;

б) область G належить класу B, якщо вона містить повністю відрізок прямої, проведеної з нескінченно віддаленої точки в довільну її точку z паралельно осі OY.

Відповідно до класу областей формула (4) матиме вигляд

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} y^{1-k} 2^{\frac{k}{2}} S^{\frac{1-\frac{k}{2}}{2}} \times \tag{4'}$$

$$\times \int_0^y \operatorname{Re} \omega(x + i\xi, \tau)\, J_{\frac{k}{2}-1}(\sqrt{S(y^2 - \xi^2)})(y^2 - \xi^2)^{\frac{\frac{k}{2}-1}{2}}\, d\xi,$$

де $\Phi(x, y, \tau) \in C^2$ $(y \neq 0)$, $\Phi(x, \pm 0, \tau)$ обмежена і для $0 < k < 1$ $\lim\limits_{y \to 0} |y|^k \dfrac{\partial \Phi(x, y, \tau)}{\partial y} = 0$, а за умови

$$\omega(z, \tau) z^{\frac{k-1}{2}} \cos\left(\sqrt{S}\left(z - \frac{k\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)\right) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^{\varepsilon}}\right), \quad |z| \to \infty, \tag{*}$$

вона має вигляд

$$\Phi(x, y, \tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} y^{1-k} 2^{\frac{k}{2}} S^{\frac{1-\frac{k}{2}}{2}} \times \tag{4''}$$

$$\times \int_\infty^y \operatorname{Re}\left[\omega(x + i\xi, \tau) e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}\right] I_{\frac{k}{2}-1}(\sqrt{S(\xi^2 - y^2)})(\xi^2 - y^2)^{\frac{1-\frac{k}{2}}{2}}\, d\xi.$$

Інтегральні оператори (4′), (4″) відображають аналітичні в області G функції $\omega(z, \tau)$ у розв'язки рівняння ($L_{k,S}$). Розглянемо рівняння (4′), (4″) як інтегральні рівняння типу згортки з функцією Бесселя в ядрі [15] і одержимо відповідно їхні розв'язки:

$$\operatorname{Re} \omega(x + iy, \tau) =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2^{m-k/2} S^{\frac{k/2-m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) C_k} \dfrac{d}{dy} \displaystyle\int_0^y \dfrac{d^m[\xi^{k-1}\Phi(x, \xi, \tau)]}{(d\xi^2)^m} (y^2 - \xi^2)^{\frac{m-k/2}{2}} \times \\ \qquad \times \xi I_{m-k/2}(\sqrt{S(y^2 - \xi^2)})\, d\xi, \ m = \left[\dfrac{k}{2}\right], \ \dfrac{k}{2} - 1 \neq n; \\ \dfrac{1}{n!} C_k\, y \dfrac{d^{n+1}[y^{k-1}\Phi(x, y, \tau)]}{(dy^2)^{n+1}} + \\ + \dfrac{\sqrt{S}\, y}{n!\, C_k} \displaystyle\int_0^y \dfrac{d^{n+1}[\xi^{k-1}\Phi(x, \xi, \tau)]}{(d\xi^2)^{n+1}} I_1(\sqrt{S(y^2 - \xi^2)}) \dfrac{\xi d\xi}{\sqrt{y^2 - \xi^2}}, \ \dfrac{k}{2} - 1 = n, \end{cases} \tag{5'}$$

$$\mathrm{Re}[\omega(x+iy,\tau)e^{-i\pi\left(\frac{k}{2}-1\right)}]=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{(-1)^n 2^{m-k/2}S^{\frac{k/2+m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)C_k}\dfrac{d}{dy}\int_0^\infty \dfrac{d^m[\xi^{k-1}\Phi x,\xi,\tau)]}{(d\xi^2)^m}(\xi^2-y^2)^{\frac{m-k/2}{2}}\times\\ \qquad\times\xi J_{m-k/2}(\sqrt{S(\xi^2-y^2)})d\xi,\ \ m=\left[\dfrac{k}{2}\right],\ \dfrac{k}{2}-1\neq n;\\ \dfrac{(-1)^n}{n!C_k}\,y\dfrac{d^{n+1}[y^{k-1}\Phi(x,y,\tau)]}{(dy^2)^{n+1}}+\\ \qquad+\dfrac{(-1)^n\sqrt{S}\,y}{n!C_k}\int_y^\infty\dfrac{d^{n+1}[\xi^{k-1}\Phi]}{(d\xi^2)^{n+1}}\dfrac{J_1(\sqrt{S(\xi^2-y^2)})}{\sqrt{\xi^2-y^2}}\xi d\xi,\ \ \dfrac{k}{2}-1=n.\end{cases}\qquad(5'')$$

