УДК 519.217.2

А.М. ГУПАЛ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *gupalanatol@gmail.com*.

О.А. ВАГІС
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *valexdep135@gmail.com*.

ТЕОРЕМА ПРО НЕПОВНОТУ ДЛЯ ОБЧИСЛЮВАНИХ ЗАДАЧ

Анотація. У теорії рекурсивних функцій за діагональним методом Кантора отримано рекурсивно перелічну множину $K = \{x | x \in W_x\}$, але не рекурсивну. На основі теорії Діофантових множин множина K визначається деяким поліномом, який має додатні корені. Навпаки, множина $\overline{K} = \{x | x \notin W_x\}$ не є рекурсивно перелічною. Жодна з обчислюваних функцій не може перелічити всіх елементів множини $\overline{K}$. Унаслідок продуктивності множини $\overline{K}$ існує параметр, для якого поліном не має додатних коренів, але довести їхню відсутність неможливо, оскільки цей параметр не належить рекурсивно перелічній множині.

Ключові слова: діагональний метод, Діофантова множина, рекурсивно перелічні множини.

ВСТУП

Теорема Геделя про неповноту — одна з найвідоміших теорем математики, являє собою результат формальної арифметики, де теорія обчислюваності та логіка пов'язані між собою. Повністю доведено ці результати в монографії [1], і вони мають низку допоміжних тверджень стосовно важливих властивостей рекурсивних предикатів. Також в цій роботі наведено відоме твердження про неповноту — «я недоведена формула». У значній мірі результати було отримано завдяки геделівській нумерації формул і ланцюгів доведень тверджень. Це дало змогу отримати властивості предикатів доведень на множині натуральних чисел. Гедель вперше втілив ідею нумерацій нечислових об'єктів натуральними числами.

РЕКУРСИВНІ ФУНКЦІЇ І ПЕРЕЛІЧНІ МНОЖИНИ

На основі теорії обчислень, а також результатів щодо перелічних та продуктивних множин в [2] наведено спрощений варіант теореми про неповноту Геделя. Було описано ідеалізований комп'ютер — машину з необмеженими регістрами (МНР), яка містить нескінченну кількість регістрів. У кожному з них фігурує в будь-який момент часу деяке натуральне число. МНР складається з чотирьох команд, а саме: обнулення, додавання одиниці, переадресації та умовного переходу. Існує декілька основних функцій, які фігурують в МНР для побудови більш складних функцій. Розроблено засоби побудови нових функцій за допомогою таких операцій як підстановка, рекурсія та мінімізація.

Упродовж двох десятиліть після отримання результатів Геделя було запропоновано інші підходи до обчислювальності, а саме: машини Тьюрінга, частково рекурсивні функції Кліні, алгоритми Маркова. Зусиллями багатьох дослідників отримано такий основний результат: кожне із згаданих вище понять ефективної обчислювальності породжує такий самий клас обчислювальних функцій.

Ефективна нумерація (кодування) множини усіх програм, отриманих на основі МНР, складає важливий результат, який одержано в [2]. Інакше кажучи, існує ефективне кодування програм множиною всіх натуральних чисел. Нумерація або кодування програм відіграють фундаментальну роль в теорії обчислювальності. За допомогою кодування отримують коди або індекси для обчислюваних функцій, при цьому є можливість використовувати корисні операції над кодами функцій.

Значний інтерес становить задача виявлення розв'язних та нерозв'язних проблем. Останні безпосередньо пов'язані з неповнотою обчислюваних задач. Вони свідчать про обмеження, які мають місце в теорії обчислювальності, та вказують на теоретичні