

ОПТИМІЗАЦІЙНІ ВЛАСТИВОСТІ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ ТРИГАРМОНІЙНОГО ІНТЕГРАЛА ПУАССОНА

Анотація. Розглянуто оптимізаційну задачу про побудову поліноміальної структури для розв'язків полігармонійних рівнянь. За основу приймається тригармонійне рівняння у декартових координатах із трьома нетривіальними граничними умовами. Доведено, що розв'язок розглядуваної крайової задачі належить до класу саме додатних операторів. Показано, що поліноміальні розклади для граничних значень тригармонійної функції поблизу межі верхньої півплощини породжують формулу Тейлора тригармонійного інтеграла Пуассона. За отриманим результатом доведено наявність додаткових граничних умов для розв'язків тригармонійних рівнянь у декартових координатах.

Ключові слова: тригармонійне рівняння, оптимізаційна задача, верхня півплощина, тригармонійний інтеграл Пуассона, формула Тейлора.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ДЕЯКІ ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Математичні методи дослідження є одними з найефективніших методів розв'язування багатьох прикладних задач. Так, наприклад, диференціальні рівняння у частинних похідних відіграють роль потужного математичного апарату не лише в математичній фізиці, а й у теорії ігрових задач динаміки [1–4]. Рівняння математичної фізики, яке має порівняно нескладну математичну структуру, може визначати широкий спектр складних динамічних систем [5, 6].

Отже, виникає потреба в додатковому аналізі вже визначених розв'язків диференціальних рівнянь у частинних похідних [7] певних типів. Особливо актуальним на практиці є визначення відповідності між розв'язком рівняння математичної фізики та формулою Тейлора із залишковим членом певної форми. Дослідження поведінки залишкового члена дає змогу проаналізувати оптимальність представлення розв'язку крайової задачі через многочлен певного степеня. Щодо інтегральної форми залишкового члена, то вона відкриває широкі можливості для застосування найрізноманітніших методів [8–11] прикладної математики.

У загальному випадку розв'язок рівняння математичної фізики є функцією багатьох змінних. Але в найпростішому випадку диференціальне рівняння у частинних похідних має область визначення у вигляді двовимірної області та розв'язок тієї ж розмірності. Розв'язок рівняння математичної фізики через його граничне значення (яке є функцією однієї змінної) на межі області доволі часто є функціональною залежністю у вигляді інтеграла з інтегральним ядром.

Відповідь на питання про застосовність такого інтеграла в теорії оптимального проєктування можна отримати лише після суттєвого дослідження інтегрального ядра, водночас перевіряючи на наявність нулів. Інтегральне ядро, яке має нулі, є знакозмінним. Одним із найпростіших прикладів є спряжений інтеграл Пуассона [12]

$$\bar{P}(f; \rho, x) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(x+t) \sin(t) dt}{1-2\rho \cos(t) + \rho^2} \quad (1)$$

в полярних координатах для одиничного круга ($0 \leq \rho < 1$).

Згідно з (1) інтегральне ядро спряженого інтеграла Пуассона змінює свій знак з переходом через точку $t = \pi$. Варто зауважити, що двовимірною функцією (1) є уявною частиною аналітичної функції та задовольняє рівняння Лапласа [13–15]

$$\nabla^2 U = 0, \quad (2)$$