УДК 519.6

Л.В. ЛУЦ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lv1@ukr.net, lili72luts@gmail.com*.

ОПТИМАЛЬНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКООСЦИЛЮВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ В УМОВАХ НАБЛИЖЕНОГО ЗАДАННЯ АПРІОРНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Анотація. Розглянуто задачу обчислення інтегралів від швидкоосцилювальних функцій для класу функцій, які мають неперервні другі похідні та обмежені умовою Ліпшиця з константою Ліпшиця L частково-неперервні треті похідні. При цьому апріорна інформація про підінтегральну функцію містить фіксовані значення функції та її першої і другої похідних, які задані у N фіксованих вузлах довільної сітки наближено, з певною похибкою. Такий спосіб задання апріорної інформації дає змогу звузити клас підінтегральних функцій на так званий інтерполяційний клас функцій і побудувати для нього оптимальну за точністю квадратурну формулу та отримати оптимальну оцінку її похибки, застосувавши метод граничних функцій.

Ключові слова: інтеграли від швидкоосцилювальних функцій, інтерполяційні класи функцій, наближено задана апріорна інформація, оптимальні за точністю квадратурні формули, метод граничних функцій.

Метою цієї роботи є ефективне обчислення швидкоосцилювальних інтегралів типу

$$
\begin{aligned}
I_1(\omega) &= \int_a^b f(x) e^{-i\omega x} dx, \\
I_2(\omega) &= \int_a^b f(x) \sin \omega x \, dx, \qquad (1) \\
I_3(\omega) &= \int_a^b f(x) \cos \omega x \, dx,
\end{aligned}
$$

де a і b — скінченні дійсні числа; ω — довільне дійсне число, $|\omega| \geq 2\pi(b-a)$; інформація про $f(x)$ задається інформаційним оператором $\Phi(f, x)$ не більше ніж у N вузлових точках $\{x_i\}_0^{N-1}$ з $[a, b]$. Серед елементів інформаційного оператора $\Phi(f, x)$ можуть бути задані у N вузлах довільної сітки значення функції $f(x)$, значення її похідних певного порядку, похибки задання цих значень $\{\varepsilon_i\}_0^{N-1}$ у випадку, якщо вони задані наближено.

Задача обчислення швидкоосцилювальних інтегралів (1) виникає в багатьох галузях фізики та математики і утворює один із основних класів інтегралів, для яких звичайні методи апроксимації, наприклад, такі як квадратури Гаусса, Ньютона–Котеса [1] і Кленшоу–Кертіса [2], мають тенденцію давати великі похибки, коли частота $|\omega| \to \infty$ [3]. Тому доцільно застосовувати методи типу Файлона [4–6], коли функції $e^{-i\omega x}$, $\sin \omega x$, $\cos \omega x$ розглядаються як вагові, і лише функція $f(x)$ наближається інтерполяційним поліномом. При цьому використовується деяка якісна і кількісна апріорна інформація про функцію $f(x)$, яка дає змогу виокремити достатньо вузький клас функцій F, якому вона належить. Наприклад, можна передбачити, що вона має похідні певного порядку, які задовольняють деякі умови [7–9]. Крім того, коли розв’язується конкретна задача, значення функції (та, можливо, її похідних певного порядку) у вузлах фіксова-