

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО СПЛАЙНУ ТА ФУНКЦІЇ ГРІНА ДЛЯ ПОБУДОВИ ТОЧНОГО СКІНЧЕННОВИМІРНОГО АНАЛОГА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ 4-ГО ПОРЯДКУ

Анотація. Розглянуто задачу з головними та природними умовами на межі відрізка. Запропоновано новий метод побудови точного дискретного аналога цієї задачі. Метод полягає в проектуванні диференціального рівняння на локальні сплайни, утворені фундаментальною системою розв'язків задач Коші для однорідного рівняння вихідної задачі. Одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь з 5-діагональною матрицею стосовно точних значень розв'язку вихідної задачі в точках рівномірної сітки. Для реалізації точного аналога запропоновано використати схеми високого порядку точності, які утворені з частинних сум рядів з парними степенями кроку сітки для розв'язків задач Коші.

Ключові слова: крайова задача, звичайне диференціальне рівняння 4-го порядку, задача Коші, визначник Вронського, локальний сплайн, суперпозиція розв'язків, точний дискретний аналог, система лінійних алгебраїчних рівнянь, 5-діагональна матриця.

ВСТУП

Точні сіткові аналоги крайової задачі для загального рівняння з головними умовами на межі відрізка побудовано з використанням функції Гріна в [1, 2]. Точна схема для окремого рівняння без урахування крайових умов одержана проектуванням на сплайн в [3].

У цій роботі для загального рівняння з головними та природними крайовими умовами проектуванням на локальні сплайни побудовано систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) стосовно точних значень розв'язку вихідної задачі в точках рівномірної сітки. Сплайни утворені з лінійно незалежних розв'язків задач Коші для однорідного рівняння вихідної задачі. Коефіцієнти біля точних значень розв'язку розглянутої задачі такі самі, як в [1, 2], але одержані з умов неперервності сплайнів та їхніх похідних до 2-го порядку включно та розривності похідних 3-го порядку в центральних точках сплайнів. У цій роботі сіткові рівняння подано у вигляді, зручному для практичної реалізації, оскільки визначники Вронського розв'язків задач Коші визначаються лише через коефіцієнти сплайнів.

Розглянемо таку задачу:

$$\begin{aligned}LU &\equiv (pU'')'' - (qU')' + rU = f(x), \quad 0 < x < l, \\U &= A_0, \quad U' = B_0, \quad x = 0, \\pU'' &= A_l, \quad (pU'')' = B_l, \quad x = l,\end{aligned}\tag{1}$$

де

$$\begin{aligned}0 < p_0 \leq p(x) \in C^{(2)}(0; l), \quad 0 \leq q(x) \in C^{(1)}(0; l), \\0 \leq r(x) \in C(0; l), \quad f(x) \in L_2(0; l).\end{aligned}$$

Гладкість розв'язку задачі (1) досліджено в [4]. На відрізку $[0; l]$ уведемо рівномірну сітку вузлів

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = \frac{l}{N}.$$