УДК 519.2

Л.С. СТОЙКОВА
Київ, Україна,
e-mail: *stojk@ukr.net.*

АЛЬТЕРНАТИВНЕ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ ГАУСА

Анотація. Дано чітке формулювання двох нерівностей Гауса. Представлено прозоре їхнє доведення, що грунтується на відомих фундаментальних результатах. Запропоновано простий спосіб побудови розбиття області параметрів задачі. Знайдено явний вигляд екстремальних функцій розподілу.

Ключові слова: екстремальні значення, лінійні функціонали, класи унімодальних функцій розподілу.

ВСТУП

Існує велика бібліографія стосовно нерівностей Чебишова і Гауса і їхнє доведення різними способами. Найбільш повна бібліографія зібрана в книгах [1, 2]. У книзі [1, гл. 12, розд. 4] розглянуто багато прикладів (у тому числі нерівність Гауса), де отримано верхні оцінки для лінійних функціоналів у різних класах унімодальних розподілів. На основі цих прикладів автори книги [1], розвиваючи і демонструючи конструктивний підхід до знаходження точних оцінок таких функціоналів, пишуть: «Эта техника является весьма мощной и, по-видимому, нова». (При доведенні нерівності Гауса в [1] (російський переклад) були допущені неточності, які тут виправлено.)

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

У цій статті автор, популяризуючи згаданий вище метод, розглядає дві такі задачі Гауса. Знайти максимальне значення імовірності $P\{\mu > t\}$, де μ має невідому унімодальну функцію розподілу (ф.р.) $F_\mu(x)$, її щільність $f_\mu(x)$ і моду $m=0$ у двох класах. Позначимо A_2 клас ф.р. $F_\mu(x)$ таких, що $m=0$ і фіксовано тільки другий момент $m_2 = \int\limits_0^\infty x^2 dF_\mu(x)$. Позначимо A_r клас функцій розподілу $F_\mu(x)$ таких, що $m=0$ і фіксовано тільки r-й момент $m_r = \int\limits_0^\infty x^r dF_\mu(x)$, $r \geq 2$. Нехай в обох класах виконуються рівності $F_\mu(0-) = f_\mu(0-) = 0.$ Позначимо функціонал $I(F_\mu) := P\{\mu > t\} = \int\limits_t^\infty dF_\mu(x)$.

У першій задачі знаходиться $\max I(F_\mu), F_\mu(x) \in A_2$, а в другій — $\max I(F_\mu), F_\mu(x) \in A_r$.

Щільність $f_\mu(x)$ може мати або одну моду m, або один інтервал мод. Нехай m — єдина або є однією з мод щільності $f_\mu(x)$. Тоді ф.р. $F_\mu(x)$ запишемо у вигляді

$$F_\mu(x) = \left\{ \begin{array}{l} \int\limits_0^x f_\mu(u)du, 0 \leq x < m, \\ F_m + \int\limits_m^x f_\mu(u)du, x > m \end{array} \right\}. \tag{1}$$