

М.Ф. СЕМЕНЮТАЦентральноукраїнський національний технічний університет, Кропивницький, Україна,
e-mail: semeniutamf@kntu.kr.ua.**ПРО ЗБАЛАНСОВАНУ СУМІЖНО-НУЛЬОВУ РОЗМІТКУ
УЗАГАЛЬНЕНИХ ГРАФІВ ПЕТЕРСЕНА**

Анотація. Досліджено одну з нерозв'язаних проблем теорії розміток графів, а саме існування збалансованої суміжно-нульової розмітки у кубічних графів. Особливу увагу зосереджено на класі узагальнених графів Петерсена $GP(n, k)$. Задано необхідну умову існування збалансованої суміжно-нульової розмітки для $GP(n, k)$. Дослідження її властивостей сприяло отриманню результатів для графу $GP(n, 5)$, які вказують на наявність його структурних обмежень, пов'язаних з симетрією та властивостями його групи автоморфізмів. Отримано структурні властивості для подібних графів, зокрема для $GP(6m, 5)$, які надали змогу довести, що граф $GP(6m, 5)$ не допускає збалансованої суміжно-нульової розмітки для будь-якого $m \geq 3$.

Ключові слова: граф, регулярний граф, узагальнений граф Петерсена $GP(n, k)$, збалансована суміжно-нульова розмітка, група автоморфізмів графу.

ВСТУП

Теорія розміток посідає вагоме місце у сучасній теорії графів, що підтверджується щорічним оглядом публікацій у цій галузі, виконаним J. Gallian [1]. Серед численних варіацій цієї теорії поняття групової дистанційної магічної розмітки останніми роками привернуло значну увагу. Цей клас розміток є узагальненням класичної дистанційної магічної розмітки з використанням структури Абелевих груп.

Нехай $G = (V, E)$ — звичайний граф. Дистанційною магічною розміткою G називається така бієкція $f: V \rightarrow \{1, 2, \dots, |V|\}$, для якої існує стала $\mu \in N$ і вага $w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$ кожної вершини $v \in V$ дорівнює μ , де $N(v)$ — множина суміжності вершини v . Нехай Γ — скінченна Абелева група порядку n . Для групової операції використовуватимемо адитивну форму запису. Під Γ -дистанційною магічною розміткою графу $G = (V, E)$ порядку n розуміють бієктивне відображення $f: V \rightarrow \Gamma$, за яким вага $w(v) = \sum_{u \in N(v)} f(u)$ кожної вершини $v \in V$

дорівнює одному й тому ж елементу $\mu \in \Gamma$, який називають магічною константою [2]. Якщо граф допускає Γ -дистанційну магічну розмітку, то кажуть, що він є Γ -дистанційним магічним. Перехід до групових розміток дає змогу отримувати результативні конструкції там, де не існує класичних магічних розміток. Ця гнучкість стимулює дослідження взаємозв'язку між структурою графу та властивостями вибраної групи.

Перші статті з цього напрямку почали з'являтися у 90-х роках минулого століття. Зокрема, вершинні розмітки графів елементами Абелевих груп, за яких усі компоненти зв'язності графу мають однакову вагу, вивчалися у роботах Y. Egawa в 1997 р. [3] і Y. Fukuchi в 1998 р. [4]. Подальший розвиток цієї ідеї призвів до введення магічної тотальної розмітки графу елементами довільної Абелевої групи, порядок якої залежить від порядку та розміру графу [5]. Поняття Γ -дистанційної магічної розмітки було запропоновано D. Froncek у 2013 р. [2]. Умови існування групових магічних розміток регулярних графів досліджувалися в [2, 6–9]. У цьому контексті автори [9] запропонували новий тип вершинної розмітки — збалансовану суміжно-нульову розмітку (balanced zero-neighborhood labeling). Вона передбачає застосування двійкових міток та умов, заданих для ло-