УДК 004.421.6

М.С. ЛЬВОВ
Херсонський державний університет, Івано-Франківськ, Україна,
e-mail: *lvov@ksu.ks.ua*; *lvovms14@gmail.com*.

ДИЗ'ЮНКТИВНІ БАЗИСИ ПРИКЛАДНИХ АЛГЕБР МНОЖИН ТА ЇХНЄ ВИКОРИСТАННЯ В ЗАДАЧАХ КОМБІНАТОРНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Анотація. Введено поняття прикладної алгебри множин, стандартного диз'юнктивного базису прикладної алгебри множин і описано алгоритм побудови стандартного диз'юнктивного базису, який за аналогією з алгоритмом Бухбергера в теорії поліноміальних ідеалів і алгоритмом Кнута–Бендикса в теорії напівгруп називається алгоритмом критичної пари/поповнення. Наведено приклади різних прикладних алгебр множин, до яких належать алгебра скінченних множин в реалізації на впорядкованих списках, алгебра Лебега множин на числовій осі, алгебра лінійних напівалгебраїчних множин на площині, алгебра кіл на площині, названа алгеброю Ейлера. Розглянуто також реалізації алгоритму критичної пари/поповнення у цих прикладних алгебрах множин. Основний результат роботи полягає в тому, що наявність стандартного диз'юнктивного базису дає змогу будувати ефективні за часом (поліноміальні) алгоритми розв'язання основних проблем у прикладних алгебрах множин, таких як проблема представлення, проблема належності, проблема порівняння тощо. Алгоритми в алгебрі лінійних напівалгебраїчних множин на площині та алгебрі Ейлера на площині очевидним чином можна поширити на більш загальні прикладні алгебри множин.

Ключові слова: прикладна алгебра множин, алгоритм критичної пари/поповнення, комбінаторна геометрія, проблема належності.

Присвячується світлій пам'яті академіка
Олександра Адольфовича Летичевського

ВСТУП

У статті розглядаються деякі задачі комбінаторної геометрії, розв'язання яких ґрунтується на використанні алгоритму, який за аналогією з алгоритмами Бухбергера [1, 2] та Кнута–Бендікса [3] можна назвати алгоритмом критичної пари/поповнення (зокрема, це задача належності). Формулювання задач, що розглядаються, природним чином використовують конкретні алгебри геометричних множин, які в роботі названо прикладними алгебрами множин. Це алгебра скінченних множин, алгебра Лебега множин на числовій осі, алгебра напівалгебраїчних лінійних множин на площині, алгебра кіл на площині (точні визначення наведено у розд. 2).

Алгоритм критичної пари/поповнення набув поширення в конструктивній теорії поліноміальних ідеалів. Його автор — Б. Бухбергер [1, 2] застосував цей алгоритм для побудови базису ідеалу кільця поліномів, яке має «хороші» властивості. Ці базиси називають базисами Гребнера. Якщо базис Гребнера ідеалу I побудовано, багато класичних задач теорії поліноміальних ідеалів можна розв'язати ефективно. Це, наприклад, задача належності $f \in I$, задача порівняння $I = J$ та інші задачі. Фактично метод базисів Гребнера став основним методом конструктивної теорії поліноміальних ідеалів (див., наприклад, [4, 5]).

Алгоритм поповнення, знаний як алгоритм Кнута–Бендікса [3], використовується у теорії напівгруп з визначальними співвідношеннями і в теорії систем переписування термів для побудови множини визначальних співвідношень, якою послуговуються в ефективних алгоритмах багатьох прикладних задач [6, 7].

У задачах прикладних алгебр множин, які розглядаються у цій роботі, алгоритм критичної пари/поповнення використовується для побудови базису алгеб-