УДК: 517.58, 517.955

А. ХАСАНОВ
Інститут математики ім. В.І. Романовського, Ташкент, Узбекистан;
Гентський університет, Гент, Бельгія, e-mail: *anvanhasanov@yahoo.com*.

Е. КАРІМОВ
Інститут математики ім. В.І. Романовського, Ташкент, Узбекистан;
Гентський університет, Гент, Бельгія, e-mail: *erkinjon@gmail.com.*

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ТИПУ ЕЙЛЕРА ДЛЯ ДВОВИМІРНИХ ФУНКЦІЙ ТИПУ МІТТАГ-ЛЕФФЛЕРА

Анотація. Встановлено інтегральні представлення типу Ейлера для двох двовимірних функцій типу Міттаг-Леффлера. Зазначені двовимірні функції у цих інтегральних представленнях виражено через самі себе з різними параметрами, через відомі гіпергеометричні функції однієї змінної або через іншу двовимірну функцію типу Міттаг-Леффлера.

Ключові слова: двовимірні функції типу Міттаг-Леффлера, інтеграли Ейлера, гіпергеометричні функції, інтегральне представлення.

ВСТУП. ПОПЕРЕДНІ ВІДОМОСТІ

Функція Міттаг-Леффлера набула великого значення та популярності завдяки її застосуванню в розв'язанні диференціальних рівнянь дробового порядку та інтегральних рівнянь дробового порядку. Крім того, функція Міттаг-Леффлера відіграє важливу роль у різних галузях прикладної математики та інженерних наук, зокрема в хімії, біології, статистиці, термодинаміці, механіці, квантовій фізиці, інформатиці, обробленні сигналів. До того ж функція Міттаг-Леффлера кількох змінних з'являється у розв'язках певних крайових задач, пов'язаних з дробовими інтегро-диференціальними рівняннями типу Вольтерри [1], задач із початково-крайовими умовами для узагальненого багаточленного дробового за часом рівняння дифузії [2], а також задач із початково-крайовими умовами для багаточленних дробових за часом рівнянь дифузії з додатними постійними коефіцієнтами [3].

Слід зазначити, що багатовимірні функції типу Міттаг-Леффлера з'являються у розв'язках багаточленних диференціальних рівнянь дробового порядку [2, 4]. Деякі узагальнені дробові похідні, наприклад, біпорядкова похідна Гільфера [5], не спричиняють появи багатовимірних функцій типу Міттаг-Леффлера в розв'язках, тоді як інші, зокрема похідна Прабхакара, потребують використання двовимірних функцій типу Міттаг-Леффлера [6]. До того ж багатовимірні функції типу Міттаг-Леффлера, зокрема двовимірні та тривимірні, були детально досліджені А. Фернандесом та його співавторами (див., наприклад, [7–9]) у зв'язку з новими дробовими операторами та можливими застосуваннями у багатопорядкових системах диференціальних рівнянь дробового порядку.

Скориставшись звичайними позначеннями $\Gamma(x)$ для гамма-функції та $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x)$, $n \geq 0$, $x \neq 0, -1, -2, \ldots$, для символу Похгаммера, М.Г. Міттаг-Леффлер увів функцію $E_\alpha(z)$ у такому вигляді [10, 11]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \; (\alpha > 0, z \in \mathbb{C}). \tag{1}$$

Нехай тут і далі $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{N}$ та $\mathbb{Z}_0^-$ позначають множини комплексних чисел, додатних дійсних чисел, додатних цілих чисел і недодатних цілих чисел відповідно. Також нехай $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. За рахунок збільшення кількості пара-