

А.М. ГУПАЛІнститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: gupalanatol@gmail.com.**О.А. ВАГІС**Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: valexdep135@gmail.com.**НЕПОВНОТА АРИФМЕТИКИ З ПОГЛЯДУ
ТЕОРІЇ ДІОФАНТОВИХ МНОЖИН**

Анотація. Проаналізовано Діофантові множини і показано, що всі рекурсивно перелічені множини є Діофантовими. На основі класичних результатів з теорії рекурсивних функцій наведено простий варіант теореми про неповноту арифметики: існує поліном, який не має цілих додатних розв'язків і для якого не можна довести відсутність додатних коренів.

Ключові слова: Діофантова множина, рекурсивно перелічені множини, неповнота арифметики.

ВСТУП

Загальновідома теорема Геделя про неповноту арифметики являє собою результат про формальну арифметику, в якому теорія обчислюваності та логіка пов'язані між собою. Доведення неповноти має низку допоміжних тверджень і натеper не є простим. На основі класичних результатів з теорії рекурсивних функцій і Діофантових множин надано достатньо просте доведення про неповноту арифметики.

У 1971 р. було отримано визначний результат про нерозв'язність 10-ї проблеми Гільберта, а саме, чи існує алгоритм, який за наданим поліномом $p(x_1, \dots, x_n)$ з цілими коефіцієнтами розпізнає існування розв'язків рівняння $p=0$ у цілих числах. Учений математик Ю.В. Матіясевич показав, що такого алгоритму не існує [1].

Основний технічний результат, отриманий під час доведення нерозв'язності 10-ї проблеми Гільберта — це теорема про збіг класу Діофантових множин та класу рекурсивно перелічених множин. Про обчислювальні можливості поліномів свідчить такий результат: можна явно вказати поліном від багатьох змінних з цілими коефіцієнтами такий, що множина всіх додатних значень, яких він набуває за цілочислових значень змінних, є в точності множина простих чисел.

ДІОФАНТОВІ МНОЖИНИ

Діофантовими рівняннями називають рівняння вигляду

$$D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0, \quad (1)$$

де D — поліном з цілими коефіцієнтами відносно всіх змінних $a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m$, які розбито на дві частини: параметри a_1, \dots, a_n та невідомі x_1, \dots, x_m . Під час фіксації значень параметрів отримуються конкретні Діофантові рівняння.

У процесі різного вибору значень параметрів одержують рівняння, які мають розв'язки, і рівняння, які розв'язків не мають. Параметри Діофантового рівняння (1) визначають деяку множину \mathfrak{M} , яка складається з усіх таких наборів значень параметрів a_1, \dots, a_n , для яких існують значення змінних x_1, \dots, x_m , які задовольняють рівняння (1):

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle \in \mathfrak{M} \Leftrightarrow \exists x_1, \dots, x_m [D(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m) = 0]. \quad (2)$$