

МЕТОД ОПЕРАТОРНОЇ ЕКСТРАПОЛЯЦІЇ ДЛЯ ВАРІАЦІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ¹

Анотація. Досліджено нові ітераційні алгоритми для розв'язання монотонних варіаційних нерівностей у Гільбертовому просторі. Запропоновано варіант алгоритму операторної екстраполяції зі змінною метрикою. Доведено теореми про слабку та сильну збіжність для варіаційних нерівностей з Ліпшицевими та монотонними операторами. Розглянуто декілька застосувань алгоритму операторної екстраполяції для задач сідлового типу.

Ключові слова: варіаційна нерівність, сідлова задача, рівновага Неша, операторне рівняння, метод операторної екстраполяції, метод змінної метрики, збіжність.

ВСТУП

Варіаційні нерівності — зручна загальна форма запису різних задач, що виникають у математичній фізиці, дослідженні операцій та машинному навчанні [1–5]. Розроблення алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей та близьких задач (задач про рівновагу, ігрових задач) є надзвичайно популярним напрямом обчислювальної математики.

Негладкі задачі опуклої оптимізації можна ефективно розв'язувати, якщо їх переформулювати у вигляді сідлових задач і застосувати алгоритми розв'язання варіаційних нерівностей [6–8]. Запровадження генеративних змагальних нейронних мереж (Generative Adversarial Networks, GANs) та інших моделей змагального навчання привернуло увагу фахівців у галузі машинного навчання до алгоритмів розв'язання варіаційних нерівностей [5].

Найпростішим методом розв'язання варіаційних нерівностей є аналог методу проєкції градієнта, що у разі сідлової задачі відомий як метод Ерроу–Гурвіца або метод градієнтного спуску–підйому [9]. Проте цей метод може не збігатися для нерівностей з монотонним оператором [9].

Найвідомішим узагальненням методу проєкції градієнта для варіаційних нерівностей є екстраградієнтний метод [10]. Дослідженню цього алгоритму присвячено велику кількість публікацій [5, 6, 11–14]. Зокрема, запропоновано варіанти екстраградієнтного алгоритму з одним метричним проєктуванням на допустиму множину [11–13].

Сучасним варіантом екстраградієнтного методу є проксимальний дзеркальний метод Неміровського [6]. Його можна проінтерпретувати як варіант екстраградієнтного методу з проєктуванням, яке здійснюють з використанням дивергенції Брегмана [15].

У роботі Л. Попова [16] запропоновано відмінну від екстраградієнтного алгоритму модифікацію алгоритму Ерроу–Гурвіца для пошуку сідлових точок опукло-вгнутих функцій. Останнім часом алгоритм Попова для варіаційних нерівностей став відомим у спільноті фахівців з оптимізації та машинного навчання під назвою «Extrapolation from the Past» (метод екстраполяції з минулого) [5, 17]. Ітерація цього алгоритму дешевша за ітерацію екстраградієнтного алгоритму за кількістю обчислень значень оператора. У [18] запропоновано двоетапний проксимальний алгоритм для розв'язання задачі рівноважного програмування у просторі Адамара. Варіант двоетапного проксимального алгоритму для дворівневих варіаційних нерівностей досліджено в роботі [19]. Адаптивний варіант двоетапного брегманівського методу Попова досліджено у [20].

¹ Роботу виконано за фінансової підтримки НАН України (проект «Нові субградієнтні та екстраградієнтні методи для негладких задач регресії», 0124U002162).

© В.В. Семенов, 2025