УДК 519.6

В.Л. МАКАРОВ
Інститут математики НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *makarovimath@gmail.com*

Н.В. МАЙКО
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *mayko@knu.ua*

В.Л. РЯБІЧЕВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *ryabichev@knu.ua*

НЕПОКРАЩУВАНІ ОЦІНКИ ШВИДКОСТІ ЗБІЖНОСТІ МЕТОДУ ПЕРЕТВОРЕННЯ КЕЛІ ДЛЯ НАБЛИЖЕННЯ ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСПОНЕНТИ В ГІЛЬБЕРТОВОМУ ПРОСТОРІ[1]

Анотація. Одержано інтегральну оцінку точності методу перетворення Келі розв'язування абстрактної задачі Коші для диференціального рівняння 1-го порядку з необмеженим операторним коефіцієнтом у Гільбертовому просторі. Оцінка свідчить, що цей метод має степеневу швидкість збіжності, порядок якої автоматично залежить від гладкості початкового вектора, а отже, він є методом без насичення точності. Доведено також непокращуваність оцінки за порядком N (параметр дискретизації N характеризує кількість доданків частинної суми в апроксимації наближеного розв'язку).

Ключові слова: диференціальне рівняння, задача Коші, операторна експонента, Гільбертів простір, перетворення Келі, оцінка похибки.

ВСТУП

Математичні моделі багатьох процесів, що досліджуються в науці та техніці, можна подати у вигляді абстрактних диференціальних задач у Банаховому та Гільбертовому просторах. Одним з ефективних методів розв'язання таких задач є метод перетворення Келі, уперше запропонований у працях [1, 2].

У Гільбертовому просторі H зі скалярним добутком (u, v) і нормою $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$ розглянемо задачу Коші для диференціального рівняння 1-го порядку:

$$\frac{dx(t)}{dt} + Ax(t) = 0, \quad t > 0, \qquad x(0) = x_0, \tag{1}$$

де A — самоспряжений додатно визначений оператор із щільною в H областю визначення $D(A)$.

Розглянемо основні результати, одержані в [1, 2]. Доведено, що у випадку скінченної гладкості початкового вектора $x_0 \in D(A^\sigma)$, $\sigma > 1$, розв'язок $x(t)$ задачі (1) можна подати у вигляді ряду

$$x(t) = e^{-tA} x_0 = e^{-\gamma t} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p L_p^{(0)}(2\gamma t) T_\gamma^p (I + T_\gamma) x_0, \tag{2}$$

де $\gamma > 0$ — довільне число, $L_p^{(0)}(t)$ — поліноми Лагерра [3], I — одиничний оператор, T_γ — перетворення Келі оператора A:

$$T_\gamma = (\gamma I + A)^{-1} (\gamma I - A). \tag{3}$$

---

[1] Роботу виконано за часткової підтримки Національного фонду досліджень України. Грант № 2020.02/0121.