УДК 519.147 681.3 511.482

М.М. ГЛАЗУНОВ
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
Інститут математики та інформатики БАН, Софія, Болгарія, e-mail: *glanm@yahoo.com*.

ОПТИМАЛЬНЕ ПАКУВАННЯ ОДИНИЧНИХ СФЕР МІНКОВСЬКОГО НА ПЛОЩИНІ[1]

Анотація. Досліджено оптимальне пакування одиничних сфер Мінковського на площині. Побудовано простір модулів (параметеризацію) допустимих ґраток подвоєних сфер Мінковського, які містять по три пари точок на відповідній сфері Мінковського і визначають пакувальні ґратки одиничних сфер Мінковського. Відповідно до результатів доказу гіпотези Мінковського про критичний визначник отримано розбиття сфер Мінковського на три класи: сфери Ватсона, сфери Девіса та сфери Морделла–Чебишева. Розглянуто ґратки, які дають оптимальні пакування цих сфер, та знайдено щільності цих оптимальних пакувань.

Ключові слова: сфера Мінковського, допустима ґратка, критична ґратка, простір модулів, щільність пакування, оптимальне пакування.

ВСТУП

Широкий спектр задач та методів теорії ґраток, груп та пакування сфер представлено та досліджено в [1]. Чудові результати з оптимального пакування сфер у розмірностях 8 та 24 отримано в [2, 3]. Нові цікаві результати щодо заповнення 3D-об'єму несферичними та сферичними частинками та пропорційного пакування кругів у круговому контейнері отримано і наведено в [4, 5]. У зазначених роботах досліджено пакування об'єктів, пов'язаних з Евклідовою метрикою.

Мінковський в [6], а також і раніше (див. посилання в [6]), у дослідженні задач теорії Діофантових наближень визначив об'єкти, які в запропонованій роботі називатимемо сферами Мінковського.

Позначимо $|a|$ модуль дійсного числа a. Нехай n-вимірна одинична сфера Мінковського, що відповідає параметру $p \ge 1$ з центром у точці $(a_1, \dots, a_n)$, має вигляд $S_p^{n-1}(a_1, \dots, a_n){:}\, |x_1 - a_1|^p + \dots + |x_n - a_n|^p = 1.$ Мінковський визначив ці об'єкти для $n = 2$.

Одновимірна одинична сфера Мінковського, що відповідає параметру $p \ge 1$ (а тільки такі сфери досліджуватимемо далі) з центром у точці (a_1, a_2), має вигляд $S_p^1(a_1, a_2){:}\, |x_1 - a_1|^p + |x_2 - a_2|^p = 1.$

Якщо центр сфери Мінковського збігається з початком координат, використовуємо позначення S_p^{n-1} і називаємо таку сферу центрально-симетричною.

Зазначимо, що існує (з точністю до рухів у Евклідовій площині) тільки одна одинична центрально-симетрична Евклідова сфера, тоді як одиничних сфер Мінковського існує континіум, який параметризується параметром $p \ge 1$.

Будемо казати, що система рівних сфер Мінковського у 2-вимірному Евклідовому просторі утворює упаковку, якщо жодні дві сфери цієї системи не мають спільних внутрішніх точок.

Пакування залежить від його щільності і є оптимальним, коли щільність максимальна. Зазначимо, що оптимальне пакування тіл на площині є ґратковим [7, 8]. У оптимальному пакуванні одиничних сфер Мінковського використано результати доведення гіпотези Мінковського [9].

У [10] на мові куль Мінковського наведено доказ теореми оптимального пакування одиничних куль Мінковського. Співвідношення між сферами і кулями Мінковського дуже просте: сфера Мінковського є границею кулі Мінковського.

У запропонованій роботі викладено докладний і нескладний за ідеєю доказ на мові сфер Мінковського, які більш відповідають застосуванням пакування, зокре-

[1] Робота підтримана Саймонс (Simons), грант № 992227.