УДК 519.6:517.524

М.О. НЕДАШКОВСЬКИЙ
Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів, Україна,
e-mail: *m.nedashkovskyy@gmail.com.*

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Анотація. Матричні рівняння та системи матричних рівнянь широко використовують у задачах оптимізації систем управління, в математичній економіці. Однак методи їхніх розв'язувань сформовані лише для найбільш поширених матричних рівнянь — рівнянь Ріккаті та Ляпунова, а універсального підходу до розв'язання задач такого класу не існує. У цій роботі розглянуто методи розв'язання матричних поліноміальних рівнянь довільного порядку з матричними та векторними невідомими. Описано підхід до обчислення кортежів розв'язків поліноміальних матричних рівнянь, який базується на теорії гіллястих ланцюгових дробів. Зазначимо, що йдеться не лише про чисельні, а й про символьні методи розв'язання. Подано обчислювальну схему для систем поліноміальних матричних рівнянь другого степеня з багатьма невідомими. Наведено розвинення розв'язку у неперервний ланцюговий матричний дріб. Сформульовано достатні ознаки збіжності матричних гіллястих ланцюгових дробів до розв'язків та критерії закінчення обчислень в ітераційних операціях. Результати чисельних експериментів підтверджують справедливість теоретичних викладок та ефективність запропонованих методів.

Ключові слова: матричні поліноміальні рівняння, гіллясті ланцюгові дроби з матричними елементами, збіжність до розв'язку.

ВСТУП

Матричні рівняння утворюються у багатьох теоретичних і прикладних дисциплінах, зокрема у теорії лінійних гамільтонових систем, варіаційному численні, в задачах оптимального керування, фільтрації, стабілізації керованих лінійних систем та інших прикладних областях. Найпростіші матричні рівняння розв'язувались ще у другій половині XIX ст. [1, 2]. Проте за відсутності загального підходу до рівнянь

$$A_n X^n + A_{n-1} X^{n-1} + \ldots + A_1 X + A_0 = 0 \qquad (1)$$

(тут коефіцієнти $A_i \in R^{p \times p}$ $(i = \overline{0, m})$ та невідомі $X \in R^{p \times p}$ задані над кільцем некомутативних матриць) кожне рівняння розв'язувалось для певного випадку.

Для задачі чисельного розв'язування одновимірних алгебраїчних задач довільної нелінійності розроблено чимало ефективних наближених методів. Проте ситуація суттєво ускладнюється у разі розв'язування нелінійних багатомірних рівнянь. При цьому якщо достовірна апріорна інформація про початкові (пробні) розв'язки не є достатньо відомою, то принципове розв'язування тієї чи іншої нелінійної задачі стає проблематичним. У роботі [1] запропоновано методи побудови алгоритмів зведення M-вимірних поліноміально-нелінійних алгебраїчних рівнянь до трикутної форми, використовуючи базис Гробнера. Попри те, що на цей час ці алгоритми тоди побує оптимальними, не можна вважати, що задача розв'язування цього класу ситем виконана вичерпно. Адже насправді розв'язати систему поліноміально-нелінійних рівнянь — це означає знайти кортежі розв'язків задачі.

Розглянемо підхід до обчислення кортежів розв'язків поліноміальних матричних рівнянь, який базується на теорії гіллястих ланцюгових дробів [3, 4]. Слід зазначити, що йдеться не лише про чисельні, а й про символьні методи розв'язання. Інтерес до таких досліджень значно зростає у зв'язку з високою інтенсивністю публікацій зі штучного інтелекту.

Ідея підходу базується на побудові обчислювальних схем розв'язування алгебраїчних рівнянь матричними гіллястими ланцюговими дробами (МГЛД) [5–8]. Це є підходом до створення методології побудови нових алгоритмів та отримання нових результатів.

© М.О. Недашковський, 2025