3. Якщо $S=\dfrac{\alpha^2}{4}$, $k=1$, то рівняння $(L_{k,S})$ стає осесиметричним рівнянням Гельмгольця

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{1}{y}\Phi_y+\frac{\alpha^2}{4}\Phi=0,\qquad(5)$$

а формули $(4')$, (*), $(4'')$, $(5')$, $(5'')$, що становлять розв'язки рівняння Гельмгольця та їхні формули обернення, матимуть відповідно вигляд

$$\Phi(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_0^y \mathrm{Re}\,\omega(x+i\xi)\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}}{\sqrt{y^2-\xi^2}}d\xi,\qquad(6)$$

$$\omega(z)\cos\frac{\alpha}{2}z=\mathrm{O}\left(\frac{1}{|z|^{\varepsilon}}\right),\qquad(**)$$

$$\Phi(x,y)=\frac{2}{\pi}\int_y^\infty \mathrm{Im}\,\omega(x+i\xi)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{\xi^2-y^2}\right)(\xi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}},\qquad(7)$$

$$\mathrm{Re}\,\omega(x+iy)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y\Phi(x,\xi)\,\mathrm{ch}\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}\,(y^2-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}\xi d\xi,\qquad(8)$$

$$\mathrm{Im}\,\omega(x+iy)=\frac{\partial}{\partial y}\int_y^\infty\Phi(x,\xi)\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\xi^2-y^2}\,(\xi^2-y^2)^{-\frac{1}{2}}\xi d\xi\,.\qquad(9)$$

За допомогою прямих та обернених формул крайові задачі для рівняння Гельмгольця зводяться до відповідних крайових задач для аналітичних функцій.

Зауваження. Якщо область G становить півплощину, а $\omega(z)$ — аналітична в G функція, що справджує умову(**), то розв'язки рівняння (5), тобто представлення (6) та (7), збігаються.

Як приклад застосування побудованих інтегральних операторів розв'яжемо задачу.

Задача. В області $G\colon x>0$, $y>0$ знайти регулярний розв'язок задачі Коші для рівняння Гельмгольця (5) за умовами

$$\Phi(0,\ y)=l_1(y),\quad \frac{\partial\Phi(0,\ y)}{\partial x}=l_2(y),\quad \frac{\partial\Phi(x,0)}{\partial y}=0, \tag{10}$$

де $l_1(y), l_2(y)$ — задані достатнє число разів неперервно диференційовні функції від y для $0\le y<\infty$.

Насамперед розв'яжемо задачу (5), (10) для $l_2(y)=0$. Розв'язок шукаємо у вигляді (6), де $\omega(z)=u_0(x,\ y)+iv_0(x,\ y)$ — функція аналітична в G, $v_0(0,\ y)=0$. За формулою обернення (8) одержуємо

$$u_0(0,\ y)=\frac{\partial}{\partial y}\int_0^y l_1(\xi)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}\right)\xi(y^2-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}d\xi,\ \ 0\le y<\infty.$$

Покладемо $u_0(0,\ -y)=u_0(0,\ y)$ і вважатимемо, що $u_0(0,\ y)$ на всій осі і в околі нескінченно віддаленої точки задовольняє умову Гельдера. Тоді за формулою Шварца отримуємо

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u_0(0,\ t)}{t+iz}dt.$$

Розв'язок задачі (5), (10) для $l_2(y)=0$ матиме вигляд

$$\Phi(x,\ y)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^y\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{y^2-\xi^2}}\left(\int_0^{\infty}\frac{xu_0(0,\ t)(t^2+x^2+\xi^2)}{(t^2+x^2-\xi^2)^2+4x^2\xi^2}dt\right)d\xi. \tag{11}$$

