

М.І. ШЛЕЗІНГЕРІнститут інформаційних технологій та систем НАН України, Київ, Україна,
e-mail: schles@irtc.org.ua.**Є.В. ВОДОЛАЗСЬКИЙ**Інститут інформаційних технологій та систем НАН України, Київ, Україна,
e-mail: waterlaz@gmail.com.**АСИМЕТРИЧНЕ УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ЧЕБИШОВА**

Анотація. Розглянуто сімейство узагальнень нерівності Чебишова. Основну увагу приділено асиметричним випадкам, коли область промаху, що становить інтерес, не є симетричною відносно математичного сподівання. Добре відомі результати Кантеллі та Зельберга розглянуто як природні розширення класичної оцінки Чебишова. Запропоновано узагальнений підхід на основі методів лінійного програмування, який забезпечує наочну геометричну інтерпретацію та дає змогу стисло отримувати відповідні нерівності. Цей підхід демонструє універсальність лінійного програмування у формулюванні ймовірнісних оцінок за різних типів обмежень.

Ключові слова: нерівність Чебишова, нерівність Кантеллі, нерівність Зельберга, ймовірнісні оцінки.

ВСТУП

Нерівність Чебишова [1, 2] є одним із найуживаніших результатів у теоретичній та прикладній статистиці. Цю нерівність формулюють у такий спосіб. Нехай $\mathbb{R}_{\geq 0}$ — множина невід'ємних дійсних чисел.

Теорема 1 (нерівність Чебишова). Якщо $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ — функція щільності ймовірності одновимірної випадкової величини з математичним сподіванням $\mu = \int_{\mathbb{R}} x \cdot p(x) dx = 0$ та дисперсією $\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) dx = 1$, тоді

$$P[|X| \geq \theta] \leq \frac{1}{\theta^2}, \quad \theta > 0. \quad (1)$$

Нерівність у теоремі 1 вивів П. Чебишов як допоміжну частину доведення закону великих чисел і сформулював з необхідним рівнем загальності. Однак з часом ця нерівність набула ширшого використання, вийшовши за межі початкового контексту, в якому була сформульована. Велика кількість застосувань зумовила потребу у подальших дослідженнях, зокрема щодо того, як змінюється нерівність Чебишова за певних послаблень, посилень або інших невеликих змін умов теореми 1 [2–7]. Деякі з таких узагальнень включають нерівність Чернова [8] та нерівність Колмогорова. Проте у цій статті основну увагу приділено узагальненням, які змінюють умову $|X| \geq \theta$ оригінальної нерівності Чебишова, а саме нерівностям Кантеллі [9, 10] та Зельберга [11, 12].

Ці питання неминуче виникають у деяких реальних ситуаціях, як показано в такому прикладі. Нехай рівень води в річці — випадкова величина з математичним сподіванням $\mu = 0$ та дисперсією $\sigma^2 = 1$. Небезпека виникає у разі повені, коли рівень води досягає певного порогового значення $\theta > 0$ або перевищує його, і постає запитання, яка максимально можлива ймовірність такої небезпеки. Відповідь на нього неможливо безпосередньо отримати з теореми 1, оскільки не всі значення рівня води x , де $|x| \geq \theta$, є небезпечними, а лише ті, для яких $x \geq \theta$. Саме наступна теорема, хоча й подібна до теореми 1, дає відповідь на це запитання.