УДК 517.95

І.М. АЛЕКСАНДРОВИЧ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *ialexandrovich@ukr.net.*

М.В.-С. СИДОРОВ
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ, Україна,
e-mail: *myksyd@knu.ua.*

Н.І. ЛЯШКО
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *lyashko.natali@gmail.com.*

О.С. БОНДАР
Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, Київ, Україна,
e-mail: *alenkajob@gmail.com.*

ЗАДАЧА РОБЕНА ДЛЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО РІВНЯННЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА 4-ГО ПОРЯДКУ

Анотація. Інтегральні оператори, що переводять довільні функції в регулярні розв'язки рівнянь в частинних похідних 2-го і вищих порядків застосовано до розв'язування задачі Робена для узагальненого вісесиметричного рівняння Гельмгольца 4-го порядку.

Ключові слова: інтегральний оператор, аналітичні функції, регулярні розв'язки.

Процеси різноманітної фізичної природи описують рівнянням Гельмгольца [1–6] та його ітераціями. Предметом дослідження цієї роботи є застосування інтегральних операторів Рімана, що переводять довільні аналітичні функції в регулярні розв'язки диференціальних рівнянь вищих порядків ($n \geq 2$), тобто розроблений метод знаходження в аналітичному вигляді розв'язків відповідних ітерованих рівнянь. Варто зауважити, що зв'язок між розв'язками рівнянь і аналітичними функціями не є складним.

Можливість зведення інтегрального представлення розв'язків [7] рівнянь вищих порядків до відповідної крайової задачі для аналітичних функцій у цій роботі використана для розв'язування задачі Робена для узагальненого вісесиметричного рівняння Гельмгольца 4-го порядку. Узагальнене вісесиметричне рівняння Гельмгольца 4-го порядку описує коливання в середовищі, яке має осьову симетрію. Воно є математичним описом коливань, що змінюються в радіальному напрямку та вздовж осі симетрії. Схожі рівняння використовуються в різних галузях, таких як фізика плазми, оптика, акустика та інших.

Використаємо інтегральне представлення [7], що становить розв'язок задачі Коші для рівняння еліптичного типу з аналітичними коефіцієнтами. Розв'язок такої задачі існує і є єдиним.

Теорема 1. Нехай D — однозв'язна область у площині $z = x + iy$, симетрична щодо дійсної осі, $\omega(z)$ — довільна аналітична в D функція. Тоді функція

$$U(x, y) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} y^{1-k} 2^{k/2} \left(\frac{\alpha^2}{4}\right)^{(1-k/2)/2} \times$$

$$\times \int_0^y \operatorname{Re}\omega(x + i\xi) J_{k/2-1}\left(\frac{\alpha}{2}\sqrt{y^2 - \xi^2}\right)(y^2 - \xi^2)^{(k/2-1)/2} d\xi \tag{1}$$