Аналогічно розв'язується задача (5), (10) для $l_1(y)=0$. За формулою (8) одержуємо

$$v_0(0,\ y)=\int_0^y l_2(\xi)\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}\right)\xi(y^2-\xi^2)^{-\frac{1}{2}}d\xi,$$

а за формулою (6) розв'язок задачі (5), (10) для $l_1(y)=0$ матиме вигляд

$$\Phi(x,\ y)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^y\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{y^2-\xi^2}}\left(\int_0^{\infty}\frac{tv_0(0,\ t)(t^2+x^2-\xi^2)}{(t^2+x^2-\xi^2)^2+4x^2\xi^2}dt\right)d\xi. \tag{12}$$

Розв'язок задачі Коші для рівняння Гельмгольця (5), (10) становитиме суму розв'язків (11), (12).

4. Нехай $S=-\left(a+b\frac{\partial}{\partial\tau}\right)$, де $a,\ b$ — константи. Тоді рівняння $(L_{k,S})$ стає рівнянням параболічного типу

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{k}{y}\Phi_y-b\Phi_\tau-a\Phi=0. \tag{13}$$

Оператор $E\omega(z,\tau)$ набуде вигляду

$$E\omega(z,\tau)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{(n+m)!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n+m\right)}C_{n+m}^m\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2\sin^2 t\right)^{n+m}a^n b^m\frac{\partial^m\omega(z,\tau)}{\partial\tau^m}=$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{a^n b^m}{(n+m)!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n+m\right)} C_{n+m}^{m} \left(\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t\right)^{n+m} \times$$

$$\times \frac{m!}{2\pi i} \oint_K \frac{\omega(z,\xi)d\xi}{(\xi-\tau)^{m+1}} = \frac{1}{2\pi i} \oint_K \omega(z,\xi) H_1(x,\ y,\tau,\xi,\,t) \frac{d\xi}{\xi-\tau}.$$

Тут K — круг в T_0 з центром в точці $\xi = \tau$,

$$H_1(x,\ y,\tau,\xi,\,t) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{m!}{(n+m)!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n+m\right)} C_{n+m}^{m} \left(a\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t\right)^n \left(\frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t}{\xi-\tau}\right)^m =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(1)_m}{\left(\frac{k}{2}\right)_{n+m}} \frac{\left(a\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t\right)^n}{n!} \left(\frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t}{\xi-\tau}\right)^m \frac{1}{m!} =$$

$$= \Phi_3\left(1, \frac{k}{2}; a\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t,\ \frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t}{\xi-\tau}\right),$$

де $\Phi_3(\beta,\gamma;w,z) = \sum\limits_{k,\,n=0}^{\infty} \frac{(\beta)_k}{(\gamma)_{n+k}} \cdot \frac{w^k z^n}{k!\,n!}$ — вироджена гіпергеометрична функція двох змінних; $(\beta)_k$ та $(\gamma)_{n+k}$ — символи Похгаммера.

Отже, матимемо таку теорему.

Теорема 3. Для всіх функцій $\omega(z,\tau)$ аналітичних в G, неперервних в $\overline{G}$

$$\Phi(x,\ y,\tau) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{2\pi i\sqrt{\pi}} \oint_K \frac{d\xi}{\xi-\tau} \int_0^{\pi} \omega(x+iy\cos t,\xi) \times$$

$$\times \Phi_3\left(1, \frac{k}{2}; a\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t,\ \frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t}{\xi-\tau}\right) \sin^{k-1} t dt \qquad (14)$$

є розв'язком рівняння (13).

Якщо $b=0, a=-\dfrac{\alpha^2}{4}$ (тобто $S=\dfrac{\alpha^2}{4}$), то

$$H_1(x,\ y, \xi, \tau,\ t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(a\left(\frac{y}{2}\right)^2\sin^2 t\right)^n}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)n!}={}_0F_1\left[\frac{k}{2};-\frac{\alpha^2}{16}y^2\sin^2 t\right].$$

Повертаємось до рівняння (5) і до відомого представлення його розв'язків. Якщо $a=0, S=-b\dfrac{\partial}{\partial\tau}$, то маємо

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{k}{y}\Phi_y-b\Phi_\tau=0.$$

Інтегральне зображення розв'язків цього рівняння має вигляд

$$\Phi(x,\ y, \tau)=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_K\frac{d\xi}{\xi-\tau}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}\omega(x+iy\cos t, \xi)\,{}_1F_1\left(1;\frac{k}{2};\frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2\sin^2 t}{\xi-\tau}\right)\sin^{k-1}tdt\,,$$

де ${}_1F_1\left(1;\dfrac{k}{2};\dfrac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2\sin^2 t}{\xi-\tau}\right)$ — вироджена гіпергеометрична функція.

