

**В.М. БУЛАВАЦЬКИЙ**

Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,  
e-mail: v\_bulav@ukr.net.

## **ДЕЯКІ ДВОВИМІРНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ ФІЛЬТРАЦІЙНОЇ ДИНАМІКИ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ З ПРОПОРЦІЙНОЮ ПОХІДНОЮ КАПУТО**

**Анотація.** Одержано замкнені розв'язки деяких двовимірних нестационарних крайових задач фільтраційної динаміки в тріщинувато-пористих пластах, поставлених для дробово-диференційних математичних моделей. Вказані математичні моделі побудовано з використанням узагальненої (пропорційної) похідної Капуто за часовою змінною та похідних Рімана–Ліувілля за геометричними змінними. Разом з прямою задачею розглянуто і двовимірну обернену крайову задачу визначення невідомої функції джерела, залежної лише від геометричних змінних. Наведено умови існування регулярних розв'язків розглянутих задач. Для окремого випадку лише часової нелокальності фільтраційного процесу розв'язана крайова задача з нелокальними граничними умовами.

**Ключові слова:** математичне моделювання, дробово-диференційна динаміка фільтраційних процесів, тріщинувато-пористі середовища, неklasичні моделі, пропорційна похідна Капуто, похідна Рімана–Ліувілля, двовимірні крайові задачі, обернені задачі, задачі з нелокальними умовами, замкнені розв'язки.

### **ВСТУП**

Відомо, що методи математичного і комп'ютерного моделювання мають питому вагу у пошуках розв'язання проблем ефективного керування водними ресурсами, прогнозуванні закономірностей їхньої динаміки, розвитку і впливу на екологічний стан навколишнього середовища [1, 2]. Незаперечно, що актуальним є розвинення зазначених методів і для вивчення закономірностей та особливостей динаміки геоміграційних процесів у складних гідрогеологічних умовах їхнього перебігу, що характерно для сьогодення, яке визначається широким розвитком систем меліорації, стрімким індустріальним виробництвом, зокрема, будівництвом різноманітних підземних споруд, комунікацій тощо [3, 4]. До того ж зазначимо, що наразі більшість відомих математичних моделей процесів переносу в геопористих середовищах базується на класичних законах переносу, які можуть бути не достатньо адекватними за складних гідрогеологічних умов у випадку суттєвого відхилення системи від рівноважного стану [5].

Ефективний підхід до моделювання процесів переносу в зазначених системах пов'язаний з використанням апарату інтегро-диференціювання дробового порядку і реалізований, зокрема в [6–9]. При цьому в [10, 11] побудовано аналітичні розв'язки деяких одновимірних (за геометричною змінною) нестационарних крайових задач стосовно нових, неklasичних фільтраційних математичних моделей в тріщинувато-пористих середовищах. На відміну від цих публікацій, у запропонованій роботі розглядаються задачі моделювання двовимірної за просторовими змінними дробово-диференційної динаміки нелокальних фільтраційних процесів у тріщинувато-пористому середовищі. Зокрема, запропоновано нове дробово-диференційне модельне фільтраційне рівняння з пропорційною похідною Капуто [12] за часовою змінною та похідними Рімана–Ліувілля [8, 9] за геометричними змінними, для якого одержано розв'язки прямої і оберненої крайових задач. Також у роботі поставлено та розв'язано двовимірну крайову задачу з нелокальними граничними умовами для рівняння динаміки фільтраційного процесу з пам'яттю.

© В.М. Булавацький, 2022