УДК 519.8

А.М. ШУТОВСЬКИЙ
Волинський національний університет імені Лесі Українки, Луцьк, Україна,
e-mail: *sh93ar@gmail.com.*

ІНТЕГРАЛЬНІ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ПОЛІГАРМОНІЙНИХ ОПЕРАТОРІВ

Анотація. У дослідженні представлено оптимальні математичні моделі в контексті задач системного аналізу. А саме, застосовано нетривіальні граничні умови до задачі про інтегрування полігармонійних рівнянь у полярних координатах. Функцію, тригармонійну в одиничному крузі, подано у вигляді інтеграла саме з дельтаподібним ядром. Розглянуто питання про існування структурного зв'язку між розв'язками тригармонійних рівнянь у полярних координатах та додатними операторами, які є розв'язками інших диференціальних рівнянь у частинних похідних. Показано, що тригармонійний інтеграл Пуассона для одиничного круга можна подати як середнє значення розв'язку рівняння Лапласа в полярних координатах.

Ключові слова: ряд Фур'є, тригармонійне рівняння, одиничний круг, тригармонійний інтеграл Пуассона, оператор Абеля–Пуассона.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Кожне наукове досягнення є продуктом застосування окремого методу дослідження. Але бурхливий науково-технічний прогрес є неможливим без активного розвитку саме математичних методів дослідження. Методи такого типу відкривають нові можливості для встановлення відповідності між досліджуваним явищем та його математичною моделлю. На початкових етапах розвитку методів математичного моделювання кількість математичних моделей була недостатньою для розв'язання поставлених задач. Тому чимало прикладних задач розв'язувалися шляхом застосування математичних моделей, які згодом були відхилені у зв'язку з появою досконаліших аналогів. Так поступово виникло поняття оптимальності математичної моделі, яке в подальшому стало фундаментом для формування теорії оптимальних рішень.

Оптимальність математичної моделі потрібно розглядати у контексті застосування математичного апарату, який поєднує теорію оптимальних рішень з іншими галузями науки [1–4]. Якщо математичну модель явища розглядати у контексті взаємодії теорії оптимальних рішень із теорією ігрових задач динаміки [5–8], то математичний апарат формує теорія диференціальних рівнянь у частинних похідних. Одне з рівнянь математичної фізики може використовуватися з метою опису найрізноманітніших динамічних систем [9]. Однак цілком протилежні випадки також мають місце. Адже та сама динамічна система може бути описана диференціальними рівняннями у частинних похідних [10, 11] різних типів, наприклад процес теплопередачі у межах певної області. Відповідна задача зводиться до знаходження розв'язку рівняння параболічного типу [12, 13]. Однак у разі наближення температури досліджуваного процесу до стійкого розподілу виникає рівняння еліптичного типу [14, 15], а саме

$$\nabla^2 U = 0. \tag{1}$$

Явний вигляд оператора Лапласа ∇^2 безпосередньо залежить від геометрії області, у межах якої розв'язується рівняння Лапласа (1) [16]. Якщо область має вигляд прямокутника, то доцільним виявляється застосування формули $\nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ у декартових координатах. Якщо область має вигляд круга, то формула $\nabla^2 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \dfrac{\partial}{\partial \rho}\right) + \dfrac{1}{\rho^2}\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ у полярних координатах виявляється