5. Нехай $S=-\left(b\dfrac{\partial}{\partial\tau}\right)^2$, де b — константа ($b\in R$). Тоді рівняння ($L_{k,S}$) стає рівнянням гіперболічного типу

$$\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\frac{k}{y}\Phi_y-b^2\Phi_{\tau\tau}=0. \qquad (13')$$

Зображення (4) набуває вигляду

$$\Phi(z,\bar{z},\tau)=C_k\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\int_0^{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{y\sin t}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)}b^n\frac{\partial^{2n}\omega(x+iy\cos t,\tau)}{\partial\tau^{2n}}\sin^{k-1}tdt$$

або

$$\Phi(z,\bar{z},\tau)=\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\pi}E\omega(x+iy\cos t,\tau)\sin^{k-1}tdt,$$

де

$$E\omega(z,\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(b\left(\frac{y}{2}\right)^2\sin^2 t\right)^n}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)}\frac{(2n)!}{2\pi i}\oint_K\frac{\omega(z,\xi)}{(\xi-\tau)^{2n+1}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{\omega(z,\xi)}{\xi-\tau}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{b\left(\frac{y}{2}\right)^2 \sin^2 t}{(\xi-\tau)^2}\right)^n \frac{(2n)!}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)}\right)d\xi,$$

K — круг в T_0 з центром в точці $\xi=\tau$.

Оскільки $\dfrac{(2n)!}{n!\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+n\right)}=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)_n 2^{2n}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\left(\frac{k}{2}\right)_n}$, то

$$E\omega(z,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{\omega(z,\xi)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)(\xi-\tau)}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2};\frac{by^2\sin^2 t}{(\xi-\tau)^2}\right)d\xi.$$

Отже, доведено теорему.

Теорема 4. Для всіх функцій $\omega(z,\tau)$, аналітичних в G, неперервних в $\overline{G}$

$$\Phi(x,\ y,\tau)=C_k\,\frac{1}{2\pi i}\oint_K \frac{d\xi}{\xi-\tau}\int_0^{\pi}\omega(x+iy\cos t,\xi)\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2},\frac{k}{2};\frac{by^2\sin^2 t}{(\xi-\tau)^2}\right)\sin^{k-1} t\,dt$$

є розв’язком рівняння $(13')$.

Отже, побудовано нові інтегральні оператори, які становлять ефективний метод розв’язування крайових задач із залученням теорії аналітичних функцій. Отримано зручні аналітичні вирази розв’язків рівнянь стаціонарних та нестаціонарних процесів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Klyushin D.A., Lyashko S.I., Lyashko N.I., Bondar O.S., Tymoshenko A.A. Generalized optimization of processes of drug transport in tumors. *Cybernetics and Systems Analisys.* 2020. Vol. 56, N 5. P. 758–765. https://doi.org/10.1007/s10559-02000296-0.
2. Lyashko S.I., Yaremchuk S.I., Lyashko N.I., Shupikov A.A., Bondar E.S. Optimization of arrangement of sources of physical field on fixed places. *Journal of Automation and Information Sciences.* 2020. 52(7). P. 3–18. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v52.i7.20.
3. Tymoshenko A., Klyushin D., Lyashko S. Optimal control of point sources in Richards–Klute equation. *Advances in Intelligent Systems and Computing.* 2019. Vol. 754. P. 194–203. 10.1007/978-3-319-91008-6_20.
4. Sandrakov G.V., Lyashko S.I., Bondar E.S., Lyashko N.I. Modeling and optimization of microneedle systems. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2019. Vol. 51, N 6. P. 1–11. https://doi.org/10.1615/JAutomatInfScien.v51.i6.10. 2019.
5. Gladky A.V. Investigation of wave processes in inhomogeneous media with imperfect contact conditions. *Cybernetics and Systems Analisys.* 2016. Vol. 52, N 2. P. 247–257. https://doi.org/10.1007/s10559-016-9821-6.
6. Perthame Benoit. PDE models for chemotactic movements: Parabolic, hyperbolic and kinetic. (English). *Applications of Mathematics.* 2004. Vol. 49, Iss. 6. P. 539–564.
7. Lyashko S.I., Nomirovskii D.A., Sergienko T.I. Trajectory and final controllability in hyperbolic and pseudohyperbolic systems with generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 5. P. 756–763. https://doi.org/10.1023/A:1013871026026.

