УДК 519.21

І.К. МАЦАК
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
email: *i.m.k@ukr.net*.

С.М. КРАСНИТСЬКИЙ
Київський національний університет технологій та дизайну, Київ, Україна,
e-mail: *krasnits.sm@ukr.net*.

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗНАЧЕНЬ ДОВЖИНИ ЧЕРГИ ТА ЧАСУ ОЧІКУВАННЯ В СИСТЕМАХ $M|G|1$ та $GI|M|1$

Анотація. Досліджено асимптотичну поведінку майже напевне екстремальних значень довжини черги та часу очеікування в черзі для систем масового обслуговування. Насамперед розглянуто одну загальну граничну теорему про асимптотику екстремальних значень регенеративних процесів. Далі на основі цієї теореми для систем $M|G|1$ та $GI|M|1$ сформульовано закон повторного логарифма для lim sup та закон потрійного логарифма для lim inf, а також деякі їхні уточнення.

Ключові слова: системи масового обслуговування $M|G|1$, $GI|M|1$, екстремальні значення, асимптотична поведінка майже напевне.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянуто одноканальну систему масового обслуговування (СМО), до якої в моменти $t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots$ надходять заявки на обслуговування. Нехай $\tau_i = t_{i+1} - t_i, i \ge 0$, — проміжок часу між прибуттям двох сусідніх заявок, $\eta_i, i \ge 0$, — час обслуговування i-ї заявки. Припустимо, що τ_i, η_i, $i \ge 0$, — послідовності незалежних однаково розподілених випадкових величин (н.о.р.в.в.), $\mathbf{E}\tau_i = a < \infty$, $\mathbf{E}\eta_i = b < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Позначимо W_i час очікування i-ї заявки до початку обслуговування. За довжину черги тут і далі береться загальна кількість заявок, які перебувають на обслуговуванні або очікують на нього. Позначимо $Q(t)$ довжину черги в момент часу t. Час очікування W_i та довжина черги $Q(t)$ — це дві основні характеристики, які звичайно досліджуються в теорії масового обслуговування. Перші дослідження щодо властивостей величин W_i та $Q(t)$ з'явились на початку XX століття. Вони пов'язані з іменами A. Erlang, F. Pollaczek, A. Khintchin [1, 2].

Покладемо

$$\overline{Q}(t) = \sup_{0 \le s \le t} Q(s), \overline{W}_n = \max_{0 \le i < n} W_i .$$

Вочевидь, що дослідження екстремальних значень $\overline{W}_n$ та $\overline{Q}(t)$ також становить значний інтерес для практичних застосувань. Тому величини $\overline{W}_n$ та $\overline{Q}(t)$ досліджувались в багатьох роботах (див., наприклад, [3–7] та огляд [8]). Зазвичай у таких дослідженнях використовували класичну теорію екстремальних значень н.о.р.в.в. [9, 10], а на випадкові величини τ_i та η_i накладалась умова

$$\rho = \frac{b}{a} < 1. \tag{1}$$

Зазначимо, що в цих роботах здебільшого розглядалась слабка збіжність нормованих випадкових величин $\overline{W}_n$ та $\overline{Q}(t)$. Мабуть, вперше для екстремальних значень випадкових величин, «хвости» розподілів яких наближені до «хвостів» експоненційного розподілу, закон повторного логарифма для lim sup та закон потрійного логарифма для lim inf були сформульовані в роботі [11].