УДК 519.6

**В.Г. ПРИКАЗЧИКОВ**
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *viktorprikazchikov@gmail.com.*

# ЕФЕКТИВНІ ДВОСТОРОННІ ОЦІНКИ СПЕКТРА ДЕЯКИХ ЕЛІПТИЧНИХ ОПЕРАТОРІВ

**Анотація.** За принципом максимуму отримано оцінки зверху та знизу для спектра деяких еліптичних операторів та їніх сіткових аналогів. З точних формул похибки власних чисел за методом скінченних різниць отримано точніші оцінки спектра диференціальних операторів. Двосторонні оцінки власних чисел різницевих аналогів спектральних задач визначають мажоранту і міноранту для похибки фазової швидкості сіткових хвиль в задачах коливань різноманітних об'єктів.

**Ключові слова:** еліптичні оператори, принцип максимуму, метод скінченних різниць, точні формули похибки власних чисел, двосторонні оцінки спектра, рівняння коливань, похибка фазових швидкостей сіткових хвиль.

Для обчислення спектра еліптичних операторів часто використовують дискретні аналоги, здобуті за методом скінченних різниць (МСР) або за методом скінченних елементів (МСЕ). Ці аналоги є алгебраїчними задачами на власні значення, які потребують значних комп'ютерних витрат. Однак іноді достатньо обмежитися двосторонніми оцінками власних чисел (в.ч.), які можна отримати менш трудомістким способом, як подано в цій даній роботі. Для дискретизації потрібно дослідити точність методу, з'ясувати, з якого боку в.ч. дискретної задачі наближаються до в.ч. вихідної задачі, знайти економічний спосіб знаходження двосторонніх оцінок тощо.

Точність МСР для деяких спектральних задач досліджено в [1–9]. Двосторонні оцінки в.ч. еліптичних операторів подано в [10–12]. У цій роботі отримано нові результати для деяких операторів. Із точних формул похибки в.ч. в МСР випливають точніші оцінки для в.ч. вихідних задач. Деякі результати подано в [13–19].

Зазначимо, що в МСЕ в.ч. наближаються до в.ч. вихідної задачі зверху, оскільки мінімакс відповідних функціоналів здійснюється на більш вузькому класі допустимих функцій порівняння [20].

Як приклад, із застосуванням двосторонніх оцінок в.ч. в МСР отримано вилки для похибки фазової швидкості сіткових хвиль у випадку дискретизації низки задач коливання різноманітних об'єктів.

1. У роботах [3, 9] досліджено МСР для спектральної задачі з оператором Лапласа за умови Діріхле на межі $\Gamma$ довільної двовимірної опуклої області $\Omega$:

$$\begin{gathered}\Delta u+\lambda u=0, \quad x=(x_1,x_2)\in\Omega,\\ u=0, \quad x\in\Gamma.\end{gathered} \tag{1}$$

Задача (1) еквівалентна мінімаксу функціонала

$$\Phi(u)=\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx,\ \int\limits_{\Omega}u^2dx=1.$$

Розглянемо $\Phi(u)$ на прямокутниках $\Pi$ и $\Pi^+$, $\Pi\subset\Omega\subset\Pi^+$, з довжинами сторін $l_i, l_i^+, i=1,2$, відповідно. Оскільки на $\Pi^+$ клас допустимих функцій є ширшим, а на $\Pi$ — вужчим, то мінімакс визначає

© В.Г. Приказчиков, 2022