8. Lyashko S.I., Semenov V.V. On the controllability of linear distributed systems in classes of generalized actions. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2001. Vol. 37, N 1. P. 13–32. https://doi.org/10.1023/A:1016607831284.
9. Biler P., Nadzieja T. A class of nonlocal parabolic problems occurring in statistical mechanics. *Colloq. Math.* 1993. Vol. 66, Iss. 1. P. 131–145. https://doi.org/10.4064/cm-66-1-131-145|MR1242651.
10. Nakonechnyi A.G., Lyashko S.I. Minmax estimation theory for solutions of abstract parabolic equations. *Cybernetics and Systems Analysis.* 1995. Vol. 31, N 4. P. 626–630. https://doi.org/ 10.1007/BF02366418.
11. Lyashko S.I., Man'kovskii A.A. Simultaneous optimization of impulse and intensities in control problems for parabolic equations. *Cybernetics.* 1983. Vol. 19, N 5. P. 687–690. https://doi.org/ 10.1007/BF01068766.
12. Alexandrovich I.M., Sydorov M.V. Differential operators specifying the solution of an elliptic iterated equation. *Ukr. Math. J.* 2019. Vol. 71, Iss. 3. P. 495–504. https://doi.org/ 10.1007/s11253-019-01659-y.
13. Alexandrovich I.M., Bondar O.S., Lyashko S.I., Lyashko N.I., Sydorov M.V.-S.. Integral operators that determine the solution of an iterated hyperbolic-type equation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2020. Vol. 56, N 3. P. 401–409. https://doi.org/10.1007/s10559-020-00256-3.
14. Ляшко І.І., Александрович І.М., Сидоров М.В.-С. Інтегральний оператор Рімана стаціонарних та нестаціонарних процесів для ітераційного осесиметричного випадку *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2002, № 1. С. 49–55.
15. Ляшко І.І., Сидоров М.В.-С., Александрович І.М. Обернення деяких інтегральних рівнянь. *Журнал обчислювальної та прикладної математики.* 2004. № 2. С. 25–30.
16. Aleksandrovich I.M., Sidorov M.V. Differential operators defining a solution of an elliptic-type equation. *Journal of Mathematical Sciences.* 2000. Vol. 102, Iss. 1. P. 3719–3726. https://doi.org/10.1007/BF02680223.
17. Aleksandrovich I.M. Differential operators determining solutions of elliptic equations. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1995. Vol. 47, Iss. 12. P. 1811–1817. https://doi.org/10.1007/ BF01060956.
18. Aleksandrovich I.N. Differential operators that determine the solution of a certain class of equations of elliptic type. *Ukrainian Mathematical Journal.* 1989. Vol. 41, Iss. 6. P. 709–712.
19. Gilbert R.P. Function theoretic methods in partial differential equation. NewYork; London: Acad. Press, 1969. 311 p.
20. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Москва: Наука, 1969. Т. 1; 1970, Т. 2.

I.M. Alexandrovich, S.I. Lyashko, M.V-S. Sydorov, N.I. Lyashko, O.S. Bondar

RIEMAN INTEGRAL OPERATOR FOR STATIONARY AND NON-STATIONARY PROCESSES

Abstract. Integral operators based on the Riemann function, which transform arbitrary analytical functions into regular solutions of equations of elliptic, parabolic, and hyperbolic types of second order are constructed. The Riemann operator method is generalized for the biaxisymmetric Helmholtz equation. A method for finding solutions of the above equations in analytical form is developed. In some cases, formulas for inverting integral representations of solutions are constructed. The conditions for solving the Cauchy problem for the axisymmetric Helmholtz equation are formulated.

Keywords: integral operator, regular solutions, analytical functions.

Надійшла до редакції 13.04.2021